閩南師範大學

理学硕士学位论文

某些广义度量性质与可数性质的映射定理

杨 洁

闽南师范大学

二〇一八年六月

学校代码：10402　　　　　　　　　　　　　　　学　　号：　2015022001

分 类 号：　　　　　　　　　　　　　　　　　密　　级：

閩南師範大學

理学硕士学位论文

某些广义度量性质与可数性质的映射定理

学位申请人 ： 杨洁

指 导 教 师：林寿教授

学 位 类 别：理学硕士

学 科 专 业：基础数学

授 予 单 位：闽南师范大学

答 辩 日 期：二〇一八年六月

CODE：10402 NO.： 2015022001

U.D.C.： Classified Index：

A Dissertation for the Degree of M. Science

The mapping theorems for some generalized metric properties and countable properties

Candidate	：	Yang Jie
Supervisor	：	Prof. Lin Shou
Specialty	：	Fundamental Mathematics
Academic Degree Applied for	：	Master of Science
University	：	Minnan Normal University
Date of Oral Examination	：	June，2018

闽 南 师 范 大 学

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：______________　　　　日期：____年____月____ 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权闽南师范大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密□，在______年解密后适用本授权书。

2、不保密☑。

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名：______________　　日期：____年____月____日

导师签名：______________　　日期：____年____月____日

摘 要

映射与空间是一个庞大而前景广阔的课题。近 20 多年来，广义度量空间理论仍在不断的发展壮大，产生不少活跃的空间类，同时也获得了他们丰富的映射定理。较全面地了解这些空间类的映射性质，从中寻找出存在的问题是很有必要的。本文主要做了下面四个方面的工作：

（1）精选 30 个广义度量性质或可数性质，在已发表的文献中查找他们关于 8 类映射的不变性或逆不变性。

（2）证明了有限到一闭映射保持及逆保持点 G_δ 性质，$\aleph_0$-snf 可数性质，弱拟第一可数性质，拟第一可数性质，csf 可数性质，snf 可数性质，gf 可数性质和 sof 可数性质等；证明了有限到一闭映射保持 g 第二可数空间，sn 第二可数空间，具有点可数 wcs^* 网的空间，sn 对称空间等拓扑性质。

（3）证明了映射保持序列可分性，商映射保持 k_R 空间性质，完备映射保持 c 半层空间性质，完备映射逆保持 $(\bmod k)$ 可度量性和拟 $(\bmod k)$ 可度量性。

（4）讨论有限到一闭映射定理在对称积的应用，给出例子说明本文所论空间关于确定映射的不保持性，同时也否定回答了林寿，沈荣鑫提出的几个映射问题。

关键词：商映射；闭映射；开映射；紧映射；有限到一映射；弱第一可数性；广义度量空间；对称积。

Abstract

Mappings and spaces are a huge and promising topic. For more than 20 years, the theory of generalized metric spaces has been growing and growing, producing many active spaces, and also obtaining their rich mapping theorems. It is necessary to understand the mapping properties of these spaces more comprehensively and find out the existing problems. The main results in this dissertation are the followings:

Firstly, we select 30 generalized metric properties or countable properties, and find out their invariance or inverse invariance on the 8-class mappings in the published literature.

Secondly, we mainly prove that point- G_δ properties, $\aleph_0$-snf -countability, weak quasi-first-countability, quasi-first-countability, csf -countability, snf -countability, gf -countability and sof -countability are invariant and inversely invariant under closed finite-to-one mappings. In addition, the closed finite-to-one mappings preserve g -second countable spaces, sn -second countable spaces, spaces with a point-countable wcs^* -network, sn -symmetric spaces, etc.

Thirdly, we prove that mappings preserve sequential separability, quotient mappings preserve k_R -sapces, perfect mappings preserve c -semi-stratifiable spaces, $(\mathrm{mod}\ k)$ -metrizable spaces and quasi- $(\mathrm{mod}\ k)$ -metrizable spaces are inversely invariant under perfect mappings.

Fourthly, we discuss the applications of the closed finite-to-one mappings in symmetric products. Finally, we give counterexamples to show that some topological properties are not preserved by determining mappings, which give negative answers to the mapping questions posed by Lin Shou and Shen Rongxin.

Keywords: quotient mappings ; closed mappings; open mappings; compact mappings; finite-to-one mappings; weakly first-countable properties; generalized metric spaces; symmetric products

目 录

第 1 章 引 言

1.1 研究现状

捷克斯洛伐克科学院（CAS）与国际数学联盟（IMU）于 1961 年在布拉格召开了第 1 届“一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系”的学术会议，简称布拉格拓扑学会议[1]。苏联科学院院士 P.S. Alexandroff（苏，1896-1982）在布拉格会议上作了关于拓扑空间及其连续映射的著名演讲，提出了用映射研究空间的设想[2]。1966 年 A.V. Arhangel'skiĭ[3] 发表了历史性的文献“映射与空间”，对如何实施 P.S. Alexandroff 设想给出了一系列建设性的具体步骤，开创了用映射研究空间的新纪元，成为一般拓扑学蓬勃发展的里程碑。

空间与映射的相互分类原则的意义在于用映射作为工具揭示各种拓扑空间类的内在规律，将映射作为纽带把五花八门的拓扑空间联结于一体。实践表明，这原则不仅仅给一般拓扑学中许多经典的课题灌输了新鲜血液，而且产生了众多新的研究方向，带来了 20 世纪 60 年代末期至整个 20 世纪 80 年代一般拓扑学的繁荣景象。此后，空间与映射的理论仍是一般拓扑学研究的重要课题[4]，林寿曾撰写“关于 Arhangel'skiĭ 的"映射与空间"”[5] 及“《空间与映射》50 年”[6] 综述了该方向对于一般拓扑学及集论拓扑学产生的持续推动作用。

依照 Alexandroff-Arhangel'skiĭ思想，用映射研究空间的主要内容是借助映射类建立度量空间类与具有特定拓扑性质的空间类之间的广泛联系，研究度量空间类在各类映射下像的内在特征以及特定的空间类被怎样的映射保持。实质问题是在各类映射作用下，哪些拓扑性质保持不变[3]?

自 20 世纪 60 年代以来，关于空间与映射的研究已获得大量的成就。一些最重要的结果已总结在各个时期的综述报告和论著中。1972 年, Michael[7] 关于五种商映射的全面描述，成为一般拓扑学继续向前发展的重要源泉之一。1977 年, Gittings[8] 关于三类开映射的研究，得到一些开映射类的相应结果。1980 年，Burke[9] 关于闭映射的综述报告进一步推动了广义度量空间与覆盖性质的映射定理的研究。1989 年，林寿[10] 综述了 110 个拓扑空间的映射性质的研究，主要讨论他们在商映射、闭映射，具有 Lindelöf 纤维的闭映射，完备映射，有限到一闭映射，开映射，开紧映射和有限到一开映射作用下

的不变性和逆不变性。但这些研究并不完整，仍有不少人们感兴趣的空间类的映射性质未见文献报道。

在一般拓扑学中，完备映射的性质被广泛研究，并且取得了丰硕的成果，如完备映射保持可度量性质[11]。有些重要的拓扑性质并不被完备映射所保持，如完备映射不保持 g 可度量性质[12]，但是有限到一的连续闭映射保持 g 可度量性质[12]。这突显了有限到一映射的重要性。

映射与空间是一个庞大而前景广阔的课题。近 20 多年来，广义度量空间理论仍在不断的发展壮大，产生不少活跃的空间类，同时也获得了他们丰富的映射定理。较全面地了解这些空间类的映射性质，从中寻找出存在的问题是很有必要的。为此，本人拟在文 [10] 研究的基础上，按文 [10] 的研究模式，精选 30 个广义度量性质与可数性质，讨论他们的一些映射定理。

1.2 预备知识

本文所论空间至少假定是 Hausdorff 空间。映射均指连续的满映射。

本节介绍一些记号和术语。

本文中如未特别说明，以 $\mathbb{R}$ 表示实直线，$\mathbb{N}$，$\mathbb{Q}$，$\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{I}$ 分别表示 $\mathbb{R}$ 的正整数子集、有理数子集、无理数子集和单位闭区间。ω_1 是第一个不可数序数。

对于空间 X，本文以 τ_X 或 τ 表示 X 上的拓扑。设 μ 是拓扑空间 X 的覆盖(集族)，对 $x \in X$，记 $\mathrm{st}(x, \mu) = \bigcup\{U \in \mu : x \in U\}$；对 $A \subset X$，记 $\mathrm{st}(A, \mu) = \bigcup\{U \in \mu : U \cap A \neq \varnothing\}$。若 x_n $(n \in \mathbb{N})$ 是 X 中的一列点，$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 表示 X 中的第 n 项为 x_n 的序列。

定义 1.2.1[13] 对于拓扑空间 X，Y 及映射 $f: X \to Y$。

（1）f 称为商映射，如果 $f^{-1}(V)$ 是 X 的开集，则 V 是 Y 的开集。

（2）f 称为伪开映射，如果对每一 $y \in Y$ 及 X 中的开集 U，若 $U \supset f^{-1}(y)$，则 $y \in \mathrm{Int} f(U)$。

（3）f 称为闭映射（开映射），如果 X 的任一闭（开）子集在 f 下的像是 Y 的闭

（开）子集。

（4）f 称为 L（紧，有限到一，可数到一）映射，如果对于 $y\in Y$， $f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf（紧，有限，可数）子空间。

（5） f 称为完备映射，若 f 是闭且紧的映射。

上述定义中的一些映射的基本关系见图 1.1。

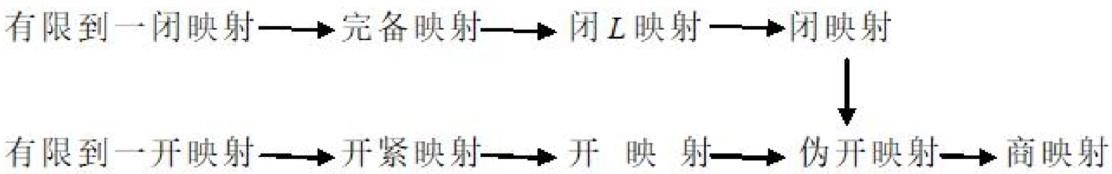

图 1.1 映射之间的关系

一些没有给出说明的定义与术语，读者可从 [11] 或 [13] 中查阅。

为了构造反例的方便，引用下面两个引理。

引理 1.2.2[10] 设 T 是一拓扑性质，并且度量空间具有性质 T。如果存在一个不具有性质 T 的第一可数空间，那么开映射不保持性质 T。

由此引理，我们可以找到不具有某拓扑性质的第一可数空间，进而得出开映射不保持相应的拓扑性质。

引理 1.2.3[10] 设 T 是一拓扑性质，并且由单点集所形成的空间具有性质 T。如果存在一个不具有性质 T 的紧（Lindelöf，有限）空间 X，那么性质 T 不是完备（闭 L，有限到一闭）且开映射逆保持的。

由此引理，可以找出反例来说明相应拓扑性质不是完备（闭 L，有限到一闭）且开映射逆保持的。

1.3 空间与映射

本文讨论涉及 30 个拓扑性质及 8 类映射的 12 种映像或逆映像。

30 个空间粗略分类：

（1） 可数性（3 个）： g 第二可数空间、sn 第二可数空间、序列可分空间。

（2） 似度量空间性质（6 个）： so 可度量空间、sn 可度量空间、k 可度量空间、k^* 可度量空间、$(\mathrm{mod}\, k)$ 可度量空间、拟 $(\mathrm{mod}\, k)$ 可度量空间。

（3）广义序列性质（7 个）：拟第一可数空间、弱拟第一可数空间、gf 可数空间、sof 可数空间、snf 可数空间、csf 可数空间、k_R 空间。

（4）点可数性质（5 个）：sharp 基、点可数弱基、点可数 cs 网、点可数 k 网、点可数 wcs^* 网。

（5）似 G_δ 性质（9 个）：g 可展空间、sn 对称空间、点 G_δ 性质、正则 G_δ 对角线、G_δ^* 对角线、拟 G_δ 对角线、c 半层空间、强 Σ^* 空间、$\sigma^\#$ 空间。

我们的讨论涉及 8 种映射类及其中的 4 种逆映射：

（1）映射（8 个）：有限到一开映射、开紧映射、开映射、有限到一闭映射、完备映射、闭 L 映射、闭映射、商映射；

（2）逆映射（4 个）：有限到一开逆映射、有限到一闭逆映射、完备逆映射、闭 L 逆映射。

由于大部分拓扑性质均不被开紧映射，开映射，闭映射或商映射的逆保持，所以本文不讨论 8 个映射类中其余的 4 个逆映射。通过查阅文献，我们认为有限到一闭映射的性质最值得我们探讨，其一，它具有比完备映射更好的性质，尤其在逆保持性质方面；其二，上述 30 个空间类中尚存不少涉及有限到一闭映射的问题；其三，在对称积的研究中涉及有限到一闭映射性质。在第 2 章中，我们证明有限到一闭映射保持及逆保持点 G_δ 性质，$\aleph_0$-snf 可数性质，csf 可数性质，弱拟第一可数性质，拟第一可数性质，snf 可数性质，gf 可数性质和 sof 可数性质；并且证明有限到一闭映射保持 g 第二可数空间，sn 第二可数空间，具有点可数 wcs^* 网的空间，sn 对称空间等拓扑性质。

一些拓扑性质能被弱于有限到一闭映射的映射所保持。在第 3 章中，我们讨论一些空间的商映射定理，得出映射保持序列可分性；商映射保持 k_R 空间性质；完备映射保持 c 半层空间性质；完备映射逆保持 $(\bmod k)$ 可度量性和拟 $(\bmod k)$ 可度量性等结果。

Good 和 Macías[14] 在探讨广义度量空间的对称积时指出了有限到一闭映射的应用。在此基础上，唐忠宝、林寿和林福财[15] 通过有限到一闭映射建立了两个关于对称积与拓扑性质的一般性定理，证明了某些拓扑性质的对称积定理。本文在第 4 章探讨第 2，

3 章中获得的有限到一闭映射定理在对称积中的应用，证明点 G_δ 性质，$\aleph_0$-snf 可数性质，弱拟第一可数性质，拟第一可数性质，具有点可数 wcs^* 网的空间性质，sn 对称空间性质，sn 第二可数空间性质，c 半层空间性质等也是 n 重对称积性质。最后，给出 11 个例子，涉及本文所讨论的空间与映射的性质 29 项，说明其关于确定映射的不保持性。

在第 5 章，我们总结了本文 30 个拓扑性质在相应映射作用下的不变性或逆不变性的结果。这对进一步完善空间与映射理论，发现存在问题，寻求其应用具有一定的作用。最后，对于本文尚未解决的 41 个映射问题选取 10 个问题作为今后的研究课题。

第 2 章 关于有限到一闭映射

关于有限到一闭映射是否保持或逆保持拓扑性质还有一些问题尚未解决[10]，如有限到一闭映射是否保持 ortho 紧性是一个未解决的经典问题[16]，其应用也有待进一步发现。本章主要讨论几个弱第一可数性之间的关系，研究下述与可数性相关的一些广义度量性质关于有限到一闭映射的保持及逆保持性质：点 G_δ 性质，$\aleph_0$-snf 可数性质，弱拟第一可数性质，拟第一可数性质，csf 可数性质，snf 可数性质，gf 可数性质和 sof 可数性质，并且证明有限到一闭映射保持下述拓扑性质：sn 第二可数空间，g 第二可数空间，具有点可数 wcs^* 网的空间，sn 对称空间。

2.1 引理

本节介绍几个弱第一可数性之间的关系，引用或证明几个辅助结果。为后节研究与可数性相关的一些广义度量性质关于有限到一闭映射的保持及逆保持性质做铺垫。

先回忆一些相关概念。

定义 2.1.1[17] 设 X 是拓扑空间。

(1) 对于 $P\subset X$，$x\in X$，若 X 中每一收敛于 x 的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是终于 P 的，即若序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x，则存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\{x\}\bigcup\{x_n:n\geq m\}\subset P$，则称 P 为点 x 的序列邻域。

(2) 对于 $P\subset X$，若 P 是 P 中每一点的序列邻域，则称 P 为 X 的序列开集；若 $X\setminus P$ 是 X 的序列开集，则称 P 为 X 的序列闭集。

(3) 若 X 的每一序列开集是 X 的开集，则称 X 是序列空间。

显然，P 是空间 X 的序列闭集当且仅当若由 P 中点组成的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x\in X$，则 $x\in P$。易验证：第一可数空间是序列空间；空间 X 是序列空间当且仅当 X 的每一序列闭集是 X 的闭集。

定义 2.1.2 设空间 X 的子集族 $\mu=\bigcup_{x\in X}\mu_x$ 满足：对于 $x\in X$，μ_x 是 x 在 X 中的网，即 $x\in\bigcap\mu_x$ 且若 $x\in G\in\tau_X$，则存在 $P\in\mu_x$ 使得 $P\subset G$；并且如果 U，$V\in\mu_x$，那么存在 $W\in\mu_x$ 使得 $W\subset U\bigcap V$。

(1) μ 称为 X 的 sn 网[18]，若每一 μ_x 的元是 x 在 X 中的序列邻域。

(2) μ 称为 X 的 so 网[18]，若每一 μ_x 的元是 X 的序列开集。

(3) μ 称为 X 的弱基[3]，若 $G \subset X$ 使得对于每一 $x \in G$ 存在 $P \in \mu_x$，有 $P \subset G$，那么 G 是 X 的开子集。

上述 μ_x 依次称为 x 的 sn 网，so 网和弱基。若每一 μ_x 是可数的，则 X 依次称为 snf 可数空间，sof 可数空间和 gf 可数空间[3, 19]。若 (1) 、(3) 中的 μ 均是可数的，则 X 分别称为 sn 第二可数空间，g 第二可数空间[4]。

定义 2.1.3 设 $\mu = \{P_x(n,m) \colon x \in X,\ n,\ m \in \mathbb{N}\}$ 是空间 X 的子集族，满足对任意 $x \in X$ 和 $n \in \mathbb{N}$，$\{P_x(n,\ m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的网。

(1) 空间 X 称为拟第一可数空间[20]，若 X 存在满足上述条件的集族 μ，使得对 X 的子集 A 和 $x \in A$，如果对每一 $n \in \mathbb{N}$，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $P_x(n,\ m) \subset A$，则 A 是 x 的邻域。

(2) 空间 X 称为弱拟第一可数空间[20]，若 X 存在满足上述条件的集族 μ，使得对 X 的子集 A，如果对每一 $x \in A$ 及 $n \in \mathbb{N}$，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $P_x(n,\ m) \subset A$，则 A 是 X 的开集。

(3) 空间 X 称为 $\aleph_0$-snf 可数空间[21]，若 X 存在满足上述条件的集族 μ，使得对 X 的子集 A，如果对每一 $x \in A$ 及 $n \in \mathbb{N}$，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $P_x(n,\ m) \subset A$，则 A 是 X 的序列开集。

定义 2.1.4 空间 X 称为 csf 可数空间[19]，若对于每一 $x \in X$ 存在 X 的子集的可数族 μ_x 满足：$x \in \bigcap \mu_x$，且若 $x \in U \in \tau_X$ 和 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 X 中收敛于 x 的序列，则存在 $P \in \mu_x$ 使得 $P \subset U$ 且序列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是终于 P 的。上述 μ_x 称为 x 在 X 中的可数 cs 网。

上述介绍的几个空间类之间的基本关系如下[21, 22]，这些空间也称为弱第一可数空间或广义序列性质：

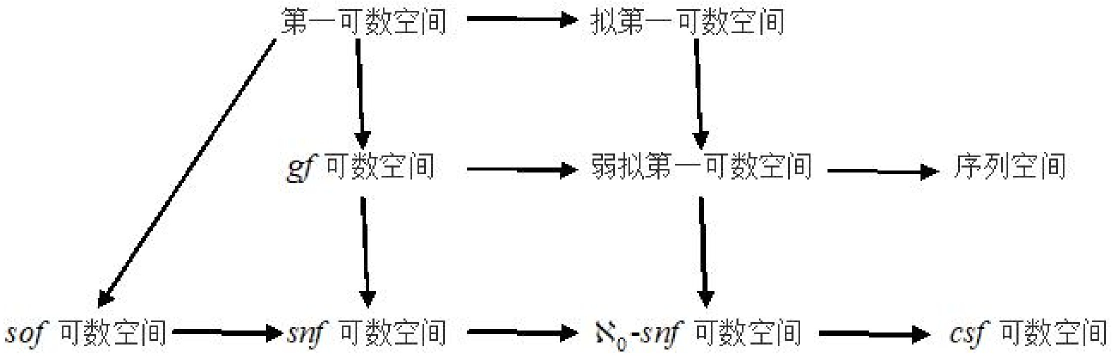

图 2.1 空间之间的关系（一）

本节进一步介绍上述所定义的弱第一可数性之间的关系，引用或证明几个辅助结果。

引理 2.1.5 对于空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是 $\aleph_0$-snf 可数空间。

(2) 对于每一 $x\in X$，存在 X 的子集族 $\mu_x=\left\{P_x\left(n,m\right):\ n,\ m\in\mathbb{N}\right\}$ 满足：

(2.1) 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，$\left\{P_x\left(n,\ m\right)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的网。

(2.2) 对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 及 $m_n\in\mathbb{N}$，集 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}P_x\left(n,\ m_n\right)$ 是 x 的序列邻域。

(3) 对于每一 $x\in X$，存在 X 的子集族 $\mu_x=\left\{P_x\left(n,\ m\right):\ n,\ m\in\mathbb{N}\right\}$ 满足：

(3.1) 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，$\left\{P_x\left(n,\ m\right)\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的网。

(3.2) 若 X 中的序列 $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x，则存在 $n\in\mathbb{N}$ 及 $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\left\{x_{k_m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $x_{k_m}\in P_x\left(n,\ m\right)$。

证明：$\left(1\right)\Rightarrow\left(3\right)$。设空间 X 的子集族 μ 满足定义 2.1.3(3)。对于每一 $x\in X$，令 $\mu_x=\left\{P_x\left(n,\ m\right):\ n,\ m\in\mathbb{N}\right\}$。只需证明 (3.2) 成立。设 X 中的序列 $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x。因为 μ 是 X 的网，不妨设所有的 $x_k\neq x$。置 $H=X\setminus\left\{x_k:\ k\in\mathbb{N}\right\}$。对于 H 中不同于 x 的点 z，由于 H 是 z 的邻域，若 $n\in\mathbb{N}$，则存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $P_x\left(n,\ m\right)\subset H$。因为 H 不是 X 的序列开集。由定义 2.1.3(3)，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得对于任意的 $m\in\mathbb{N}$ 有 $P_x\left(n,\ m\right)\not\subset H$，记 $T_m=P_x\left(n,\ m\right)\bigcap\left\{x_k:\ k\in\mathbb{N}\right\}$，那么 $T_m\neq\varnothing$。若某 T_{m_0} 是有限集，则存在 $m_1>m_0$ 使得

$P_x\left(n,m_1\right)\subset X\setminus T_{m_0}$，于是 $T_{m_1}=\varnothing$，矛盾。从而每一 T_m 为无限集。由此，存在序列 $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\left\{x_{k_m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $x_{k_m}\in P_x\left(n,m\right)$。

$\left(3\right)\Rightarrow\left(2\right)$。对于每一 $x\in X$，设 X 的子集族 $\mu_x=\left\{P_x\left(n,\ m\right):\ n,\ m\in\mathbb{N}\right\}$ 满足条件(3)。对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 及 $m_n\in\mathbb{N}$，令 $P=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}P_x\left(n,\ m_n\right)$。若 P 不是 x 的序列邻域，则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $x_k\notin P$。由(3.2)，存在 $n\in\mathbb{N}$ 及 $\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\left\{x_{k_m}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $x_{k_m}\in P_x\left(n,\ m\right)\subset P$，矛盾。因此 μ_x 满足(2)。

$\left(2\right)\Rightarrow\left(1\right)$。对于每一 $x\in X$，设 X 的子集族 $\mu_x=\left\{P_x\left(n,\ m\right):\ n,\ m\in\mathbb{N}\right\}$ 满足条件(2)。令 $\mu=\bigcup_{x\in X}\mu_x$。若 X 的子集 A 满足对任意 $x\in A$ 及 $n\in\mathbb{N}$，存在 $m_n\in\mathbb{N}$ 使得 $P_x\left(n,\ m_n\right)\subset A$，则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}P_x\left(n,\ m_n\right)\subset A$。由(2.2)，$A$ 是 x 的序列邻域，即 A 是其每一点的序列邻域，从而 A 是 X 的序列开集。故 X 是 $\aleph_0$-snf 可数空间。

引理 2.1.5 中的 $\left(1\right)\Rightarrow\left(2\right)$ 并不是显然的。林寿[23] 称定义 2.1.3(3) 的空间为具有可数扇数的序列网空间；王培、李忠民和刘士琴[24] 按引理 2.1.5 (3) 定义了 $\aleph_0$-sn 弱第一可数；林寿、葛英[21] 按引理 2.1.5 (2) 定义了 $\aleph_0$-snf 可数空间。在此，我们证明了这些定义是一致的。此外，对于引理 2.1.5 中的各 $P_x\left(n,m\right)$，变量 n 只要求可数性，变量 m 要求可数且有序性。

空间 X 称为 Fréchet 空间[17]，若 $A\subset X$ 且 $x\in\overline{A}$，则存在由 A 中点组成的序列使其收敛于 x。

引理 2.1.6[21, 23] (1) 空间 X 是弱拟第一可数空间当且仅当 X 是 $\aleph_0$-snf 可数的序列空间。

(2) 空间 X 是拟第一可数空间当且仅当 X 是 $\aleph_0$-snf 可数的 Fréchet 空间。

空间 X 称为 α_4 空间[16]，若 $x\in X$ 且每一 S_n $\left(\forall\ n\in\mathbb{N}\right)$ 是 X 中收敛于 x 的序列，则存在 X 中收敛于 x 的序列 S 使得 $\left\{n\in\mathbb{N}:\ S\bigcap S_n\neq\varnothing\right\}$ 是无限集。

引理 2.1.7[19] 空间 X 是 snf 可数空间当且仅当 X 是 csf 可数的 α_4 空间。

引理 2.1.8[18] 空间 X 是 gf 可数空间当且仅当 X 是 snf 可数的序列空间。

每一拓扑空间 $(X,\ \tau)$ 可重新定义下述拓扑 σ_τ：$O\in\sigma_\tau$ 当且仅当 O 是 $(X,\ \tau)$ 的序列开集[25, 26]。空间 $(X,\ \sigma_\tau)$ 称为 $(X,\ \sigma)$ 的序列余反射，简记为 σX。显然，σX 是序列空间，X 与 σX 有相同的收敛序列[26]。

引理 2.1.9 空间 X 是 sof 可数空间当且仅当 X 是 snf 可数空间且 σX 是 Fréchet 空间。

证明：对于每一 $A\subset X$，记 A 在 σX 中的闭包为 $\mathrm{cl}_{\sigma X}(A)$。

设 X 是 sof 可数空间。显然，X 是 snf 可数空间。设 $A\subset X$ 且 $x\in\mathrm{cl}_{\sigma X}(A)$。让 $\mu_x=\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中可数的 so 网。由于空间中任意两个序列开集的交仍是序列开集，不妨设每一 $P_{n+1}\subset P_n$。由于每一 P_n 是 x 在 σX 中的开邻域，于是存在 $x_n\in A\bigcap P_n$。下面证明在 σX 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x。设 U 是 x 在 σX 中的开邻域，则存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $P_m\subset U$。否则，存在 X 中的序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $z_n\in P_n\setminus U$。因为 μ_x 是 x 在 X 中递减的网，所以在 X 中序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x，而 U 是 x 在 X 中的序列邻域，从而序列 $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是终于 U 的，矛盾。设 $P_m\subset U$。当 $n>m$ 时，$x_n\in P_n\subset P_m\subset U$。这表明在 σX 中，集 A 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x。故 σX 是 Fréchet 空间。

反之，设 X 是 snf 可数空间且 σX 是 Fréchet 空间。对于每一 $x\in X$，让 $\mu_x=\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的 snf 网。对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $U_n=X\setminus\mathrm{cl}_{\sigma X}(X\setminus P_n)$，则 U_n 是 σX 的开集，从而 U_n 是 X 的序列开集且 $U_n\subset P_n$。若 $x\notin U_n$，即 $x\in\mathrm{cl}_{\sigma X}(X\setminus P_n)$，由于 σX 是 Fréchet 空间，存在 $X\setminus P_n$ 中的序列 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使其收敛于 x，这与 P_n 是 x 在 X 中的序列邻域相矛盾，所以 $x\in U_n$。因此 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的 so 网。故 X 是 sof 可数空间。

引理 2.1.10 设 $f: X \to Y$ 是有限到一的闭映射。若 T 是 X 中的序列且 $f(T)$ 是 Y 中的收敛序列，则序列 T 存在收敛的子序列。

证明： 记 $T=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。设 Y 中的序列 $f(T)=\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于某点 $y\in Y$。令 $K=\{y\}\bigcup\{f(x_n): n\in\mathbb{N}\}$，$L=f^{-1}(K)$。显然，$K$ 是 Y 的紧子集且 $T\subset L$。因为 f 是有限到一的闭映射，所以 L 是 X 的紧且可数的子集。由于具有可数网的紧空间是可度量化空间[13]，于是 L 是 X 的紧可度量化子空间。这时，L 中的序列 T 存在收敛的子序列。

对于拓扑空间 X，Y 及映射 $f: X\to Y$。称 f 是序列商映射[27]，若 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 Y 中的任意一个收敛序列，那么存在空间 X 中的收敛序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_{n_i})$ 且序列 $\{y_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个子序列。

引理 2.1.10 表明：有限到一的闭映射是序列商映射[15]。

由于闭映射是伪开映射，且伪开映射是商映射[13]，有下述引理：

引理 2.1.11[15,17,28] 有限到一的闭映射保持且逆保持序列空间性质，Fréchet 空间性质。

推论 2.1.12 设 $f: X\to Y$ 是有限到一的闭映射，则 σX 是 Fréchet 空间当且仅当 σY 是 Fréchet 空间。

证明： 记 $g: \sigma X\to\sigma Y$ 为 $g(x)=f(x)$，$\forall x\in X$。由引理 2.1.11，只需证明 g 是有限到一的闭映射。显然，g 是有限到一的。下面证明 g 是闭映射。设 F 是 σY 的闭集，即 F 是 Y 的序列闭集。由于 f 是连续的，易验证 $f^{-1}(F)$ 是 X 的序列闭集，于是 $g^{-1}(F)$ 是 σX 的闭集。这表明 g 是连续的。另一方面，设 A 是 σX 的闭集。如果 $f(A)$ 中的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 Y 中收敛于点 $y\in Y$。取定 A 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $y_n=f(x_n)$。由引理 2.1.10，X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在收敛的子序列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$。设在 X 中序列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x。由于 A 是 X 的序列闭集，所以 $x\in A$，于是 $y=f(x)\in f(A)$，从而 $f(A)$ 是 Y 的序列闭集，即 $g(A)$ 是 σY 的闭集。故 $g: \sigma X\to\sigma Y$ 是闭映射。

引理 2.1.13 有限到一闭映射保持且逆保持α_4空间性质。

证明：设$f: X\to Y$是有限到一的闭映射。先设X是α_4空间。令$y\in Y$且每一S_n $\left(\forall\ n\in\mathbb{N}\right)$是$Y$中收敛于$y$的序列。对于每一$n\in\mathbb{N}$，由引理 2.1.10，存在$X$中的收敛序列$T_n$使得$f\left(T_n\right)$是$S_n$的子序列，设$T_n$收敛于$t_n$，则$f\left(t_n\right)=y$。由于$f^{-1}\left(y\right)$是有限集，存在$x\in X$及序列$\left\{t_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$的子序列$\left\{t_{n_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$使得每一$t_{n_i}=x$。再由于$X$是$\alpha_4$空间，所以存在$X$中收敛于$x$的序列$T$使得$\left\{i\in\mathbb{N}:\ T\bigcap T_{n_i}\neq\varnothing\right\}$是无限集。这时，$f\left(T\right)$是$Y$中收敛于$y$的序列且$\left\{n\in\mathbb{N}: f\left(T\right)\bigcap S_n\neq\varnothing\right\}$是无限集。因此$Y$是$\alpha_4$空间。

反之，设Y是α_4空间。让$x\in X$且每一T_n $\left(\forall\ n\in\mathbb{N}\right)$是$X$中收敛于$x$的序列。由于$f$是有限到一映射且$X$是$T_2$空间，存在$x$在$X$中的邻域$V$使得$\overline{V}\cap f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=\left\{x\right\}$。对于每一$n\in\mathbb{N}$，不妨设$T_n\subset V$。显然，$f\left(T_n\right)$是$Y$中收敛于$f\left(x\right)$的序列。由于$Y$是$\alpha_4$空间，存在$Y$中收敛于点$f\left(x\right)$的序列$S$使得$\left\{n\in\mathbb{N}:\ S\bigcap f\left(T_n\right)\neq\varnothing\right\}$是无限集。记$S=\left\{y_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$。不妨设存在$x_k\in T_{n_k}$使得每一$y_k=f\left(x_k\right)$且$n_k<n_{k+1}$。由引理 2.1.10，存在序列$\left\{x_k\right\}_{k\in\mathbb{N}}$的子序列$\left\{x_{k_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$使其收敛于某点$z\in X$。这时，$z\in\overline{V}\cap f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=\left\{x\right\}$。令$T=\left\{x_{k_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$，则$T$是$X$中收敛于$x$的序列且$\left\{n\in\mathbb{N}:\ T\bigcap T_n\neq\varnothing\right\}$是无限集。故$X$是$\alpha_4$空间。

2.2 有限到一闭映射保持且逆保持定理

在 2.1 节的基础上，本节主要证明有限到一闭映射保持且逆保持下述拓扑性质：点G_δ性质，$\aleph_0$-*snf* 可数性质，弱拟第一可数性质，拟第一可数性质，*csf* 可数性质，*snf* 可数性质，*gf* 可数性质和 *sof* 可数性质。有些映射定理不必要求是有限到一闭映射，我们叙述了一些更一般的形式。

空间X称为具有点G_δ性质[13]，若X的每一单点集是X的G_δ集。

定理 2.2.1 有限到一伪开映射保持点 G_δ 性质。

证明： 设 $f: X \to Y$ 是有限到一伪开映射，其中空间 X 具有点 G_δ 性质。对于任意的 $y \in Y$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $f^{-1}(y)=\{x_1,\cdots,x_k\}$。对于每一 $i \le k$，存在 X 中递减的开集列 $\{U_{i,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_{in}=\{x_i\}$。由于 X 是 T_2 空间，不妨设 $\{U_{i,1}\}_{i\le k}$ 互不相交。对于每一 $n \in \mathbb{N}$，令 $U_n=\bigcup_{i\le k} U_{i,n}$，则 $f^{-1}(y)\subset U_n$ 且 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_n=\{x_1,\cdots,x_k\}=f^{-1}(y)$。由于 f 是伪开映射，存在 y 的开邻域 $V_n \subset f(U_n)$。下证 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n=\{y\}$。显然，$y\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$。对于任意的 $z\in Y\setminus\{y\}$，有 $f^{-1}(z)\bigcap f^{-1}(y)=\varnothing$，于是 $f^{-1}(z)\bigcap\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_n\right)=\varnothing$。这时，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $f^{-1}(z)=\{a_1,\cdots,a_m\}$，那么对于任意的 $j\le m$，有 $a_j\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$，于是存在 $n_j\in\mathbb{N}$ 使得 $a_j\notin U_{n_j}$。取 $l=\max_{j\le m}\{n_j\}\in\mathbb{N}$，则对于任意的 $j\le m$，有 $a_j\notin U_l$，从而 $f^{-1}(z)\bigcap U_l=\varnothing$，即 $z\notin f(U_l)\supset V_l$。因此 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n=\{y\}$。故 Y 具有点 G_δ 性质。

注 由于开映射和闭映射都是伪开映射，所以有限到一开（闭）映射保持点 G_δ 性质。

定理 2.2.2 有限到一映射逆保持点 G_δ 性质。

证明： 设 $f: X\to Y$ 是有限到一映射。设空间 Y 具有点 G_δ 性质。对于任意的 $x\in X$，因为 f 是有限到一映射且 X 是 T_2 空间，所以存在 X 的开集 U 使得 $U\cap f^{-1}(f(x))=\{x\}$。取 Y 中的开集列 $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{f(x)\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$。这时，

$$U\cap\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(O_n)\right)=U\cap f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n\right)=U\cap f^{-1}(f(x))=\{x\}。$$

因此空间 X 也具有点 G_δ 性质。

注 上述证明 X 只需是 T_1 空间。由定理 2.2.2，有限到一开（闭）映射逆保持点 G_δ 性质。

定理 2.2.3 有限到一闭映射保持且逆保持 $\aleph_0$-snf 可数空间。

证明： 文 [21, 定理 2.5] 已指出序列商的可数到一映射保持 $\aleph_0$-snf 可数空间。由

引理 2.1.10，有限到一的闭映射保持$\aleph_0$-*snf* 可数空间。

反之，设$f: X \to Y$是有限到一的闭映射，其中空间Y是$\aleph_0$-*snf* 可数空间。对于每一$y \in Y$，让$\mu_y = \left\{P_y\left(n, m\right): n, m \in \mathbb{N}\right\}$是空间$Y$中满足引理 2.1.5(2) 条件的集族。对于每一$x \in X$，由于f是有限到一映射，存在X中不交的开集U_1和U_2，使得$x \in U_1$且$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) \setminus \left\{x\right\} \subset U_2$。对于每一$n, m \in \mathbb{N}$，令$Q_x\left(n, m\right) = U_1 \cap f^{-1}\left(P_{f(x)}\left(n, m\right)\right)$。下面证明空间$X$的子集族$\gamma_x = \left\{Q_x\left(n, m\right): n, m \in \mathbb{N}\right\}$满足引理 2.1.5(2) 的要求，从而$X$是$\aleph_0$-*snf* 可数空间。

设$x \in X$和$n \in \mathbb{N}$。若$x \in U \in \tau_X$，则$f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) \subset \left(U_1 \cap U\right) \cup U_2$。由于$f$是闭映射，所以存在$f\left(x\right)$在$Y$的邻域$O$使得$f^{-1}\left(O\right) \subset \left(U_1 \cap U\right) \cup U_2$。因为$\left\{P_{f(x)}\left(n,m\right)\right\}_{m \in \mathbb{N}}$是$f\left(x\right)$在$Y$中的网，存在$m \in \mathbb{N}$使得$P_{f(x)}\left(n,m\right) \subset O$，所以$Q_x\left(n, m\right) = U_1 \cap f^{-1}\left(P_{f(x)}\left(n, m\right)\right) \subset U_1 \cap f^{-1}\left(O\right) \subset U$，从而$\left\{Q_x\left(n, m\right)\right\}_{m \in \mathbb{N}}$是$x$在$X$中递减的网。另一方面，对于每一$n, m_n \in \mathbb{N}$，如果集$Q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_x\left(n, m_n\right)$不是$x$在$X$中的序列邻域，则存在$X$中收敛于$x$的序列$\left\{x_k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$使得每一$x_k \notin Q$。这时$Y$中的序列$\left\{f\left(x_k\right)\right\}_{k \in \mathbb{N}}$收敛于$f\left(x\right)$。由于集$P = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_{f(x)}\left(n, m_n\right)$是$f\left(x\right)$在$Y$中的序列邻域，存在$k_0 \in \mathbb{N}$使得$x_{k_0} \in U_1$且$f\left(x_{k_0}\right) \in P$，于是$x_{k_0} \in U_1 \cap f^{-1}\left(P\right) = Q$，矛盾。因而$Q$是$x$的序列邻域。

由引理 2.1.6，定理 2.2.3 和引理 2.1.11，有下述两个推论。

推论 2.2.4 有限到一闭映射保持且逆保持弱拟第一可数空间。

推论 2.2.5 有限到一闭映射保持且逆保持拟第一可数空间。

定理 2.2.6 有限到一闭映射保持且逆保持*csf* 可数空间。

证明：文 [15, 引理 3.15] 已指出有限到一闭映射保持*csf* 可数空间。

反之，设$f: X \to Y$是有限到一的闭映射。设Y是*csf* 可数空间。对于任意的$x \in X$，由于Y是*csf* 可数空间，存在点$f\left(x\right)$在Y中的可数*cs* 网$\mu_{f(x)}$。由于f是有限到一映射，

存在 X 中不交的开集 U_1 和 U_2，使得 $x \in U_1$ 且 $f^{-1}\left(f(x)\right) \setminus \{x\} \subset U_2$。令 $\nu_x = \left\{U_1 \cap f^{-1}(P): P \in \mu_{f(x)}\right\}$，则 ν_x 是 x 在 X 中可数的 cs 网。事实上，设 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x \in V \in \tau_X$。由于 $f^{-1}\left(f(x)\right) \subset (U_1 \cap V) \cup U_2$ 及 f 是闭映射，存在 $f(x)$ 在 Y 中的邻域 O 使得 $f^{-1}(O) \subset (U_1 \cap V) \cup U_2$。因为在 Y 中序列 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $f(x) \in O$，所以存在 $P \in \mu_{f(x)}$ 使得 $P \subset O$ 且序列 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 终于 P。从而序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 终于 $U_1 \cap f^{-1}(P)$ 且 $U_1 \cap f^{-1}(P) \subset U_1 \cap f^{-1}(O) \subset V$。因此 X 是 csf 可数空间。

推论 2.2.7 有限到一闭映射保持且逆保持 snf 可数空间。

证明：由引理 2.1.7，snf 可数空间等价于 csf 可数的 α_4 空间。由定理 2.2.6 和引理 2.1.13，有限到一闭映射保持且逆保持 snf 可数空间。

对于拓扑空间 X，Y 及映射 $f: X \to Y$。称 f 是边缘紧映射[13]，若对每一 $y \in Y$，$\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集。

定理 2.2.8 有限到一商映射保持 gf 可数空间。

证明：先引用 gf 可数空间的一个等价刻画 [22, 推论 2.4.22]：空间 X 是 gf 可数空间当且仅当 X 是度量空间的商且边缘紧映像。

设 $f: X \to Y$ 是有限到一商映射，其中 X 是 gf 可数空间。下证 Y 是 gf 可数空间。由于 X 是 gf 可数空间，则存在度量空间 M 及商且边缘紧映射 $g: M \to X$。令 $h = f \circ g: M \to Y$。易证 h 是商映射且边缘紧映射 [29, 引理 1.4]。这表明空间 Y 是度量空间的商且边缘紧映射的映像，从而 Y 也是 gf 可数空间。

注 由于闭映射和开映射都是商映射，所以有限到一闭（开）映射保持 gf 可数空间。

推论 2.2.9 有限到一闭映射保持且逆保持 gf 可数空间。

证明：由定理 2.2.8，有限到一闭映射保持 gf 可数空间。由引理 2.1.8，gf 可数空

间等价于 snf 可数的序列空间。由推论 2.2.7 和引理 2.1.11，有限到一闭映射逆保持 gf 可数空间。

推论 2.2.10 有限到一闭映射保持且逆保持 sof 可数空间。

证明：由引理 2.1.9，空间 X 是 sof 可数空间当且仅当 X 是 snf 可数空间且 σX 是 Fréchet 空间。由推论 2.2.7 和推论 2.1.12，有限到一闭映射保持且逆保持 sof 可数空间。

2.3 有限到一闭映射保持定理

本节主要证明有限到一闭映射保持下述拓扑性质：sn 第二可数空间，g 第二可数空间，具有点可数 wcs^* 网的空间，sn 对称空间。

先回忆一些相关定义。

定义 2.3.1[30] 设 γ 是空间 X 的覆盖，γ 称为 X 的 wcs^* 网，如果 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中收敛于 x 的序列且 $x\in U\in\tau_X$，则存在 $P\in\gamma$ 和 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{x_{n_i}: i\in\mathbb{N}\}\subset P\subset U$。若 X 的每一点仅属于 γ 中的可数个元，则 γ 是 X 的点可数 wcs^* 网。

定义 2.3.2 对于集合 X，满足下述条件的函数 $d: X\times X\to[0,\infty)$ 称为 X 上的对称距离[3]：对于 $x, y\in X$，$d(x, y)=0$ 当且仅当 $x=y$；$d(x, y)=d(y, x)$。空间 X 称为 sn 对称空间[31]，若存在集合 X 上的对称距离 d 满足对于每一 $x\in X$，$\{B(x, 1/n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的 sn 网，其中每一 $B(x, \varepsilon)=\{y\in X: d(x, y)<\varepsilon\}$，$\varepsilon>0$。这时，简称 (X, d) 是 sn 对称空间。空间 (X, d) 称为对称空间，若 X 的子集 U 是 X 的开子集当且仅当对于每一 $x\in U$，存在 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x, \varepsilon)\subset U$。

显然，有限到一闭映射是完备映射。已知完备映射不保持 sn 第二可数空间、g 第二可数空间[4]。

定理 2.3.3 有限到一闭映射保持 sn 第二可数空间。

证明： 设 $f: X\to Y$ 是有限到一闭映射，其中 X 是 sn 第二可数空间，则 X 具有可数

sn 网性质。令 $\gamma=\bigcup_{x\in X}\gamma_x$，其中 γ 可数且每一 γ_x 是 x 的 sn 网。对于任意的 $y\in Y$，存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $f^{-1}(y)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$。令 $\varphi_y=\{f(\bigcup_{i\le k}P_i):\ P_i\in\gamma_{x_i},\ i\le k\}$，则 φ_y 是 y 的 sn 网。若不然，则存在 Y 中收敛于 y 的序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $y_n\notin f\left(\bigcup_{i\le n}P_i\right)$。由引理 2.1.10，$f$ 是序列商映射，则存在 X 中序列 $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使其收敛于 $z\in f^{-1}(y)$ 且 $y_{n_k}=f(z_k)$，$k\in\mathbb{N}$，存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,k\}$ 使得 $z=x_{i_0}$。由于 P_i 是 x_{i_0} 的序列邻域，则存在 $k_0\in\mathbb{N}$ 使得当 $k>k_0$ 时有 $z_k\in P_i\subset\bigcup_{i\le k}P_i$，则 $y_{n_k}=f(z_k)\in f\left(\bigcup_{i\le k}P_i\right)$ 与每一 $y_n\notin f\left(\bigcup_{i\le n}P_i\right)$ 矛盾。因此 $\varphi=\bigcup_{y\in Y}\varphi_y$ 是 Y 的可数 sn 网。从而 Y 是 sn 第二可数空间。

一个空间具有可数弱基当且仅当它是具有可数 sn 网的序列空间 [18, 引理 2.1]。我们知道有限到一闭映射保持序列空间性质 [32, 引理 3.2.1]，再由定理 2.3.3 知下述推论成立。

推论 2.3.4 有限到一闭映射保持 g 第二可数空间。

已知完备映射不保持具有点可数 wcs^* 网的空间[22]。

定理 2.3.5 有限到一闭映射保持具有点可数 wcs^* 网的空间性质。

证明： 设 $f:X\to Y$ 是有限到一闭映射，其中 X 具有点可数 wcs^* 网，下证 Y 具有点可数 wcs^* 网。设 μ 是 X 的点可数 wcs^* 网。令 $D=\{x_y:\ y\in Y\}$，其中取定每一 $x_y\in f^{-1}(y)$，再令 $\nu=\{f(D\cap P):\ P\in\mu\}$，那么 ν 是 Y 的点可数覆盖，往证它是 Y 的 wcs^* 网。设 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 中收敛于 y 的序列，且 U 是 y 的邻域。记 $x_n\in f^{-1}(y_n)\cap D$，不妨设所有的 $y_n\in U$。由引理 2.1.10，在 $f^{-1}(U)$ 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在收敛的子序列。这时存在 $P\in\mu$ 使得 P 含有 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列且 $P\subset f^{-1}(U)$，从而 $f(D\cap P)$ 含有 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子序列且 $f(D\cap P)\subset U$。因此 ν 是 Y 的 wcs^* 网。

定理 2.3.6 有限到一闭映射保持 sn 对称空间性质。

证明： 先引用 sn 对称空间的一个等价刻画[31]：空间 X 是 sn 对称空间当且仅当 X 具有点星 sn 网 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，即每一 μ_n 是 X 的覆盖且对每一 $x\in X$，$\{\mathrm{st}(x,\ \mu_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的 sn 网。

设 $f: X \to Y$ 是有限到一闭映射，其中 X 是 sn 对称空间，即 X 具有点星 sn 网 $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，不妨设每一 μ_{n+1} 加细 μ_n，令 $\nu_n = f(\mu_n)$，下证 $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 Y 的点星 sn 网。对任意的 $y\in Y$，先证明 $\{\mathrm{st}(y,\ \nu_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 y 的网。设 $y\in V\in\tau_Y$，存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $f^{-1}(y)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$，则每一 $x_i\in f^{-1}(V)$，因此存在 $n_i\in\mathbb{N}$，使得 $\mathrm{st}(x_i,\ \mu_{n_i})\subset f^{-1}(V)$。选取 $m=\max\{n_i:\ i\le k\}$，则 $\mathrm{st}(x_i,\ \mu_m)\subset f^{-1}(V)$，于是 $\mathrm{st}(f^{-1}(y),\ \mu_m)\subset f^{-1}(V)$，从而 $f(\mathrm{st}(f^{-1}(y),\ \mu_m))\subset V$，即 $\mathrm{st}(y,\ \nu_m)\subset V$。下面再证明对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，$\mathrm{st}(y,\ \nu_n)$ 是 y 的序列邻域。若不然，则存在 Y 中的序列 $\{y_i\}\to y$ 并且每一 $y_i\notin\mathrm{st}(y,\ \nu_n)$，由引理 2.1.10，$f$ 是序列商映射，则存在 X 中序列 $\{a_j\}\to x\in f^{-1}(y)$ 并且 $\{f(a_j)\}$ 是 $\{y_i\}$ 的子序列，则存在 $m\le k$，使 $a_j\to x_m\in f^{-1}(y)$，由于 $\mathrm{st}(x_m,\ \mu_n)$ 是 x_m 在 X 中的序列邻域，则存在 $j_0\in\mathbb{N}$，当 $j\ge j_0$，有 $a_j\in\mathrm{st}(x_m,\ \mu_n)$，从而 $f(a_j)\in\mathrm{st}(f(x_m), f(\mu_n))=\mathrm{st}(y,\ \nu_n)$，这与每一 $y_i\notin\mathrm{st}(y,\ \nu_n)$ 矛盾。

综上所述，Y 是 sn 对称空间。

第 3 章 关于商映射

本章继续关注所论空间的映射性质，我们的目的是讨论 5 类拓扑性质，即序列可分性、k_R 空间性质、c 半层空间性质、$(\bmod k)$ 可度量性和拟 $(\bmod k)$ 可度量性，在确定映射作用下的行为。主要涉及映射保持序列可分性，商映射保持 k_R 空间性质，完备映射保持 c 半层空间性质，完备映射逆保持 $(\bmod k)$ 可度量性和拟 $(\bmod k)$ 可度量性。

3.1 基本概念

先回忆一些相关概念。

定义 3.1.1[33] 空间 X 称为序列可分的，如果存在 X 的可数子集 D 使得对于每一 $x \in X$ 有 D 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中收敛于 x。这时 D 称为 X 的序列稠子集。

显然，序列可分空间是可分空间。

定义 3.1.2[34] 空间 X 称为 k_R 空间，若 X 是完全正则空间且函数 $f: X \to R$ 满足对于 X 的任意紧子集 K，$f|_K$ 是连续的，则 f 是连续的。

显然，完全正则的 k 空间是 k_R 空间。

定义 3.1.3[35] 空间 X 称为 c 半层空间，如果对于 X 的任一紧空间 K，对应 X 的开集列 $\{U_n(K)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：

(1) $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n(K)$；

(2) 若 F 是 X 中的紧子集，且 $K \subset F$，则每一 $U_n(K) \subset U_n(F)$。

定义 3.1.4[36] 空间 X 的集族 γ 称为 X 的 $(\bmod k)$ 基（拟 $(\bmod k)$ 基），如果存在 X 的紧（闭可数紧）覆盖 ς 及 X 的开子集族 β 满足：对于每一 $K \in \varsigma$ 及 X 的含 K 的开集 U，存在 $B \in \beta$ 使得 $K \subset B \subset U$。上述 β 称为关于 ς 的 $(\bmod k)$ 基（拟 $(\bmod k)$ 基）。具有 σ 局部有限 $(\bmod k)$ 基（拟 $(\bmod k)$ 基）的正则空间称为 $(\bmod k)$ 可度量空间（拟 $(\bmod k)$ 可度量空间）。

显然，度量空间是$(\bmod k)$可度量空间，$(\bmod k)$可度量空间是拟$(\bmod k)$可度量空间。

3.2 主要结果

本节主要讨论 3.1 节中所定义的 5 类拓扑性质，即序列可分性、k_R空间性质、c半层空间性质、$(\bmod k)$可度量性和拟$(\bmod k)$可度量性，在确定映射作用下的行为。

已知映射保持可分性。对于序列可分性，有类似的结果。

定理 3.2.1 映射保持序列可分性。

证明： 设$f: X \to Y$是映射，其中X具有可数的序列稠子集D。下证可数子集$f(D)$是拓扑空间Y的序列稠子集。对于每一$y \in Y$，因为$Y = f(X) = f(\overline{D})$，则存在$x \in \overline{D}$使得$f(x) = y$，从而存在序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$使得$x_n \to x$。因为$f$是连续映射，所以$Y$中的序列$f(x_n) \to f(x)$，而$f(x_n) \in f(D)$且$f(x) = y$。因此$f(D)$是$Y$的序列稠子集，则$Y$是序列可分空间。

定理 3.2.2 设$f: X \to Y$是商映射，其中X是k_R空间。若Y是完全正则空间，则Y是k_R空间。

证明： 设函数$g: Y \to R$满足对于空间Y的紧子集K，$g|_K$连续。下面证明g连续。由于f是商映射，只需证明$g \circ f: X \to R$连续。若L是空间X的紧子集，则$f(L)$是空间Y的紧子集，于是$g|_{f(L)}: f(L) \to R$连续，从而$g \circ f|_L: L \to R$连续。由于X是k_R空间，所以$g \circ f: X \to R$连续，故g连续。因此Y是k_R空间。

定理 3.2.3 完备映射保持c半层空间性质。

证明： 设$f: X \to Y$是完备映射，其中X是c半层空间，下证Y是c半层空间。对于Y中任意的紧子集K，由于f是完备映射，所以$f^{-1}(K)$是X的紧子集。由X是c半层空间，则对应X的开集列$\left\{U_n\left(f^{-1}(K)\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$满足定义 3.1.3 的条件。不妨设每一

$U_{n+1}\left(f^{-1}(K)\right) \subset U_n\left(f^{-1}(K)\right)$。令 $G_n(K)=Y \setminus f\left(X \setminus U_n\left(f^{-1}(K)\right)\right)$。下证 K 对应 Y 的开集列 $\left\{G_n(K)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足定义 3.1.3 的条件。

首先由 X 是 c 半层空间，我们得到 $f^{-1}(K)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\left(f^{-1}(K)\right)$。则

$$K=Y \setminus f\left(X \setminus f^{-1}(K)\right)=Y \setminus f\left(X \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\left(f^{-1}(K)\right)\right)=Y \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f\left(X \setminus U_n\left(f^{-1}(K)\right)\right)$$
$$=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(Y \setminus f\left(X \setminus U_n\left(f^{-1}(K)\right)\right)\right)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n(K)。$$

其次若 F 是 Y 中的紧子集，且 $K \subset F$，则 $U_{n+1}\left(f^{-1}(K)\right) \subset U_n\left(f^{-1}(F)\right)$，从而 $G_n(K) \subset G_n(F)$。因此 Y 是 c 半层空间。

已知完备映射保持 $(\bmod k)$ 可度量性[4]。

定理 3.2.4 (1) 完备映射逆保持 $(\bmod k)$ 可度量性。

(2) 完备映射逆保持拟 $(\bmod k)$ 可度量性。

证明： 仅证明 (1)，可类似证明 (2) 成立。设 $f: X \to Y$ 是完备映射，其中正则空间 Y 关于 Y 的紧覆盖 ς 具有 σ 局部有限 $(\bmod k)$ 基 β。这时，X 是正则空间[10]。令 $\Re = f^{-1}(\varsigma)$，$\mu = f^{-1}(\beta)$，则 $\Re$ 是 X 的紧覆盖，μ 是 X 的 σ 局部有限的开集族。下证 μ 是关于 $\Re$ 的 $(\bmod k)$ 基。

对于任意的 $F \in \Re$，及 $F \subset U \in \tau_X$，存在 $C \in \varsigma$，使得 $F = f^{-1}(C) \subset U$。由于 f 是闭映射，存在 C 在 Y 中开邻域 V 得 $f^{-1}(V) \subset U$。因为 β 是 Y 的 $(\bmod k)$ 基，存在 $B \in \beta$ 使得 $C \subset B \subset V$，从而 $F = f^{-1}(C) \subset f^{-1}(B) \subset f^{-1}(V) \subset U$ 且 $f^{-1}(B) \in \mu$。因此 μ 是关于 $\Re$ 的 $(\bmod k)$ 基，从而 X 是 $(\bmod k)$ 可度量空间。

综上所述，完备映射逆保持 $(\bmod k)$ 可度量性。

第 4 章 应用及例子

本章由两部分内容组成，一是讨论有限到一闭映射定理在对称积的应用；二是给出例子说明我们所讨论的空间关于确定映射的不保持性，同时也否定回答林寿[10]，沈荣鑫[37] 提出的几个映射问题。

4.1 应用

最近，Good 和 Macías[14] 在讨论广义度量空间的对称积时指出了有限到一闭映射的应用。在此基础上，彭良雪、孙愿[38] 研究了满足某些广义度量性质的对称积性质。唐忠宝、林寿和林福财[15] 通过有限到一闭映射建立了两个关于对称积与拓扑性质的一般性定理，并且列举或证明了 68 个拓扑性质满足对称积定理。这表明了有限到一闭映射在探讨空间的映射性质中的独特作用，同时具有较广的应用前景。对称积性质与有限可积性质及有限到一闭映射性质密切相关[14, 15]。

定义 4.1.1[39] 对于拓扑空间$(X,\ \tau)$，2^X表示X的全体非空紧子集之族。对于$n\in\mathbb{N}$，令$\mu_n(X)=\{A\in 2^X:\ |A|\le n\}$。集合$2^X$赋予 Vietoris 拓扑（超空间拓扑），其基元形如：

$$\langle U_1,U_2,\cdots,U_k\rangle=\left\{A\in 2^X:\ A\subset\bigcup_{i\le k}U_i,\ A\bigcap U_i\ne\varnothing,\ i\in\{1,\cdots,k\}\right\},$$

其中$k\in\mathbb{N}$且每一U_i是X的开集。$\mu_n(X)$赋予2^X的子空间拓扑称为X的n重对称积。

有两种类型的n重对称积性质。一是n重对称积$\mu_n(X)$具有性质P当且仅当空间X具有性质P，已知csf可数空间，snf可数空间，sof可数空间等均具有这种n重对称积性质[15]；二是n重对称积$\mu_n(X)$具有性质P当且仅当积空间X^n具有性质P，已知gf可数空间等具有这种n重对称积性质[15]。本节将证明下述性质也是n重对称积性质：点G_δ性质，$\aleph_0$-snf可数性质，弱拟第一可数性质，拟第一可数性质，具有点可数wcs^*网的空间性质，sn对称空间性质，sn第二可数空间性质，c半层空间性质。

下述引理表明了有限到一闭映射与n重对称积之间的联系。

引理 4.1.2[14] 对于空间 X 及 $n\in\mathbb{N}$，$f_n: X^n\to\mu_n(X)$ 是有限到一闭映射，其中 $f_n: X^n\to\mu_n(X)$ 定义为 $f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

先证明几个有限可积性的结果。

引理 4.1.3 $\aleph_0$-snf 可数性质是有限可积性。

证明：设 $k\in\mathbb{N}$ 且 $\{X_i: i\in\{1,2,\cdots,k\}\}$ 是 $\aleph_0$-snf 可数空间集。记 $X=\prod_{i\le k}X_i$。对于每一 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in X$ 及 $i\le k$，由于 X_i 是 $\aleph_0$-snf 可数空间，让 $\upsilon_{x_i}=\{P_{x_i}(n,m): n,m\in\mathbb{N}\}$ 是空间 X_i 的满足引理 2.1.5(3) 要求的子集族。对于每一 $n=(n_1,n_2,\cdots,n_k)\in\mathbb{N}^k$ 及 $m\in\mathbb{N}$，令 $P_x(n,m)=\prod_{i\le k}P_{x_i}(n_i,m)$。下面证明 X 的集族 $\upsilon_x=\{P_x(n,m): n\in\mathbb{N}^k, m\in\mathbb{N}\}$ 在 x 处满足引理 2.1.5 (3) 的要求。首先，$\mathbb{N}^k$ 是可数的。对于任意的 $n=(n_1,n_2,\cdots,n_k)\in\mathbb{N}^k$，显然，$\{P_x(n,m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 关于 $m\in\mathbb{N}$ 是递减的。设 U 是 x 在 X 中的邻域，则存在每一 X_i 的开集 U_i 使得 $x\in\prod_{i\le k}U_i\subset U$。对于每一 $i\le k$，由于 $\{P_{x_i}(n_i,m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 x_i 在 X_i 中的网，存在 $m_i\in\mathbb{N}$ 使得 $P_{x_i}(n_i,m_i)\subset U_i$。令 $m=\max\{m_i: i\le k\}$，则 $P_x(n,m)\subset\prod_{i\le k}P_{x_i}(n_i,m_i)\subset\prod_{i\le k}U_i\subset U$。这表明 $\{P_x(n,m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的网。另一方面，设 X 中的序列 $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x\in X$，其中每一 $x(j)=(x_1(j),x_2(j),\cdots,x_k(j))$，则对于每一 $i\le k$，在 X_i 中序列 $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x_i，由引理 2.1.5 的条件 (3.2)，存在 $n_i\in\mathbb{N}$ 及序列 $\{x_i(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\{x_i(j_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 使得每一 $x_i(j_m)\in P_{x_i}(n_i,m)$。不妨设序列 $\{j_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 与 i 是无关的。令 $n=(n_1,n_2,\cdots,n_k)\in\mathbb{N}^k$，则序列 $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 的子序列 $\{x(j_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 满足每一 $x(j_m)\in P_x(n,m)$。由引理 2.1.5，X 是 $\aleph_0$-snf 可数空间。

引理 4.1.4 点可数 wcs^* 网具有有限可积性。

证明： 设 $k\in\mathbb{N}$ 且 $\{X_i: i\in\{1,2,\cdots,k\}\}$ 是具有点可数 wcs^* 网的空间族。记 $X=\prod_{i\le k}X_i$。设 μ_i 是 X_i 的点可数 wcs^* 网。令 $\mu=\{\prod_{i\le k}P_i: P_i\in\mu_i\}$。显然，$\mu$ 是点可数

的。下证 μ 是 X 的 wcs^* 网。

对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in X$ 及 x 在 X 中的任意开邻域 W，存在 $U=\prod_{i\le k}U_i$ 使得 $x\in U\subset W$，其中每一 U_i 是 X_i 中的开集且 $x_i\in U_i$。设 X 中的序列 $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x\in X$，其中每一 $x(j)=(x_1(j),\, x_2(j),\cdots,\, x_k(j))$，则对于每一 $i\le k$，序列 $\{x_i(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x_i。因 μ_1 是 X_1 的 wcs^* 网，则存在 $\mathbb{N}$ 的子列 $\mathbb{N}_1$ 及 $P_1\in\mu_1$ 使得 $\{x_1(j)\}_{j\in\mathbb{N}_1}\subset P_1\subset U_1$。又因为 $\{x_2(j)\}_{j\in\mathbb{N}_1}$ 收敛于 x_2，并且 μ_2 是 X_2 的 wcs^* 网，则存在 $\mathbb{N}_1$ 的子列 $\mathbb{N}_2$ 及 $P_2\in\mu_2$ 使得 $\{x_2(j)\}_{j\in\mathbb{N}_2}\subset P_2\subset U_2$。以此类推，存在子列 $\mathbb{N}_k\subset\mathbb{N}_{k-1}\subset\cdots\subset\mathbb{N}_1\subset\mathbb{N}$ 及 $P_k\in\mu_k$ 使得 $\{x_k(j)\}_{j\in\mathbb{N}_i}\subset P_k\subset U_k$。因此 $\{x(j)\}_{j\in\mathbb{N}_k}\subset\prod_{i\le k}P_i\subset\prod_{i\le k}U_i=U\subset W$。故 X 具有点可数 wcs^* 网。

引理 4.1.5 sn 对称空间具有有限可积性。

证明: 设 $k\in\mathbb{N}$ 且 $\{X_i: i\in\{1,2,\cdots,k\}\}$ 是 sn 对称空间族，让 d_i 是 X_i 上的对称距离，使得对于任意的 $x_i\in X_i$，$\{B_{d_i}(x_i,\, 1/n):\, n\in\mathbb{N}\}$ 是 x_i 在 X_i 中的 sn 网。令 $X=\prod_{i\le k}X_i$。对于 X 中任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 及 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)$，定义 $d(x,\, y)=d_1(x_1,\, y_1)+\cdots+d_k(x_k,\, y_k)$。显然，$d$ 是 X 上的对称距离。下证 $(X,\, d)$ 是 sn 对称空间。

对于任意的 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in X$，令 $\beta_x=\{B_d(x,\, 1/n):\, n\in\mathbb{N}\}$，则 β_x 就是 x 在 X 中的 sn 网。事实上，对于 x 在 X 中的任意邻域 W，存在 $U=\prod_{i\le k}U_i$ 使得 $x\in U\subset W$，其中每一 U_i 是 X_i 中的开集且 $x_i\in U_i$。因 $(X_i,\, d_i)$ 是 sn 对称空间，则存在 $n_i\in\mathbb{N}$ 使得 $B_{d_i}(x_i,1/n_i)\subset U_i$。取 $n=\max\{n_i:\, i\le k\}$。若 $y\in B_d(x,\, 1/n)$，则 $d_i(x_i,\, y_i)\le d(x,\, y)<1/n\le 1/n_i$，于是 $y_i\in B_{d_i}(x_i,\, 1/n_i)$，从而 $B_d(x,\, 1/n)\subset\prod_{i\le k}B_{d_i}(x_i,\, 1/n_i)\subset\prod_{i\le k}U_i\subset W$。因此 β_x 是 x 在 X 中的网。另一方面，需要证明对于任意的 $n\in\mathbb{N}$，$B_d(x,\, 1/n)$ 是 x 在 X 中的序列邻域。若 $y\in\prod_{i\le k}B_{d_i}(x_i,\, 1/(kn))$，则 $d(x,\, y)=d_1(x_1,\, y_1)+\cdots+d_k(x_k,\, y_k)<k/(kn)=1/n$，从而

$y \in B_d(x, 1/n)$，于是$\prod_{i\le k} B_{d_i}(x_i, 1/(kn)) \subset B_d(x, 1/n)$。由于每一$B_{d_i}(x_i, 1/n)$是$x_i$在$X_i$中的序列邻域，所以$\prod_{i\le k} B_{d_i}(x_i, 1/n_i)$是$x$在$X$中的序列邻域，于是$B_d(x, 1/n)$是$x$在$X$中的序列邻域。因此$X$是$sn$对称空间。

引理 4.1.6 sn第二可数空间具有有限可积性。

证明： 设$k \in \mathbb{N}$且$\{X_i : i \in \{1,2,\cdots,k\}\}$是具有可数$sn$网的空间族。设$\mu_i = \bigcup\limits_{x_i \in X_i} \mu_{x_i}$是$X_i$的可数$sn$网，其中每一$\mu_{x_i}$是$x_i$在$X_i$中的$sn$网。记$X = \prod_{i\le k} X_i$。对于任意的$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in X$，令$\mu = \bigcup\limits_{x \in X} \mu_x$，其中$\mu_x = \left\{\prod_{i\le k} P_i : P_i \in \mu_{x_i}\right\}$。显然，$\mu$是可数的。下证$\mu$是$X$的$sn$网。

对于每一$x \in X$及x的任意开邻域U，不妨设$U = \prod_{i\le k} U_i$，其中每一U_i是X_i中的开集且$x_i \in U_i$。因μ_{x_i}是x_i在X_i中的sn网，则存在$P_i \in \mu_{x_i}$使得$x_i \in P_i \subset U_i$，则$\prod_{i\le k} P_i \in \mu_x$且$x \in \prod_{i\le k} P_i \subset U$。因此$\mu_x$是$x$在$X$中的网。下证对于任意的$P \in \mu_x$，$P$是$x$在$X$中的序列邻域。对于$X$中任意收敛于$x \in X$的序列$\{x(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$，其中每一$x(j) = (x_1(j), x_2(j), \cdots, x_k(j))$，则对于每一$i \le k$，$\{x_i(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$收敛于$x_i$。因$P_i$是$x_i$的序列邻域，所以存在$j_i \in \mathbb{N}$使得$j > j_i$时$x_i(j) \in P_i$。取$m = \max\{j_1, j_2, \cdots, j_k\}$，从而当$j > m$时有$x(j) \in \prod_{i\le k} P_i = P$。因此$\mu_x$是$x$在$X$中的$sn$网。

综上所知，μ是X的可数sn网。

引理 4.1.7[40] c半层空间是可数可积性质。

定理 4.1.8 设X是拓扑空间且$n \in \mathbb{N}$，则空间X具有点G_δ性质（或$\aleph_0$-snf可数性质）当且仅当$\mu_n(X)$具有点G_δ性质（或$\aleph_0$-snf可数性质）。

证明： 显然，具有点G_δ性质是有限可积性和遗传性，所以空间X具有点G_δ性质当且仅当积空间X^n具有点G_δ性质。由引理 4.1.2 及定理 2.2.1 和定理 2.2.2，积空间X^n具有点G_δ性质当且仅当n重对称积$\mu_n(X)$具有点G_δ性质。

对于$\aleph_0$-snf 可数性质，利用引理 4.1.2，引理 4.1.3 和定理 2.2.3，可类似证明。

定理 4.1.9 设X是拓扑空间且$n\in\mathbb{N}$，则积空间X^n具有弱拟第一可数性质（或拟第一可数性质）当且仅当$\mu_n(X)$具有弱拟第一可数性质（或拟第一可数性质）。

证明： 利用引理 4.1.2，推论 2.2.4（或推论 2.2.5），积空间X^n具有弱拟第一可数性质（或拟第一可数性质）当且仅当$\mu_n(X)$具有弱拟第一可数性质（或拟第一可数性质）。

定理 4.1.10 设X是拓扑空间且$n\in\mathbb{N}$，则空间X具有点可数wcs^*网（或sn对称空间，sn第二可数空间，c半层空间）当且仅当$\mu_n(X)$具有点可数wcs^*网（或sn对称空间，sn第二可数空间，c半层空间）。

证明： 设空间X具有点可数wcs^*网，由引理 4.1.4，则X^n具有点可数wcs^*网，再由引理 4.1.2 及定理 2.3.5，则$\mu_n(X)$具有点可数wcs^*网。相反地，若$\mu_n(X)$具有点可数wcs^*网，易验证具有点可数wcs^*网性质是遗传性质，于是$\mu_n(X)$的子空间$\mu_1(X)$具有点可数wcs^*网。由于$\mu_1(X)$同胚于X，所以X具有点可数wcs^*网。

对于sn对称空间（sn第二可数空间），利用引理 4.1.2 和引理 4.1.5（引理 4.1.6）及定理 2.3.6（定理 2.3.3）可类似证明。

对于c半层空间，利用引理 4.1.2 和引理 4.1.7 及定理 3.2.3 可类似证明。

例 4.1.11 存在具有可数弱基的对称空间X，使得$\mu_2(X)$既不具有可数弱基，也不是对称空间。

令$Y=S_2\times(\mathrm{P}\cup\{0\})$，其中$S_2$是 Arens 空间 [11, 例 1.6.19]。这时空间Y不是序列空间 [4, 例 1.8.6]。再令$X=S_2\oplus(\mathrm{P}\cup\{0\})$。由于$S_2$和$\mathrm{P}\cup\{0\}$都是具有可数弱基的对称空间，于是$X$也是具有可数弱基的对称空间。又由于$Y$是$X^2$的闭子空间且序列空间性质是闭遗传性质，于是$X^2$不是序列空间。因为序列空间性质关于有限到一闭映射是逆保持性质[28]，由引理 4.1.2 知$f:X^2\to\mu_2(X)$是有限到一闭映射，所以$\mu_2(X)$不是序列空间。又因为具有可数弱基空间和对称空间都是序列空间，所以$\mu_2(X)$既不具有可数弱基，

也不是对称空间。

4.2 例子

本节用几个例子说明一些空间在确定映射作用下的行为。我们的例子也给林寿[10]，沈荣鑫[37] 提出的问题否定回答，见例 4.2.5 和例 4.2.8 的注。

为了叙述的简洁起见，图 4.1 [4, 22]、图 4.2 [22] 和图 4.3 [13] 列举出我们要利用的一些空间之间的主要关系。

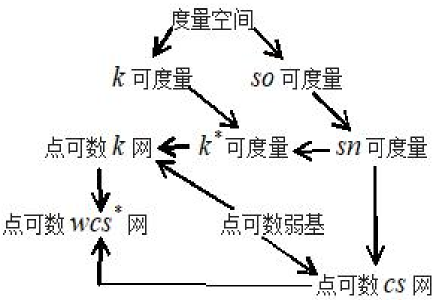

图 4.1 空间之间的关系（二）

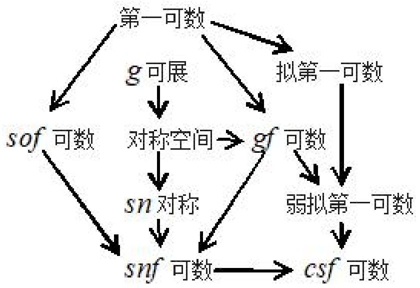

图 4.2 空间之间的关系（三）

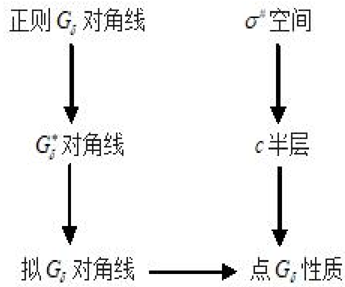

图 4.3 空间之间的关系（四）

例 4.2.1 有限到一开映射不能保持（A）中的任何拓扑性质。

（A）so 可度量空间(4)[1]，sn 可度量空间(5)，k 可度量空间(6)，k^* 可度量空间(7)，$(\bmod k)$可度量空间(8)，拟$(\bmod k)$可度量空间(9)。

由 [32，例 2.4.1]，存在度量空间M 及有限到一开映射 $f:M\to X$ ，使得X 是第一可数的σ 空间，但X 不是正规空间。由于度量空间具有（A）中的任何拓扑性质（见图 4.1 及 [4, 定义 3.7.1]），下面只需说明X 不具有（A）中的任何拓扑性质。

（a）X 不是k^* 可度量空间。

正则空间中k^* 可度量空间等价于具有σ 紧有限k 网的空间 [26, 定理 6.4]，而由[4, 定理 2.5.11]，若X 是具有σ 紧有限k 网的正则的 Fréchet 空间，则X 是 Lăsnev 空间，从而X 是正规空间。这与X 不是正规空间相矛盾，所以X 不是k^* 可度量空间。由图 4.1 知X 也不是k 可度量空间，so 可度量空间，sn 可度量空间。

[1] 为了便于查对，本节中拓扑性质后圆括号内的数字指第 5 章表 5.1 中空间的编号。

（b） X 不是拟$\left(\bmod k\right)$可度量空间。

若X是拟$\left(\bmod k\right)$可度量空间，由X是σ空间，则X是$\left(\bmod k\right)$可度量空间 [4，定理 3.7.5]，即仿紧p空间 [4，定理 3.7.2]，从而X是正规空间，这与X不是正规空间相矛盾，所以X不是拟$\left(\bmod k\right)$可度量空间，因此X也不是$\left(\bmod k\right)$可度量空间。

例 4.2.2 开紧映射不能保持（B）中的任何拓扑性质。

（B）弱拟第一可数空间(11)， gf 可数空间(12)， csf 可数空间(15)， sn 对称空间(24)。

由 [41，例 15]，存在度量空间的商至多二到一映像X及开紧映射 $f:X\to S_{\omega_1}$，其中S_{ω_1}是扇空间 [4，例 1.8.7]。这时，X是对称空间 [22，推论 3.2.8]，从而X具有（B）中任何拓扑性质（见图 4.2）。但S_{ω_1}不是csf 可数空间 [22，例 1.4.2(3)]，故开紧映射不能保持（B）中的任何拓扑性质。

例 4.2.3 开映射不能保持（C）中的任何拓扑性质。

（C）点可数弱基(19)，点可数cs网(20)。

显然，度量空间具有（C）中的任何拓扑性质，由引理 1.2.2，只需构造一个不具有（C）中任何拓扑性质的第一可数空间。[32，例 3.4.16] 构造了一个不具有点可数基的正则可展空间$\psi\left(\mathbb{N}\right)$。显然，$\psi\left(\mathbb{N}\right)$是第一可数空间。由于（C）中所列空间均具有点可数$wcs^*$网（见图 4.1），为证明开映射不能保持（C）中的任何拓扑性质，只需说明$\psi\left(\mathbb{N}\right)$不具有点可数$wcs^*$网。由 [22，推论 2.1.7(3)]，具有点可数wcs^*网的第一可数的正则空间具有点可数基，所以$\psi\left(\mathbb{N}\right)$不具有点可数$wcs^*$网。

例 4.2.4 开映射不能保持（D）中的任何拓扑性质。

（D） g第二可数空间(1)， sn第二可数空间(2)。

让$f:X\to S_\omega$是 [22，例 2.6.9(1)] 中的开映射，其中X具有g第二可数性质，S_ω是序列扇。我们知道序列扇S_ω不是snf 可数空间 [22，例 1.4.2]，从而S_ω不具有（D）

中的任何拓扑性质（见图 4.2）。而由于 X 具有（D）中的任何拓扑性质，所以开映射不能保持（D）中的任何拓扑性质。

例 4.2.5 有限到一闭映射逆不保持（E）中的任何拓扑性质。

（E）g 第二可数空间(1)，sn 第二可数空间(2)，序列可分空间(3)，sn 对称空间(24)，具有点可数 wcs^* 网的空间(22)，c 半层空间(28)。

对 $i=1,\ 2$，记 $C_i=\{x^2+y^2=i\}$。取 $X=C_1\cup C_2$，并赋予下述拓扑：对于 $z\in X$，若 $z\in C_2$，则 z 是 X 的孤立点；若 $z\in C_1$，则 z 在 X 中的邻域基元形如 $V_i\cup p\left(V_j\setminus\{z\}\right)$，其中 $j\in\mathbb{N}$，V_j 是 C_1 的中心在 z，弧长为 $1/j$ 的开圆弧，且映射 p：$C_1\to C_2$ 满足三点 0, x，$p(x)$ 成一直线。空间 X 称为 Alexandroff 双圆空间 [11, 例 3.1.26]，它是紧的第一可数空间。由于 C_2 是 X 的不可数的离散子空间，所以 X 不是可度量空间。由于具有点可数 wcs^* 网的正则的第一可数空间是具有点可数基的空间 [22, 推论 2.1.7]，而具有点可数基的紧空间是可度量化空间 [13, 定理 7.6.1]，故 X 不具有点可数 wcs^* 网。由于弱基是 sn 网[18]，而 sn 网是 wcs^* 网[18]，所以 X 也不具有可数 sn 网和可数弱基，即 X 不是 g 第二可数空间和 sn 第二可数空间。由于 C_2 是空间 X 的不可数的开离散子集，所以 X 不是可分空间，从而 X 也不是序列可分空间。由于半度量的紧空间是可度量化空间 [13, 推论 7.5.2 和定理 7.5.13]，所以 X 不是半度量空间。又由于第一可数的 sn 对称空间是半度量空间 [22, p. 122]，所以 X 不是 sn 对称空间。由于 c 半层的紧空间是可度量化空间[35]，所以 X 不是 c 半层空间。

让 $Y=C_1$ 具有欧几里得拓扑。定义 $f: X\to Y$ 是自然投射。易验证 f 是闭且二到一映射。由于 Y 是紧可度量空间，所以 Y 具有（E）中的任何拓扑性质。这表明有限到一闭映射逆不保持（E）中的任何拓扑性质。

注 文 [10] 讨论了 110 个拓扑性质关于有限到一闭映射的逆不变性，其中 CCC 性质，局部连通性质，perfect 性质[2]，可分性质，没有提供反例。下面说明例 4.2.5 就是一

[2] 拓扑空间 X 称为 perfect, 若 X 的每一开集是 X 的可数个闭子集的并集.

个恰当的例子。显然，空间Y是 CCC，局部连通，perfect，可分空间。易见，X不是 CCC 空间，不是局部连通空间，不是可分空间。由空间X的紧性，C_2的子集F是X的闭子集当且仅当F是有限集，所以X的开集C_2不是X的可数个闭子集的并，故X不是 perfect。以上说明有限到一闭映射逆不保持 CCC 性质，局部连通性质，perfect 性质，可分性质。

例 4.2.6 有限到一闭映射逆不保持（F）中的任何拓扑性质。

（F）so可度量空间(4)，sn可度量空间(5)，k可度量空间(6)，k^*可度量空间(7)，点可数弱基(19)，点可数cs网(20)，点可数k网(21)，g可展空间(23)，正则G_δ对角线(25)，G_δ^*对角线(26)，拟G_δ对角线(27)，$\sigma^\#$空间(30)。

让$f: X \to Y$是例 4.2.5 中构造的闭且二到一的映射，其中X是 Alexandroff 双圆空间，Y是单位圆周。于是Y具有（F）中任何拓扑性质。这时，X是不可度量的第一可数的紧空间。由于具有拟G_δ对角线的紧空间是可度量化空间（见 [4，定理 B.3.6]），所以X不具有拟G_δ对角线。例 4.2.5 已证明X不具有点可数wcs^*网，不是sn对称空间，也不是c半层空间。由图 4.1-4.3，X不具有（F）中的任何拓扑性质。

例 4.2.7 完备映射不能保持（G）中的任何拓扑性质。

（G）g第二可数空间(1)，sn第二可数空间(2)，gf可数空间(12)，snf可数空间(14)，g可展空间(23)，sn对称空间(24)。

让$f: S_2 \to S_\omega$是 [32，例 3.1.8] 中的完备映射，其中S_2是 Arens 空间，S_ω是序列扇。由于S_2是g第二可数的g可展空间 [22，例 1.4.1，推论 3.2.12]，所以S_2具有（G）中的任何拓扑性质（见图 4.2）。又由 [22，例 1.4.2] 知S_ω不是snf可数空间，所以S_ω不具有（G）中的任何拓扑性质（见图 4.2）。因此完备映射不能保持（G）中的任何拓扑性质。

例 4.2.8 完备映射不能保持（H）中的任何拓扑性质。

（H）拟第一可数空间(10)，sof 可数空间(13)，csf 可数空间(15)。

让$q: X \to Y$是 [32，例 3.2.11] 中的完备映射，其中X是蝶形空间，Y是非第一可数的强 Fréchet 空间。由于强 Fréchet 空间的csf 可数空间是第一可数空间 [21，定理 3.6]，从而Y不是csf 可数空间，因而Y既不是sof 可数空间也不是拟第一可数空间（见图 4.2）。因此完备映射不能保持（H）中的任何拓扑性质。

注 文 [37，问题 2.10] 问：完备映射能否保持拟第一可数空间？例 4.2.8 给出否定回答。

例 4.2.9 完备映射逆不保持（I）（J）中的任何拓扑性质。

（I）拟第一可数空间(10)，弱拟第一可数空间(11)，gf 可数空间(12)，sof 可数空间(13)，snf 可数空间(14)，csf 可数空间(15)，点G_δ性质(16)。

（J）强Σ^*空间(29)。

证 由引理 1.2.3，只需构造不具有（I）（J）中的任何拓扑性质的紧空间。让$A(\omega_1)=\omega_1 \cup \{\infty\}$是离散空间$\omega_1$的单点紧化，其中$\infty$是$A(\omega_1)$中非离散点。$A(\omega_1)$不是$csf$ 可数空间 [42，引理 4.1]。易验证，$A(\omega_1)$也不具有点G_δ性质。由图 4.2 知$A(\omega_1)$不具有（I）中的任何拓扑性质。

设X是 [4，例 3.2.36(3)] 给出的非Σ的强Σ^*空间。定义$f: X \times \mathrm{I} \to X$是投射。则$f$是完备映射 [4，命题 2.1.10]。若$X \times \mathrm{I}$是强$\Sigma^*$空间，由 [4，定理 3.2.33]，$X$是$\Sigma$空间，这与$X$不是$\Sigma$空间相矛盾，从而$X \times \mathrm{I}$不是强$\Sigma^*$空间。因此完备映射逆不保持强$\Sigma^*$空间。

例 4.2.10 闭L映射不能保持（K）（L）中的任何拓扑性质。

（K）so可度量空间(4)，k可度量空间(6)，$(\mathrm{mod}\, k)$可度量空间(8)，拟$(\mathrm{mod}\, k)$可度量空间(9)。

（L）拟G_δ对角线(27)，c半层空间(28)，$\sigma^\#$空间(30)。

让$\mathbb{R}$表示具有通常拓扑的实直线，$\mathbb{N}$是$\mathbb{R}$的由全体自然数构成的子空间，这时自然商映射$q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$是闭$L$映射。显然$\mathbb{R}$具有（K）中的拓扑性质且$\mathbb{R}/\mathbb{N}$是 Fréchet 空间，从而它是序列空间和$k$空间。由于$so$可度量的序列空间是度量空间 [43，结论 2.8]，所以$\mathbb{R}/\mathbb{N}$不是so可度量空间。又由于k可度量的k空间是度量空间（见 [26，定理 7.1]），故$\mathbb{R}/\mathbb{N}$不是k可度量空间。显然，$\mathbb{R}$是$(\bmod k)$可度量空间和拟$(\bmod k)$可度量空间。由于文 [10, 例 3]，$\mathbb{R}/\mathbb{N}$不是q空间，从而$\mathbb{R}/\mathbb{N}$不是拟$(\bmod k)$可度量空间[13]，所以$\mathbb{R}/\mathbb{N}$也不是$(\bmod k)$可度量空间。因此，闭L映射不保持$(\bmod k)$可度量空间和拟$(\bmod k)$可度量空间。

让X是关于无理数集$\mathbb{P}$的 Michael 直线 [4，例 3.3.25(1)]，这时有理数集$\mathbb{Q}$是X的闭集且自然商映射$f: X \to X/\mathbb{Q}$是闭L映射。由于$\mathbb{Q}$在X中不是G_δ集，所以$X/\mathbb{Q}$中的单点集$\{\mathbb{Q}\}$不是G_δ集，于是$X/\mathbb{Q}$不具有点G_δ性质。由图 4.3，闭L映射不能保持（L）中的任何拓扑性质。

例 4.2.11 闭L映射逆不保持（M）（N）中的任何拓扑性质。

（M）$(\bmod k)$可度量空间(8)，拟$(\bmod k)$可度量空间(9)。

（N）k_R空间(17)。

证 由引理 1.2.3，只需构造 Lindelöf 空间不具有（M）（N）中的任何拓扑性质。让X是 [13, 例 2.3.3] 的 Sorgenfrey 直线，则X是 Lindelöf 空间。由于X具有G_δ对角线，于是X的可数紧子集是紧的 [4, 定理 1.4.10]。若X是拟$(\bmod k)$可度量空间，则X是$(\bmod k)$可度量空间，从而X是仿紧 M 空间 [4, 定理 3.7.2]，于是X是可度量化空间 [4, 定理 2.2.12]，矛盾。因此，X不是拟$(\bmod k)$可度量空间，从而也不是$(\bmod k)$可度量空间。

让Y是 Michael 空间 [4, 例 1.8.8]，即$Y = \mathbb{N} \cup \{p\}$，其中$p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$，赋予$\beta\mathbb{N}$的子空间拓扑。则$Y$是正则的 Lindelöf 空间。令$D = \{0, 1\}$，赋予离散拓扑，定义$f: Y \to D$，

使得 $f(\mathbb{N})=\{0\}$ 且 $f(p)=1$。由于 $f^{-1}(1)=p$ 且 p 不是 Y 的孤立点，所以 f 不是连续映射。若 K 是 Y 的任意紧子集，则 K 是有限集，于是 $f|_K$: $K\to D$ 是连续的。这说明 Y 不是 k_R 空间。

第 5 章 总结与展望

本文讨论涉及 30 个拓扑性质关于 8 类映射的 12 种映像或逆映像的性质，圆满的答卷是获得 360 个映射性质。目前，我们已查阅文献中的结果或显然的结果有 129 个。本文已获得的结果或显然的结果有 190 个，其中包含 20 个映射保持或逆保持定理和 59 个说明拓扑性质不被确定映射保持或逆保持的反例。这些反例也否定了林寿[10]，沈荣鑫[37] 提出的几个映射问题。此外，尚有 41 个问题供我们查找或进一步讨论。

本章用表 5.1 列出 30 个拓扑性质在相应映射下的不变性或逆不变性。对表 5.1 中相关符号说明如下：

（1） ‘＋’表示相应映射保持或逆保持拓扑性质；‘－’表示相应映射不保持或逆不保持拓扑性质；？表示拓扑性质在相应映射作用下是否保持不变有待进一步讨论。

（2） [a] 表示 30 个拓扑性质的定义可查阅文献 a 或利用文献 a 可得出拓扑性质在相应映射作用下的行为。

（3） a.b 表示在本文第 a 章 b 节给予证明或例子说明。

（4） 若拓扑性质 c 预先假定满足分离公理 T_i（在空间第一栏中的圆括号内），那么原像空间和像空间都设满足分离公理 T_i，编号 21（点可数 k 网）中 3＋表示要求原像空间满足分离公理 T_3。

表 5.1：30 个拓扑性质的不变性或逆不变性

编号	映射 \ 空间	有限到一开 像	有限到一开 逆像	开紧 像	开 像	有限到一闭 像	有限到一闭 逆像	完备 像	完备 逆像	闭 L 像	闭 L 逆像	闭 像	商 像
1	g 第二可数 [4]	?	— [8]	?	— 4.2	+ 2.3	— 4.2	— 4.2	—	—	—	—	—
2	sn 第二可数 [22]	?	— [8]	?	— 4.2	+ 2.3	— 4.2	— 4.2	—	—	—	—	—
3	序列可分 [22]	+	?	+	+	+	— 4.2	+	—	+	—	+	+ 3.2
4	so 可度量（T_3）[43]	— 4.2	— [8]	—	—	+	— 4.2	+ [43]	—	— 4.2	—	—	—
5	sn 可度量（T_3）[22]	— 4.2	— [8]	—	—	+ [44]	— 4.2	— [44]	—	—	—	—	—
6	k 可度量（T_3）[26]	— 4.2	— [8]	—	—	+	— 4.2	+ [26]	—	— 4.2	—	—	—
7	k^* 可度量（T_3）[22]	— 4.2	— [8]	—	—	+	— 4.2	+	—	+ [45]	—	— [46]	—
8	$(\bmod k)$ 可度量 [4]	— 4.2	— [8]	—	—	+	+	+ [4]	+ 3.2	— 4.2	— 4.2	—	—
9	拟 $(\bmod k)$ 可度量 [4]	— 4.2	— [8]	—	—	?	+	?	+ 3.2	— 4.2	— 4.2	—	—
10	拟第一可数 [22]	+ [37]	— [8]	?	?	+ [37]	+ 2.2	— 4.2	— 4.2	—	—	—	—

编号	映射 / 空间	有限到一开		开紧	开	有限到一闭		完备		闭 L		闭	商
		像	逆像	像	像	像	逆像	像	逆像	像	逆像	像	像
11	弱拟第一可数 [22]	+ [37]	− [8]	− 4.2	−	+ [37]	+ 2.2	− [37]	− 4.2	−	−	−	−
12	gf 可数 [22]	+ 2.2	− [8]	− 4.2	−	+ [15]	+ 2.2	− 4.2	− 4.2	−	−	−	−
13	sof 可数 [22]	?	?	?	?	+ [15]	+ 2.2	− 4.2	− 4.2	−	−	−	−
14	snf 可数 [22]	?	?	− [4]	−	+ [15]	+ 2.2	− 4.2	− 4.2	−	−	−	−
15	csf 可数 [22]	?	?	− 4.2	−	+ [15]	+ 2.2	− 4.2	− 4.2	−	−	−	−
16	点 G_δ 性质 [22]	+ 2.2	+ 2.2	− [47]	−	+ 2.2	+ 2.2	− [48]	− 4.2	−	−	−	−
17	$k_R\left(T_{3\frac{1}{2}}\right)$ [34]	+	− [8]	+	+	+	?	+	?	+	− 4.2	+	+ 3.2
18	sharp 基 [4]	− [49]	− [49]	−	−	− [49]	− [49]	−	−	−	−	−	−
19	点可数弱基 [22]	?	− [8]	?	− 4.2	? [22]	− 4.2	− [22]	−	−	−	−	−
20	点可数 cs 网 [22]	?	− [8]	?	− 4.2	? [22]	− 4.2	− [22]	−	−	−	−	−

编号	映射 空间	有限到一开		开紧	开	有限到一闭		完备		闭 L		闭	商
		像	逆像	像	像	像	逆像	像	逆像	像	逆像	像	像
21	点可数 k 网 [22]	?	－ [8]	－ [50]	－	＋	－ 4.2	＋ [4]	－	3＋	－	－ [22]	－
22	点可数 wcs^* 网 [22]	?	－ [8]	－ [50]	－	＋ 2.3	－ 4.2	－ [22]	－	－	－	－	－
23	g 可展 [22]	?	－ [8]	－ [8]	－	?	－ 4.2	－ 4.2	－	－	－	－	－
24	sn 对称 [22]	?	?	－ 4.2	－	＋ 2.3	－ 4.2	－ 4.2	－	－	－	－	－
25	正则 G_δ 对角线 [13]	－ [51]	?	－	－	－ [52]	－ 4.2	－	－	－	－	－	－
26	G_δ^* 对角线 [13]	?	?	－ [8]	－	－ [52]	－ 4.2	－	－	－	－	－	－
27	拟 G_δ 对角线 [13]	＋ [53]	?	－ [47]	－	?	－ 4.2	?	－	－ 4.2	－	－	－
28	c 半层 [4]	?	?	－ [47]	－	＋	－ 4.2	＋ 3.2	－	－ 4.2	－	－	－
29	强 Σ^* [4]	－ [54]	－ [8]	－	－	＋	?	＋	－ 4.2	＋	－	＋ [4]	－
30	$\sigma^\#$ [4]	＋ [8]	? [8]	－ [55]	－	＋	－ 4.2	＋ [53]	－	－ 4.2	－	－ [4]	－

本文对于所讨论的 30 个拓扑性质做了较深入的分析与探讨，这对进一步完善空间

与映射理论，寻求其应用具有一定的作用，同时也发现了一些尚未解决的映射问题。我们选取下列 10 个问题作为今后的研究课题：

（1）有限到一开映射是否保持 g 第二可数空间？

（2）有限到一开映射是否保持 c 半层空间？

（3）有限到一开映射是否保持或逆保持 snf 可数空间？

（4）有限到一开映射是否保持或逆保持 csf 可数空间？

（5）开紧映射是否保持拟第一可数空间？

（6）有限到一闭映射是否保持具有点可数弱基的空间？

（7）有限到一闭映射是否保持 g 可展空间？

（8）完备映射是否保持拟 $(\mathrm{mod}\, k)$ 可度量空间？

（9）完备映射是否保持拟 G_δ 对角线？

（10）完备映射是否逆保持 k_R 空间？

参考文献

[1] General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra I (Proc 1st Topological Symp, Prague, 1961) [C], New York: Academic Press, 1962, pp. 5.

[2] Aleksandrov P S. On some results concerning topological spaces and their continuous mappings[C]. General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra I, New York: Academic Press, 1962, 41-54.

[3] Arhangel'skiĭ A V. Mappings and spaces [J]. Russian Math Surveys, 1966, 21: 115-162.

[4] Lin S, Yun Z Q. Generalized Metric Spaces and Mappings [M]. Beijing: Science Press, 2017.

[5] 林寿. 关于 Arhangel'skiĭ 的"映射与空间"[J]. 苏州大学学报(自然科学版), 1992, 8(4): 393-400; 1993, 9(1): 11-19.

[6] 林寿. 《空间与映射》50 年[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2017, 40(1): 133-142.

[7] Michael E A. A quintuple quotient quest [J]. General Topology Appl, 1972, 2: 91-138.

[8] Gittings R F. Open mapping theory [C]. Set-theoretic Topology (Paper, Inst Medicine and Math, Ohio Univ, Athens, 1975-1976), New York: Academic Press, 1977, 141-191.

[9] Burke D K. Closed mappings [C]. Surveys in General Topology, Academic Press, Inc, 1980, 1-32.

[10] 林寿. 关于空间和映射[J]. 苏州大学学报(自然科学版), 1989, 5(3): 313-326.

[11] Engelking R. General Topology (Revised and Completed Edition) [M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[12] 林寿. 关于 g-可度量空间[J]. 数学年刊, 1992, 13A(3): 403-409.

[13] 高国士. 拓扑空间论(第 2 版) [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[14] Good C, Macías S. Symmetric products of generalized metric spaces [J]. Topology Appl, 2016, 206: 93-114.

[15] Tang Z B, Lin S, Lin F C. Symmetric products and closed finite-to-one mappings [J]. Topology Appl, 2018, 234: 26-45.

[16] Nogura T. The product of $\langle \alpha_i \rangle$-spaces [J]. Topology Appl, 1985, 21(3): 251-259.

[17] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice [J]. Fund Math, 1965, 57(1): 107-115.

[18] 林寿. 关于序列覆盖 s 映射[J]. 数学进展, 1996, 25(6): 548-551.

[19] Lin S. A note on the Arens' space and sequential fan [J]. Topology Appl, 1997, 81(3): 185-196.

[20] Sirois-Dumais R. Quasi-and weakly quasi-first-countable spaces [J]. Topology Appl, 1980, 11(3): 223-230.

[21] 林寿, 葛英. csf 可数空间的注记[J]. 高校应用数学学报, 2017, 32(1): 79-86.

[22] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射(第 2 版) [M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[23] 林寿. 序列网与度量空间的序列商映像[J]. 数学学报, 1999, 42: 49-54.

[24] 王培, 李忠民, 刘士琴. 关于 $\aleph_0$-sn-度量空间[J]. 广西科学, 2010, 17(1): 32-35.

[25] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice II [J]. Fund Math, 1967, 61: 51-56.

[26] Banakh T O, Bagachev V I, Kolesnikov A V. k^*-Metrizable spaces and their applications [J]. J Math Sci, 2008, 155(4): 475-522.

[27] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings [J]. Czech Math J, 1976, 26(101): 174-182.

[28] 严力. 具有 Heine 性质空间的刻划[J]. 漳州师范学院学报(自然科学版), 2003, 16(4): 6-8.

[29] Lin F C, Lin S. On sequence-covering boundary compact maps of metric spaces [J]. Advances in Mathematics, 2010, 39(1): 71-78.

[30] Lin S, Tanaka Y. Point-countable k-networks, closed maps, and related results [J]. Topology Appl, 1994, 59(1): 79-86.

[31] Ge Y, Lin S. g-Metrizable spaces and the images of semi-metric spaces [J]. Czech Math J, 2007, 57(4): 1141-1149.

[32] 林寿. 度量空间与函数空间的拓扑[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[33] Davis S W. More on Cauchy conditions [J]. Topology Proc, 1984, 9: 31-36.

[34] Michael E. On k-spaces, k_R-spaces and $k(X)$ [J]. Pacific J math, 1973, 47(2): 487-498.

[35] Martin H. Metrizability of M-spaces [J]. Can J Math, 1973, 25: 840-841.

[36] Michael E A. On Nagami's Σ-spaces and some related matters [C]. Proc Washington State Univ Topological Conf, Washington State: Dept. of Math, Washington State University, 1970, 13-19.

[37] 沈荣鑫. 弱拟第一可数空间与映射[J]. 四川大学学报(自然科学版), 2010, 47(4): 693-696.

[38] Peng L X, Sun Y. A study on symmetric products of generalized metric spaces [J]. Topology Appl, 2017, 231: 411-429.

[39] Michael E. Topologies on spaces of subsets [J]. Trans Amer Math Soc, 1951, 71: 152-182.

[40] 彭良雪, 王丽霞. 关于 CSS 空间及相关结论[J]. 数学物理学报, 2010, 30(2): 358-363.

[41] 刘川. 关于点可数覆盖[J]. 数学研究与评论, 1996, 16(1): 121-124.

[42] Shen R X. On generalized metrizable properties in quasitopological groups [J]. Topology Appl, 2014, 173(3): 219-226.

[43] Ge X. On so-metrizable spaces [J]. Mat Vesnik, 2009, 61(3): 209-218.

[44] 葛英. 关于 sn 度量空间[J]. 数学学报, 2002, 45(2): 355-360.

[45] Liu C, Tanaka Y. Spaces having σ-compact-finite k-networks and related matters [J]. Topology Proc, 1996, 21: 173-200.

[46] Sakai M. Remarks on spaces with special type of k-networks [J]. Tsukuba J Math, 1997, 21(2): 443-448.

[47] 林寿. 关于开紧映射与 Arhangel'skiĭ的问题[J]. 数学年刊, 2006, 27A(5): 719-722.

[48] Vaughan J E. Spaces of countable and point-countable type [J]. Trans Amer Math Soc, 1970, 151: 341-351.

[49] Mou L, Ohta H. Sharp bases and mappings [J]. Houston J Math, 2005, 31(1): 227-238.

[50] Shibakov A. On spaces with point-countable k-networks and their mappings [J]. Serdica-Bulgaricae Math Pah, 1994, 20(1): 48-55.

[51] Chen H R, Lin S. A note on spaces with regular G_δ-diagonals [J]. J Math Research Exposition, 1999, 19(3): 546-548.

[52] Popov V. A perfect map need not preserve a G_δ-diagonal [J]. General Topology Appl, 1997, 7: 31-33.

[53] Xia S X. Mappings theorems on some generalized metric spaces [J]. Questions Answers in General Toplogy, 1988, 6: 107-115.

[54] 林寿. 关于 Σ^* 空间[J]. 辽宁师范大学学报(自然科学版), 1991, 14(3): 177-180, 184.

[55] Chaber J. More nondevelopable spaces in MOBI [J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 103(1): 307-313.

致　谢

在论文即将完成之际，我怀着感激之情向三年来一直帮助我、关心我的老师和朋友们表达我最真挚的谢意！首先感谢我的导师林寿教授，本学位论文从课题的选择到论文的撰写完成，林老师都给予了悉心的指导和亲切的关怀。林老师严肃的科学态度和严谨的治学精神，深深地感染和激励着我。他不仅在学业上给我以精心指导，还在思想和生活上给我以无微不至的关怀，在此谨向林老师致以诚挚的谢意和崇高的敬意！

同时，感谢李克典教授、林福财教授这三年来对我学习生涯的鼓励与支持，还有张静老师等拓扑讨论班的老师们，唐忠宝博士、刘鑫博士，他们在我写学术论文时给我提供了一系列可行性的建议。感谢林梦雷教授、黄韩亮副教授等领导及各位老师，在我研究生三年里，对我生活和学习上的关怀和帮助，谨此一并表达我的谢意。

感谢三年来在学习和生活上给我鼓励的同窗以及师弟师妹们，感谢你们给予我的友爱和帮助，你们的友谊为紧张的学习生活增添了许多快乐。难忘我们几年来在一起共度的学习时光和课堂上的有益讨论。

感谢我的家人，给予我接受研究生教育的机会，以及在精神上和在物质上的支持。最后，向所有曾经给予我关心和指导的老师，给予我支持和帮助的同学及朋友再次表示我最真挚的谢意！

攻读学位期间取得的科研成果

1、杨洁. 有限到一闭映射[J]. 闽南师范大学学报. 2017, 30(2): 1-7.

2、杨洁. 关于空间与映射的注记[J]. 广西师范学院学报. 2018, 35(1): 17-20.

3、杨洁, 林寿. The closed finite-to-one mappings and their applications[J]. 已投《高校应用数学学报》.

4、杨洁, 林寿. 关于空间和映射, II [J]. 已完成.