漳州师范学院

理学硕士学位论文

度量化定理与度量空间的紧覆盖序列覆盖映像

张 静

漳 州 师 范 学 院

二○一一年五月

学校代码：10402　　　　　　　　　　　　　　　学　　号：20008042001

分 类 号：　　　　　　　　　　　　　　　　　　密　　级：

漳州师范学院

理学硕士学位论文

度量化定理与度量空间的紧覆盖序列覆盖映像

学 位 申 请 人：张 静

指 导 教 师：林 寿教授

学 位 类 别：理学硕士

学 科 专 业：应用数学

授 予 单 位：漳州师范学院

答 辩 日 期：二〇一一年五月

CODE：10402 NO.：2008042001

U.D.C.: Classified Index:

A Dissertation for the Degree of M. Science

Metrizable theorems and compact-covering and sequence-covering images of metric spaces

Candidate	：	Zhang Jing
Supervisor	：	Prof. Lin Shou
Specialty	：	Applied Mathematics
Academic Degree Applied for	：	Master of Science
University	：	Zhangzhou Normal University
Date of Oral Examination	：	May，2011

学位论文原创性声明和版权使用授权书

漳 州 师 范 学 院

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：______________　　　　日期：____年____月____ 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权漳州师范学院可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密□，在______年解密后适用本授权书。

2、不保密□。

（请在以上相应方框内打“ √ ”）

作者签名：___________　　日期：____年____月____日

导师签名：___________　　日期：____年____月____日

摘 要

本文给出了 Frink 引理条件的等价刻画，并给出了有关度量化定理的两个经典结果的简化证明．之后主要探究了度量空间上的紧覆盖 1(或 2)序列覆盖映射的刻画，得到了每一紧子集可度量化且是 snf 可数空间的刻画，并肯定的回答了林寿教授提出的问题：对于每一个紧子集可度量化的第一可数空间，如何用度量空间的某一特定映像来刻画它们？借助 sn 网，获得了拓扑空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中有可数弱基的等价特征．通过引入 1-scc 和 scc 映射，主要得到了空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中有可数 sn 网当且仅当 X 是某一度量空间的 1-scc 映像．讨论了每一紧子集具有外弱基空间的性质, 推广了 Michael 和 Nagami 关于度量空间的紧覆盖、开映像的经典结果．

关键词：一致空间；一致结构；紧覆盖映射；弱基；1 序列覆盖映射；$sn\,(so)$网；snf 可数；外 sn 网；外弱基；商映射；1-scc 映射； scc 映射

Abstract

In this paper, we give the equivalent characterizations of the conditions of Frink's Lemma and prove two classical results about metrizable theorems. Then we discuss the characterizations of compact-covering and 1-sequence-covering (resp. 2-sequence-covering) images of metric spaces and obtain the characterizations of a snf -countable space in which every compact subset is metrizable. Also we give a positive answer to the following question posed by professor S. Lin: How to characterize the first countable spaces in which each compact subset is metrizable? Some equivalent conditions of a space in which each compact subset is metrizable and has a countable weak base in the space are obtained by means of sn -networks. By introducing the concept of 1-scc (resp. scc) map is, it is shown that X is a 1-scc (resp. scc) image of a metric space if and only if X is a space in which each compact subset is metrizable and has a countable sn -networks. The spaces in which each compact subset has a countable outer weak base are discussed, which generalize the classic result about compact-covering and open images of metric spaces by Michael and Nagami.

Keywords: uniform spaces; uniform structure; compact-covering maps; weak bases; 1-sequence-covering maps; sn (so)-networks; snf -countable spaces; outer snf -networks; outer weak bases; quotient maps; 1-scc -maps； scc -maps

目 录

中文摘要…………………………………………………………………………………I

英文摘要…………………………………………………………………………………III

第1章 引言……………………………………………………………………………1

1.1 研究现状……………………………………………………………………1

1.2 本文的主要结果……………………………………………………………3

第2章 Frink 引理的注记………………………………………………………………7

2.1 Frink 条件……………………………………………………………………7

2.2 应用 ……………………………………………………………………………9

第3章 度量空间的紧覆盖序列覆盖映像……………………………………………11

3.1 紧覆盖1序列覆盖映像………………………………………………………11

3.2 紧覆盖2序列覆盖映像………………………………………………………15

第4章 弱基与度量空间的紧覆盖映像………………………………………………23

4.1 紧子集具有可数外 sn 网的空间………………………………………………23

4.2 度量空间的紧覆盖映像………………………………………………………25

4.3 弱基 ……………………………………………………………………………29

参考文献…………………………………………………………………………………35

致谢………………………………………………………………………………………37

攻读学位期间取得的科研成果…………………………………………………………39

第 1 章 引 言

1.1 研究现状

直接建立度量化定理的困难之处在于拓扑空间中度量的构造．现代度量化定理的建立都利用一些熟知的构造方法产生新的度量化定理．其中，Frink 引理[7]是构造度量的有效途径之一． 在一些文献中［如：11]，利用了 Frink 引理中的减弱条件以产生与 Frink 引理相同的结论．这引起我们对于这类条件的兴趣，促使我们想找到这些条件之间的关系，完善 Gruenhage 论证伪度量存在性的细节．

映射作为工具建立各种拓扑空间之间的联系是一般拓扑学研究的重要课题之一．寻求度量空间在确定映射下的像空间的内在刻画，或把确定的空间表示为度量空间在某些连续映射下的像一直是许多拓扑学家的研究思路[如：16，24]．1973 年 Michael 和 Nagami 在文 [24]中通过引入外基的定义，得到了度量空间的紧覆盖开映像的刻画(定理 1.1.1)，且其中提出的“度量空间的商 s 映像是否是度量空间的紧覆盖的商 s 映像”的问题被列为一般拓扑学的重要问题[25]， 至 2003 年才通过集论假设给予否定回答[5]．

开映射是伪开映射，伪开映射是商映射[18]，第一可数空间上的开映射是 2 序列覆盖映射[16]．关于度量空间的紧覆盖序列覆盖映像方面主要的一些相关结果如下：

定理 1.1.1[24] 对于 T_2 空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是度量空间的紧覆盖的开映像；

(2) X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数邻域基；

(3) X 的每一紧子集在 X 中具有可数外基．

它建立了紧子集具有可数邻域基空间与度量空间的紧覆盖的开映像之间的精确关系．

定理 1.1.2[24] 对 T_2 拓扑空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是度量空间的开 s 像；

(2) X 是度量空间的紧覆盖开 s 映像；

(3) X 具有点可数基.

定理 1.1.3[24] 拓扑空间 X 是可度量化空间的紧覆盖的商(伪开)映像当且仅当 X 是每一紧子集可度量化的序列(Fréchet)空间.

定理 1.1.4[16] (1) 拓扑空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是可度量化空间的 1 序列覆盖的商 s 映像.

(2) 拓扑空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是可度量化空间的 2 序列覆盖的商 s 映像.

由定理 1.1.1 的结果很容易看出可度量化空间的紧覆盖开映像是每一紧子集可度量化的第一可数空间，然而它的逆并不成立[24]. 于是林寿教授提出了下列问题[19，问题 2.6.5].

问题 1.1.5 对于每一个紧子集可度量化的第一可数空间，如何用度量空间的某一特定映像来刻画它们？

2 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 1 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列覆盖映射[16]. 林寿教授在[20]中研究了度量空间的 1(或 2)序列覆盖映像的刻画. 这使我们很自然的想到以下问题.

问题 1.1.6 对于拓扑空间 X，若 X 是可度量化空间的紧覆盖 1 序列覆盖的映像，那么如何刻画 X？是否 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网？

如果回答是否定的，那么如何刻画每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网的空间？关于可度量化空间的紧覆盖 2 序列覆盖的映像当然有同样的问题. 而度量空间上的开映射是 1 序列覆盖映射的商映射[16]. 这自然地又可以提出下述三个问题.

问题 1.1.7 如何用度量空间的映像刻画每一紧子集可度量化且在整个空间中具有可数弱基的空间?

问题 1.1.8 对于拓扑空间 X，X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数弱基是否等价于 X 的每一紧子集在 X 中具有可数外弱基？

问题 1.1.9 度量空间的 1 序列覆盖、紧覆盖、商映像是否刻画每一紧子集可度量化且在整个空间中具有可数弱基的空间？

1.2 本文的主要结果

本文第 2 章给出 Frink 条件的一些等价刻画完善了 Gruenhage[11]伪度量存在性的证明， 同时应用于简化度量化定理的证明． 第 3 章主要回答了引言中的问题 1.1.5 和问题 1.1.6，之后给出一些例子说明了一些不蕴含关系，进一步说明了我们得到的结果是不平凡的．第 4 章围绕引言中的问题 1.1.7，1.1.8 和 1.1.9 展开了探讨，最终回答了以上问题且给出几个例子指出了一些不蕴含关系．具体结果如下：

定理 2.1.3 设 X 是拓扑空间，考虑映射 $d: X\times X\to R^+$ 满足下列条件：$\forall\ x,y,z\in X$，

(1) 对每一 $\varepsilon>0$，如果 $d(x,y)<\varepsilon,\ d(y,z)<\varepsilon$，则 $d(x,z)<2\varepsilon$；

(2) $\forall\ x,y,z\in X$， $d(x,z)\le 2\max\{d(x,y),d(y,z)\}$；

(3) $\forall\ \varepsilon>0$，如果 $d(x,y)\le\varepsilon,\ d(y,z)\le\varepsilon$，则 $d(x,z)\le 2\varepsilon$；

(4) $\forall\ n\in N$， $d(x,y)<1/2^{n+1}$，$d(y,z)<1/2^{n+1}$，则 $d(x,z)<1/2^{n}$．

则 $(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)\Rightarrow(4)$．

下面的定理 3.1.12 部分地回答了问题 1.1.6，推论 3.1.13 回答了问题 1.1.5．

定理 3.1.12 对于拓扑空间 X 下述条件相互等价：

(1) X 是某一可度量化空间的紧覆盖且 1 序列覆盖映像；

(2) X 既是某一可度量化空间的紧覆盖映像, 又是某一可度量化空间的 1 序列覆盖映像；

(3) X 是所有的紧子集可度量化的 snf 可数空间．

推论 3.1.13 对于拓扑空间 X 下述条件相互等价：

(1) X 是某一度量化空间的紧覆盖几乎开映像；

(2) X 既是某一可度量化空间的紧覆盖映像，又是某一可度量化空间的几乎开映像；

(3) X 是每一个紧子集可度量化的第一可数空间．

例 3.1.15 存在非 snf 可数空间 X：所有紧子集是可度量化的．

这个例子说明定理 3.1.12 的两个条件是互相独立的，下面的例 3.1.17 结合

定理 3.1.12 完整地回答了问题 1.1.6.

例 3.1.17 存在每一紧子集可度量化的第一可数空间 X，但其某一紧子集在 X 中不具有可数 sn 网.

Michael 和 Nagami 在文 [24]中通过引入外基的概念刻画可度量化空间的紧覆盖开映像．类似地，这里我们通过引入外 so 网用同样的方法得到定理 3.2.14 推广了文 [24]的结果(见定理 1.1.1).

定理 3.2.14 对于拓扑空间 X 下述条件相互等价：

(1) X 是某一可度量化空间的紧覆盖, 2 序列覆盖映像；

(2) X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 so 网；

(3) X 的每一紧子集在 X 中具有可数外 so 网.

下面的例子将说明 X 是可度量化空间的紧覆盖 1 序列覆盖映像并不能蕴含 X 是可度量化空间的紧覆盖 2 序列覆盖映像.

例 3.2.15 存在每一紧子集可度量化且有可数 sn 网的空间 X，但 X 不是任一可度量化空间的紧覆盖 2 序列覆盖映像.

以下的两个定理通过引入 1-scc 映射的概念刻画了每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网的空间并回答了问题 1.1.7.

定理 4.2.3 对于拓扑空间 X ,下述条件相互等价：

(1) X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网的空间；

(2) X 是某一可度量化空间的 1-scc 映像；

(3) X 是某一可度量化空间的 scc 映像.

定理 4.3.4 对于拓扑空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是某一可度量化空间的 1-scc、商映像；

(2) X 是某一可度量化空间的 scc、商映像；

(3) X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数弱基的空间.

以下给出的例子将说明定理 4.2.3 的条件严格弱于定理 4.3.4 的条件.

例 4.3.6 存在非序列空间 X ：每一紧子集可度量化且在 X 中有可数 sn 网.

注：以上主要结果的序号是在正文中相应章节的编号.

本文所有的空间都是 T_2 的，所有的映射都是连续且满的．字母 $\mathbb{N}$ 代表所有

正自然数的集合．对一些未说明的定义和术语读者可以参考文献[11，18]．引言中涉及到的相关定义均可在第三章及第四章中查阅到．

第 2 章 Frink 引理的注记

Frink 条件是构造伪度量的关键要求.本章给出 Frink 条件的一些等价刻画，完善了 Gruenhage 论证伪度量存在性的细节，由此给出一致空间度量化定理和 Alexandroff-Urysohn 度量化定理的简化证明.

2.1 Frink 条件

引理 2.1.1[7]（Frink 引理）设映射 $d: X \times X \to R^+$（非负实数集）满足 Frink 条件：对每一 $\varepsilon > 0$，如果 $d(x,y) < \varepsilon,\ d(y,z) < \varepsilon$，则 $d(x,z) < 2\varepsilon$. 则存在映射 $\rho: X \times X \to R^+$，使得所有的 $x, y, z \in X$，有

(i) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$；

(ii) $d(x,y)/4 \le \rho(x,y) \le d(x,y)$.

如果要求 d 是对称的(即 $d(x,y) = d(y,x)$)，则 ρ 也是对称的.

先回忆一下接下来要用到的加细、星加细的概念和一些记号.

设 $\mathscr{U}$ 是集 X 的覆盖，对 $x \in X$，$A \subset X$，记

$$st(x,\mathscr{U}) = \bigcup\{U : U \in \mathscr{U}, x \in U\}；$$

$$st(A,\mathscr{U}) = \bigcup\{U \in \mathscr{U} : U \bigcap A \ne \varnothing\}.$$

设 $\mathscr{U}$，$\mathscr{V}$ 是集 X 的覆盖，如果对 $\mathscr{V}$ 的每一个元 V，存在 $U \in \mathscr{U}$ 使 $V \subset U$，则称覆盖 $\mathscr{V}$ 加细(refines) $\mathscr{U}$，记作 $\mathscr{V} < \mathscr{U}$；如果覆盖 $\{st(V,\mathscr{V}) : V \in \mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$，则称 $\mathscr{V}$ 星加细(star refines) $\mathscr{U}$.

Frink 引理应用于度量拓扑，可通过下列结果实现.

引理 2.1.2[11] 设拓扑空间 X 存在开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n$ $(n \in \mathbb{N})$，则 X 上存在伪度量 ρ 满足：

(i) $\rho(x,y) = 0$ 当且仅当 $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} st(x,\mathscr{U}_n)$；

(ii) U 是由伪度量 ρ 导出拓扑中的开集当且仅当对每一 $x \in U$ 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使 $st(x,\mathscr{U}_n) \subset U$, 这时 $st(x,\ \mathscr{U}_{n+2}) \subset st(x,\ 1/2^{n+2}) \subset st(x,\ \mathscr{U}_n)$.

文[11]在引理 2.1.2 的证明中，为了利用引理 2.1.1，使用了下述条件：设映

射 $d: X\times X\to R^{+}$ 满足：$\forall\ n\in\mathbb{N}$，如果 $d(x,y)<{}^{1}\!/\!_{2^{n+1}}$，$d(y,z)<{}^{1}\!/\!_{2^{n+1}}$，则 $d(x,z)<{}^{1}\!/\!_{2^{n}}$. 然而，上述条件并不与Frink条件等价. 如，设 $X=\{x,y,z\}$，定义映射 $d: X\times X\to R^{+}$，满足 $d(x,y)=\dfrac{1}{7}$，$d(y,z)=\dfrac{1}{7}$，$d(x,z)=\dfrac{1}{3}$．易验证，对于 $\forall\ n\in\mathbb{N}$ 及 $a,b,c\in X$，如果 $d(a,b)<{}^{1}\!/\!_{2^{n+1}}$，$d(b,c)<{}^{1}\!/\!_{2^{n+1}}$，则 $d(a,c)<{}^{1}\!/\!_{2^{n}}$．但是若取 $\varepsilon=\dfrac{1}{6}$，则 $d(x,y)=\dfrac{1}{7}<\varepsilon$，$d(y,z)=\dfrac{1}{7}<\varepsilon$，$d(x,z)=\dfrac{1}{3}=2\varepsilon$, 所以 d 不满足Frink条件. 这引起我们对Frink条件及引理2.1.2正确性的兴趣.

定理 2.1.3 设 X 是拓扑空间，考虑映射 $d: X\times X\to R^{+}$ 满足下列条件：$\forall\ x,y,z\in X$，

(1) 对每一 $\varepsilon>0$，如果 $d(x,y)<\varepsilon,\ d(y,z)<\varepsilon$，则 $d(x,z)<2\varepsilon$；

(2) $\forall\ x,y,z\in X$，$d(x,z)\le 2\max\{d(x,y),d(y,z)\}$；

(3) $\forall\ \varepsilon>0$，如果 $d(x,y)\le\varepsilon,\ d(y,z)\le\varepsilon$，则 $d(x,z)\le 2\varepsilon$；

(4) $\forall\ n\in N$，$d(x,y)<1/2^{n+1}$，$d(y,z)<1/2^{n+1}$，则 $d(x,z)<1/2^{n}$.

则 $(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)\Rightarrow(4)$.

证明： $(1)\Rightarrow(3)$ $\forall\ \varepsilon>0$，如果 $d(x,y)\le\varepsilon$，$d(y,z)\le\varepsilon$ 则 $\forall\ \varepsilon'>\varepsilon>0$，有 $d(x,y)\le\varepsilon<\varepsilon'$，$d(y,z)\le\varepsilon<\varepsilon'$，由(1)知 $d(x,z)<2\varepsilon'$．由 ε' 的任意性可得 $d(x,z)\le 2\varepsilon<2\varepsilon'$．事实上，若 $d(x,z)>2\varepsilon$，可取 $\varepsilon'=(d(x,z)-2\varepsilon)/2+\varepsilon>\varepsilon$，则 $2\varepsilon'=d(x,z)-2\varepsilon+2\varepsilon=d(x,z)$ 与 $d(x,z)<2\varepsilon'$ 矛盾.

$(3)\Rightarrow(1)$ $\forall\ \varepsilon>0$, 如果 $d(x,y)<\varepsilon,\ d(y,z)<\varepsilon$，令 $\max\{d(x,y),d(y,z)\}=\varepsilon'$，则 $d(x,y)\le\varepsilon'<\varepsilon,\ d(y,z)\le\varepsilon'<\varepsilon$，由(3)，$d(x,z)\le 2\varepsilon'<2\varepsilon$.

$(3)\Rightarrow(2)$ 令 $\max\{d(x,y),\ d(y,z)\}=\varepsilon'$，则 $d(x,y)\le\varepsilon'$, $d(y,z)\le\varepsilon'$，由(3)知 $d(x,z)\le 2\varepsilon'=2\max\{d(x,y),d(y,z)\}$.

$(2)\Rightarrow(3)$ $\forall\ \varepsilon>0$，如果 $d(x,y)\le\varepsilon,\ d(y,z)\le\varepsilon$，则 $\max\{d(x,y),d(y,z)\}\le\varepsilon$，由(2)，$d(x,z)\le 2\max\{d(x,y),\ d(y,z)\}\le 2\varepsilon$.

$(1)\Rightarrow(4)$ 令 $\varepsilon=1/2^{n+1}>0$，由（1）若 $d(x,y)<1/2^{n+1}$，$d(y,z)<1/2^{n+1}$，则 $d(x,z)<2\cdot 1/2^{n+1}=1/2^{n}$．

注：引理 2.1.2 的证明表面上使用了条件(4)，由于引理 2.1.2 证明中 $d:X\times X\to R^{+}$ 的非零取值均为$\dfrac{1}{2^{n}}$，所以如果$d(x,y)<1/2^{n+1}$，$d(y,z)\le 1/2^{n+1}$，则 $d(x,y)\le 1/2^{n+2}$，$d(y,z)\le 1/2^{n+2}$．由（4）

$$d(x,z)<2\cdot 1/2^{n+1}\le 2\max\{d(x,y),d(y,z)\}\,.$$

因此，定理 2.1.3 的(2)成立．故，引理 2.1.2 的证明是正确的．

2.2 应用

作为 Frink 引理的应用，本节利用引理 2.1.2，简化两个度量化定理的证明．在叙述一致空间的度量化定理之前先回忆一致空间的概念．

定义 2.2.1[30] 设$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$是集 X 上的覆盖$\mathscr{U}$所成的族，如果还满足下列条件：

(U_1) 对 X 中的覆盖$\mathscr{U}$，如果存在$\alpha\in A$使$\mathscr{U}_\alpha<\mathscr{U}$，则$\mathscr{U}\in\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$；

(U_2) 对任意α，$\beta\in A$，存在$\gamma\in A$使$\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\alpha$，$\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\beta$；

(U_3) 对每一$\alpha\in A$，存在$\beta\in A$，使$\mathscr{U}_\beta$星加细$\mathscr{U}_\alpha$；

(U_4) 对任意x，$y\in A$ $(x\ne y)$，存在$\alpha\in A$使$\mathscr{U}_\alpha$中没有一个元同时包含点x与y，则称$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$是集 X 上的一个一致结构(uniformity)，集 X 连同它的一致结构$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$称为一致空间(uniform space)，可以记为（X，$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$）．一致结构$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$的子族$\{\mathscr{U}_\beta:\beta\in B\}$（$B\subset A$）称一致结构的基(basis of uniformity)，如果对每一$\alpha\in A$，存在$\beta\in B$使$\mathscr{U}_\beta<\mathscr{U}_\alpha$．一致空间称为可度量化(metrizable)，如果 X 上存在伪度量 ρ 使由开球组成的覆盖 $\mathscr{U}_n=\{B(x,\ {}^{1}\!/_{n}):x\in X\}$的可数族$\{\mathscr{U}_n:n\in\mathbb{N}\}$形成一致结构的基．

定理 2.2.2[30]（一致空间度量化定理）一致空间可度量化当且仅当具有由可数个覆盖形成的一致结构的基．

证明：必要性显然，仅证充分性．

设$\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$是$X$上的一致结构，$\{\mathscr{U}_i : i\in\mathbb{N}\}$是这一致结构的可数基．$\forall\, i\in\mathbb{N}$，可以选取$\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$中的元$\mathscr{U}_{\alpha_i}(i\in\mathbb{N})$，使$\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}$星加细$\mathscr{U}_{\alpha_i}$且$\mathscr{U}_{\alpha_i}$加细$\mathscr{U}_i$，则$\{\mathscr{U}_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$是$X$的覆盖序列且$\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}$星加细$\mathscr{U}_{\alpha_i}(i\in\mathbb{N})$．由引理 2.1.2 知$X$上存在伪度量$\rho$满足引理 2.1.2 的条件(i)和(ii)．由一致结构的定义(U_4)知$y\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}} st(x,\ \mathscr{U}_{\alpha_i})=\{x\}$，从而$\rho$是$X$上一个度量．由引理 2.1.2 的证明知$B(x,\ 1/2^{i+1})\subset st(x,\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}})\subset U'\in\mathscr{U}_{\alpha_i}$，所以$\{B(x,\ 1/2^{i+1}) : x\in X\}<\mathscr{U}_{\alpha_i}$，从而$\{\{B(x,\ 1/n) : x\in X\}\}_{n\in\mathbb{N}}$形成$\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$的基．

一致空间的度量化定理的证明常较复杂． 一般要证明困难的度量化引理(见文[9]的定理 4.5.8)，而后再导出且需要不少一致空间的相关知识．我们提供的证明直接而且简单．

定理 2.2.3[1]（Alexandroff-Urysohn 度量化定理）拓扑空间X可度量化，当且仅当X是T_0的且存在开覆盖序列$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：

(i) $\mathscr{U}_{n+1}$星加细$\mathscr{U}_n$ $(n\in\mathbb{N})$；

(ii) $\{st(x,\ \mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$形成点$x$的邻域基．

证明：必要性显然，仅证充分性．由引理 2.1.2 的结论知，X上存在伪度量ρ满足引理 2.1.2 中的条件(i)和(ii)． 由于X是T_0的及$\{st(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是点$x$的邻域基．$\forall\ x,\ y\in X,\ x\neq y$，不妨设存在开邻域$U_x$及$n\in\mathbb{N}$，使$x\in U_x$，$y\notin U_x$，$x\in st(x,\mathscr{U}_n)\subset U_x$，则$y\notin st(x,\mathscr{U}_n)$，所以$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} st(x,\mathscr{U}_n)=\{x\}$，从而$\rho$是$X$上的一个度量．由$\{st(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是点$x$的邻域基，知$X$上的拓扑与由度量$\rho$诱导的拓扑一致，从而拓扑空间可度量化．

第 3 章　度量空间的紧覆盖序列覆盖映像

序列覆盖映射在度量空间的映射理论方面起着重要的作用[10，17]．在本章我们给出了度量空间的紧覆盖 1 序列覆盖(2 序列覆盖)映像的刻画，并肯定的回答了林寿教授提出的问题 1.1.5．

3.1 紧覆盖 1 序列覆盖映像

在这一部分，我们给出了度量空间的紧覆盖 1 序列覆盖映像的刻画．

定义 3.1.1[6] 设 X 是一个空间，$P \subset X$．

(1) X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，称 $\{x_n\}$ 是终于 P 的，如果存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\{x\} \bigcup \{x_n : n \geq m\} \subset P$；

(2) 称 P 为 X 中的点 x 的序列邻域(sequential neighborhood)，若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，则 $\{x_n\}$ 是终于 P 的；

(3) P 称为 X 中的序列开集(sequentially open set)，若 P 是 P 中每一点的序列邻域；

(4) X 称为序列空间(sequential space)，若 X 的每一序列开集是 X 的开集．

定义 3.1.2 设空间 X 的子集族 $\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{B}_x$ 是 X 的一个覆盖满足：

对于每一个 $x \in X$，(a) 如果 $U, V \in \mathscr{B}_x$，那么存在 $W \in \mathscr{B}_x$ 使得 $W \subset U \bigcap V$；(b) $\mathscr{B}_x$ 是 x 在 X 中的网，即 $x \in \bigcap \mathscr{B}_x$，且若 $x \in U \in \tau(X)$，则存在 $B \in \mathscr{B}_x$ 使得 $x \in B \subset U$．

$\mathscr{B}$ 称为 X 的弱基(weak base)[4]，若 $G \subset X$ 使得对于任一 $x \in G$ 存在 $B \in \mathscr{B}_x$ 有 $B \subset G$，那么 G 是 X 的开子集，这里 $\mathscr{B}_x$ 称为 x 在 X 中的弱基．$\mathscr{B}$ 称为 X 的 sn 网(sn-network)[16]，若每一 $\mathscr{B}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域，这里 $\mathscr{B}_x$ 称为 x 的 sn 网．若空间 X 的每一点都有可数的的 sn 网(so 网，弱基)，则称 X 是 snf 可数(sof 可数，gf 可数)空间．

每一个 gf 可数空间是序列空间[28]．

定义 3.1.3 空间 X 称为 k 空间[8]，若 X 关于全体紧子集组成的覆盖具有弱拓扑，即空间 X 是 k 空间，若 $A \subset X$，使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K \bigcap A$ 是

K 的闭集，则 A 是 X 的闭集．空间 X 称为 Fréchet 空间[6]，若 $x \in \overline{A} \subset X$，则存在 A 中的序列在 X 中收敛于 x.

以下关系很容易得到：

$$\text{第一可数空间} \Rightarrow \text{Fréchet 空间} \Rightarrow \text{序列空间} \Rightarrow k \text{ 空间}.$$

定义 3.1.4 设 A 是空间 X 的非空子集． 称 A 在 X 中具有可数 sn 网 (countable sn-network)，若存在 X 的子集列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足：

(1) 每一 V_n 是 A 中每一点的序列邻域，即 V_n 是 A 在 X 中的序列邻域；

(2) 对 X 中每一包含 A 的开集 V，存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $V_n \subset V$.

上述 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也称为 A 在 X 中的可数 sn 网.

定义 3.1.5 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为紧覆盖映射(compact-covering map)[23]，若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的像；

(2) f 称为序列覆盖映射(sequence-covering map)[27]，若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列，那么存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$；

(3) f 称为 1 序列覆盖映射[16](1-sequence-covering map)，若对于 $y \in Y$，存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足：如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y，那么存在 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$；

(4) f 称为伪开映射[3](pseudo-open map)，若 $f^{-1}(y) \subset U \in \tau(X)$，那么 $y \in f(U)^{\circ}$；

(5) f 称为几乎开映射[2](almost-open map)，如果对每一 $y \in Y$，存在 $x \in f^{-1}(y)$，对 x 在 X 中的每一邻域 U，$f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

此处定义的 Siwiec 意义下的序列覆盖映射不同于文[12]定义的序列覆盖映射，Gruenhage – Michael-Tanaka [12]意义下的定义是：称映射 $f: X \to Y$ 是序列覆盖映射若对 Y 中每一含极限点的收敛序列 S 存在 X 的紧子集 L 使得 $f(L) = S$.

引理 3.1.6 [27] 设 $f: X \to Y$，若 Y 是序列空间，f 是序列覆盖映射，则 f 是商映射.

引理 3.1.7 [20] 空间 X 是可度量化空间的 1 序列覆盖映像当且仅当 X 是 snf 可数空间.

推论 3.1.8 [20] 空间 X 是可度量化空间的 1 序列覆盖的商映像当且仅当 X 是 gf 可数空间.

引理 3.1.9 [24] 空间 X 是可度量化空间的紧覆盖映像当且仅当 X 的每一紧子集可度量化.

引理 3.1.10 [19] 设 $f: X \to Y$.

(1) 如果 Y 是 k 空间，f 是紧覆盖映射，那么 f 是商映射；

(2) 如果 Y 是 Fréchet 空间，f 是商映射，那么 f 是伪开映射.

引理 3.1.11 [17] 设 $f: X \to Y$. 如果 X 是第一可数空间，那么 f 是几乎开映射当且仅当 f 是 1 序列覆盖映射和伪开映射.

定理 3.1.12 对于拓扑空间 X 下述条件相互等价：

(1) X 是某一可度量化空间的紧覆盖且 1 序列覆盖映像；

(2) X 既是某一可度量化空间的紧覆盖映像，又是某一可度量化空间的 1 序列覆盖映像；

(3) X 是所有的紧子集可度量化的 snf 可数空间.

证明：$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ 是显然的.

下面证明 $(3) \Rightarrow (1)$. 由引理 3.1.7 及 3.1.9，分别存在可度量化空间 M_1 和 M_2，及 1 序列覆盖映射 $f: M_1 \to X$ 和紧覆盖映射 $g: M_2 \to X$.

让 $M = M_1 \oplus M_2$，定义 $h: M \to X$ 使得 $h|M_1 = f$ 且 $h|M_2 = g$，则 M 是可度量化空间且 h 是紧覆盖且 1 序列覆盖映射. 事实上，对 X 的任一紧子集 K，由于 $g: M_2 \to X$ 是紧覆盖映射，所以存在 M_2 中的紧子集 L 使得 $g(L) = K$. 又由于 $L \subset M_2 \subset M$，从而 $h(L) = g(L) = K$. $\forall\, x \in X$，由于 $f: M_1 \to X$ 是 1 序列覆盖映射，所以 $\exists\, \alpha \in h^{-1}(x) \bigcap M_1 \subset M$. 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，那么存在 M_1 中收敛于点 α 的序列 $\{\alpha_n\}$ 使得每一 $\alpha_n \in f^{-1}(x_n) \subset h^{-1}(x_n)$，从而 h 是紧覆盖且 1 序列覆盖映射. 证毕.

对于林寿教授提出的问题 1.1.5，通过下面的推论可以给出回答.

推论 3.1.13 对于拓扑空间 X 下述条件相互等价：

(1) X 是某一度量化空间的紧覆盖几乎开映像；

(2) X 既是某一可度量化空间的紧覆盖映像，又是某一可度量化空间的几乎开映像；

(3) X 是每一个紧子集可度量化的第一可数空间.

证明：(1)$\Rightarrow$(2) 是显然的.

(2)$\Rightarrow$(3) 很容易验证第一可数性是被几乎开映射保持的.

(3)$\Rightarrow$(1) 由定理 3.1.12 知，X 是某一可度量化空间的紧覆盖且 1 序列覆盖映像，因此由引理 3.1.6，3.1.10 和 3.1.11，X 是某一可度量化空间的紧覆盖几乎开映像.

通过引理 3.1.6，推论 3.1.8 和定理 3.1.12，有以下推论.

推论 3.1.14 对于拓扑空间 X 下述条件相互等价：

(1) X 是某一可度量化空间的紧覆盖 1 序列覆盖的商映像；

(2) X 既是某一可度量化空间的紧覆盖映像，又是某一可度量化空间的 1 序列覆盖映像，同时还是某一可度量化空间的商映像；

(3) X 是弱第一可数空间且所有的紧子集是可度量化的.

最后给出与度量空间的紧覆盖且 1 序列覆盖映像的刻画相关的例子，说明一些不蕴涵关系.

例 3.1.15 存在所有紧子集可度量化的空间 X，但 X 不是 snf 可数空间.

如序列扇空间 S_ω[18，例 3.18]. 那么 $X = S_\omega$ 是 Frechét 空间且不是第一可数的，因此 X 不是 snf 可数的. 因为 X 的每一紧子集是可数的且 X 是 T_2 的，所以不难验证 X 的每一紧子集是可度量化的.

例 3.1.16 每一紧子集是可度量化的 snf 可数空间不是 k 空间.

如 $X = N \cup \{p\}$，对 X 赋予 N 的极大紧化 βN 的子空间拓扑，其中 $p \in \beta N \setminus N$. 因为 X 的每一紧子集是有限的且 X 是 T_2 的，所以 X 的每一紧子集是可度量化的. 因为 βN 中的任一收敛序列是平凡的，所以空间 βN 是 snf 可数的. 因此 X 是 snf 可数的. 由于 N 不是 X 的闭子空间，所以 X 不是 k 空间.

例 3.1.17 存在每一紧子集可度量化的第一可数空间 X，但其某一紧子集在

X 中不具有可数 sn 网．

让 X 是蝶形空间[22]，　那么 X 是每一紧子集可度量化的第一可数空间且 X 中的紧子集 $I\times\{0\}$ 没有可数邻域基．因为 X 是第一可数的，所以点 x 在 X 中的每一序列邻域也是该点在 X 中的邻域，从而 $I\times\{0\}$ 在 X 中不具有可数 sn 网．

3.2 紧覆盖 2 序列覆盖映像

这一部分主要给出了度量空间的紧覆盖 2 序列覆盖映像的刻画．先回忆一些基本概念．

定义 3.2.1[16] 设映射 $f:X\to Y$ ．f 称为 2 序列覆盖映射(2-sequence-covering map)，若对于每一个 $y\in Y$，每一个 $x\in f^{-1}(y)$ 满足：如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y，那么存在 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$．

定义 3.2.2[18] 设 A 是空间 X 的非空子集．空间 X 的开集族 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 A 在空间 X 中的可数邻域基（countable neighborhood base），若对 X 中每一包含 A 的开集 V，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $A\subset V_n\subset V$．

定义 3.2.3[24] 设 A 是空间 X 的非空子集．空间 X 的开集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的子集 A （在 X 中)的外基(outer base)，若对于每一 $x\in A$ 及 x 在 X 中的邻域 U，存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B\subset U$．　因而，$\mathscr{B}$ 是 A 的外基当且仅当对于每一 $x\in A$，存在 x 的邻域基 $\mathscr{B}_x$ 使得 $\mathscr{B}=\bigcup_{x\in A}\mathscr{B}_x$．

相似地，可以得到以下两个定义．

定义 3.2.4 设 A 是空间 X 的非空子集．空间 X 的子集族 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 A 在空间 X 中的可数 so 网(countable so-network)，若它满足：

(1) 若对 X 中每一包含 A 的开集 V，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $A\subset V_n\subset V$；

(2) 对每一个 $n\in\mathbb{N}$，V_n 是 X 中的序列开集．

定义 3.2.5 设 A 是空间 X 的非空子集．空间 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为 A 在空间 X 中的外 so 网(outer so-network)，若它满足：

(1) $\mathscr{B}$ 中的每个元是 X 中的序列开集；

(2) 对每一个$x \in A$及X中包含点x的开集V，存在$B \in \mathscr{B}$使得$x \in B \subset V$.

引理 3.2.6[16] 设映射$f: X \to Y$. 如果$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是X中某点x的递减的网且每一$f(B_m)$是$f(x)$在Y中的序列邻域，若在Y中序列$\{y_n\}$收敛于$f(x)$，那么存在$x_n \in f^{-1}(y_n)$，使得在X中序列$\{x_n\}$收敛于x.

引理 3.2.7[17] 空间X是Fréchet空间当且仅当X的每一点的序列邻域是该点的邻域.

引理 3.2.8[17] 设$f: X \to Y$. 若X是第一可数空间，那么f是开映射当且仅当f是2序列覆盖的商映射.

现在，回忆下一Ponomarev系和性质CC的概念.

设$\mathscr{F}$是空间X的网络. 记$\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，指标集$\Lambda$赋予离散拓扑，令

$$M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^\omega:\{F_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}\text{构成}X\text{中某点}x_\alpha\text{的网络}\},$$

则M是度量空间. 定义函数$f: M \to X$使得$f(\alpha)=x_\alpha$，因此$f(\alpha)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}$. 称$(f,M,X,\mathscr{F})$为 Ponomarev 系[21].

设K是空间X的子集. $\mathscr{H}$称为K的*cfp*覆盖[31]，若$\mathscr{H}$是K在X中的覆盖且被K的闭集组成的有限覆盖精确加细.

设$\mathscr{F}$是空间X的子集族，K是X的子集. $\mathscr{F}$称为关于K具有性质CC[21]，若C是K的非空紧子集，V是C在X中的邻域，则存在$\mathscr{F}$的有限子集$\mathscr{H}$使得$\mathscr{H}$是C的*cfp*覆盖且$\bigcup\mathscr{H}\subset V$. .

引理 3.2.9 [18] 设$(f,M,X,\mathscr{F})$是Ponomarev系. 若K是X的紧子集且存在$\mathscr{F}$的可数子集$\mathscr{F}_K$关于K具有性质CC，则存在M的紧子集L使得$f(L)=K$.

引理 3.2.10 设拓扑空间X的每一紧子集可度量化，K是X的子集，若$\mathscr{B}$是K在X中的外*so*网，则$\mathscr{B}$关于K具有性质CC.

证明: 设H是K的紧子集，V是H在X中的邻域. 若$x\in H$，则存在$B_x\in\mathscr{B}$使得$x\in B_x\subset V$. 由于B_x是x在X中的序列开集，所以$B_x\cap H$是x在X中的序列开集，由H的可度量性及由引理 3.2.7 知，

$$x\in int_H(B_x\cap H)=B_x\cap H\subset B_x.$$

由H的正则性，存在H的开集V_x使

$$x\in V_x\subset \mathrm{cl}_H(V_x)=\overline{V_x}\subset \mathrm{int}_H(B_x\bigcap H)\subset B_x .$$

于是$\{V_x\}_{x\in H}$是紧子集H的开覆盖，所以它存在有限的子覆盖$\{V_{x_i}\}_{i\le n}$，从而$H=\bigcup_{i\le n}\overline{V_{x_i}}\subset\bigcup_{i\le n}B_{x_i}\subset V$且$\{\overline{V_{x_i}}\}_{i\le n}$是$\{B_{x_i}\}_{i\le n}$的精确加细．故$\mathscr{B}$关于$K$具有性质$CC$．

引理 3.2.11 若拓扑空间X的每一紧子集具有可数外so网，则X是某一可度量化空间的紧覆盖 2 序列覆盖映像.

证明：设X的紧子集K在X中的可数外so网是$\mathscr{P}_K$．令$\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{P}_K$：$K$是$X$的紧子集$\}$，记$\mathscr{B}=\{B_\alpha:\alpha\in A\}$．让$(f,M,X,\mathscr{B})$是 Ponomarev 系，而$\mathscr{P}_K|_K$是$K$的可数网络，所以紧子集$K$可度量化．由引理 3.2.9 和 3.2.10，$f:X\to Y$是紧覆盖映射．下证$f$是 2 序列覆盖映射．$\forall\ x\in X$，$\forall\ \beta=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$，$\{B_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{B}$是点$x$在$X$中的序列邻域网．对$n\in\mathbb{N}$，置$C_n$=$\{(\gamma_i)\in M$：对$i\le n$有$\gamma_i=\alpha_i\}$，那么$\{C_n:n\in\mathbb{N}\}$是$\beta$在$M$中下降的邻域基，且对$n\in\mathbb{N}$有$f(C_n)=\bigcap_{i\le n}B_{\alpha_i}$．事实上，设$\gamma=(\gamma_i)\in C_n$，那么$f(\gamma)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}B_{\gamma_i}\subset\bigcap_{i\le n}B_{\alpha_i}$，所以$f(C_n)\subset\bigcap_{i\le n}B_{\alpha_i}$．再设$z\in\bigcap_{i\le n}B_{\alpha_i}$，选取$\mathscr{B}$的子族$\{B_{\delta_i}:i\in\mathbb{N}\}$，使当$i\le n$时，有$\delta_i=\alpha_i$，且$\{B_{\delta_i}:i\in\mathbb{N}\}$是点$z$在$X$中的网．令$\delta=(\delta_i)\in A^\omega$，那么$z=f(\delta)\in f(C_n)$，于是$\bigcap_{i\le n}B_{\alpha_i}\subset f(C_n)$，故$\bigcap_{i\le n}B_{\alpha_i}=f(C_n)$．设在$X$中$x_j\to x$，由于$f(C_n)$是$x$的序列邻域，再由引理 3.2.6 知存在$\beta_j\in f^{-1}(x_j)$，且在$M$中$\beta_j\to\beta$，所以$f$是 2 序列覆盖映射，从而$f$是紧覆盖 2 序列覆盖映射.

引理 3.2.12 若拓扑空间X是可度量化空间的紧覆盖 2 序列覆盖映像，则X的每一紧子集可度量化且在X中具有可数的so网.

证明：设$f:M\to X$是可度量化空间M到X的紧覆盖 2 序列覆盖映射．对X的任一紧子集K，存在M中的紧子集L使得$f(L)=K$．设L在M中的递减开邻域基为$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，往证$\{f(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$K$在$X$中的可数$so$网.

(1)$\forall\ n\in\mathbb{N}$，由于$L\subset V_n$，则$K=f(L)\subset f(V_n)$．设U是X中的开集，若

$K \subset U$，则$L \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}(U) \subset M$，存在$k \in \mathbb{N}$，使得$L \subset V_k \subset f^{-1}(U)$，所以$K = f(L) \subset f(V_k) \subset U$.

(2)$\forall\ y \in f(V_n)$，$\exists\ x_y \in V_n$，使得$f(x_y) = y$．若$y_i \to y$，由于f是2序列覆盖映射，所以存在$x_i \in f^{-1}(y_i)$，使得$x_i \to x_y \in V_n$。从而序列$\{x_i\}$终于V_n，所以序列$\{y_i\}$终于$f(V_n)$，即证$f(V_n)$是X中的序列开集．由引理3.1.9 X的每一紧子集可度量化．

引理 3.2.13 若拓扑空间X的每一紧子集可度量化且在X中具有可数so网， 则X的每一紧子集有可数外so网．

证明：设K是空间X的可度量化的紧子集，则K具有可数基$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$。设$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是K在X中的so网．令$A = \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 : \overline{U}_m \subset U_n\}$，对于$(n,m,k) \in A \times \mathbb{N}$，由于$\overline{U}_m \subset U_n$，于是

$$\overline{U}_m \bigcap (K \setminus U_n) = \varnothing .$$

因为$\overline{U}_m$和$K \setminus U_n$是T_2空间的不交子集，从而存在X的开集$U_{n,m}$使得

$$\overline{U}_m \subset U_{n,m} \subset \overline{U}_{n,m} \subset X \setminus (K \setminus U_n) .$$

置$W(n,m,k) = U_{n,m} \bigcap V_k$，形如上述$W(n,m,k)$的集合的有限交全体组成的$X$的开集族记为$\mathscr{H}$，则$\mathscr{H}$是可数的．对于每一个$x \in K$，定义

$B_x = \{\alpha \in A \times \mathbb{N} : x \in W(\alpha)\}$ ， $H(F) = \bigcap\{W(\alpha) : \alpha \in F\}$，其中$F \subset B_x$.

令$\mathscr{H}_x = \{H(F) : F \subset B_x$ 且F有限$\}$，则$\mathscr{H} = \bigcup_{x\in K} \mathscr{H}_x$．往证$\mathscr{H}$是$K$在$X$中的外$so$网：

(1) 任取$H(F_1),\ H(F_2) \in \mathscr{H}_x$，由$\mathscr{H}_x$的定义可得$F_1 \subset B_x$，$F_2 \subset B_x$且$F_1$，$F_2$都是有限集，令$F = F_1 \bigcup F_2$，所以$H(F) \in \mathscr{H}_x$且$H(F) \subset H(F_1) \bigcap H(F_2)$.

(2) 设U是点x在X中的开邻域．设不存在B_x的有限子集F使得$x \in H(F) \subset U$, 取$p(F) \in H(F) \setminus U$，置$Q(F) = \{p(F')$：$F'$是$B_x$的有限子集且$F \subset F'\}$，则$U \bigcap Q(F) = \varnothing$且$K \bigcap \overline{Q(F)} \neq \varnothing$． 否则，存在$k \in \mathbb{N}$使得$V_k \bigcap \overline{Q(F)} = \varnothing$．由$K$的正则性及$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$K$的基，存在$(n,m) \in \mathbb{N}^2$使得$x \in \overline{U_m} \subset U_n$．记$\alpha = (n,m,k)$，$F' = F \bigcup \{\alpha\}$，则

$\alpha \in B_x$ 且 $P(F^{'}) \in W(\alpha) \bigcap Q(F) \subset V_k \bigcap Q(F) = \varnothing$，矛盾.

若 $F_1 \subset F_2$，则 $Q(F_2) \subset Q(F_1)$，因此{ $K \bigcap \overline{Q(F)}$： F 是 B_x 的有限子集}具有有限交性质. 由 K 的紧性，$K \bigcap (\bigcap \{\overline{Q(F)} : F$ 是 B_x 的有限子集$\}) \neq \varnothing$. 另一方面，$\forall\ y \in K \setminus \{x\}$，由 K 的正则性，存在 $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ 使得 $x \in U_m \subset \overline{U}_m \subset U_n \subset K \setminus \{y\}$，于是 $\overline{U}_{n,m} \subset X \setminus (K \setminus U_n) \subset X \setminus \{y\}$.　取 $k \in \mathbb{N}$，让 $\alpha = (n,m,k)$，则 $\alpha \in B_x$ 且 $y \notin \overline{U}_{n,m}$.

而 $Q(\{\alpha\}) = \{\, p(F^{'}) : F^{'}$ 是 B_x 的有限子集且 $\alpha \in F^{'}\,\} \subset H(\{\alpha\}) = W(\alpha) \subset U_{n,m}$，于是 $y \notin \overline{Q(\{\alpha\})}$，因此($K \setminus \{x\}$) ⋂ （$\bigcap \{\overline{Q(F)} : F$ 是 B_x 的有限子集}) $=\varnothing$. 这时

$$\bigcap \{ K \bigcap \overline{Q(F)} : F \text{ 是是 } B_x \text{ 的有限子集}\} = \{x\} \subset U .$$

再由 K 的紧性，存在 B_x 的有限子集 F 使得 $x \in K \bigcap \overline{Q(F)} \subset U$，从而 $U \bigcap Q(F) \neq \varnothing$，矛盾. 因此存在 B_x 的有限子集 F 使得 $H(F) \subset U$ 且 $x \in H(F) \subset U$. 即我们证明了 $\mathscr{H}_x$ 是 x 在 X 中的网.

(3) 由于对任意 $H(F) \in \mathscr{H}_x$，$H(F) = \bigcap \{W(\alpha) : \alpha \in F\}$，因此只需证明 $W(\alpha)$ 是 X 中的序列开集，由前面的定义可知 $x \in W(\alpha) = U_{n,m} \bigcap V_k$，其中 $U_{n,m}$ 是 X 中的开集，V_k 是 K 在 X 中的序列开集，所以 $W(\alpha)$ 是 X 中的序列开集，从而 $H(F)$ 是 X 中的序列开集，即 $\mathscr{H}_x$ 中的每一个元都是 X 中的序列开集.

综上所述知，若 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数的 so 网，则 X 的每一紧子集有可数的外 so 网.

由引理 3.2.11，3.2.12 和 3.2.13，显然有以下定理.

定理 3.2.14 对于拓扑空间 X 下述条件相互等价：

(1) X 是某一可度量化空间的紧覆盖 2 序列覆盖映像；

(2) X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 so 网；

(3) X 的每一紧子集在 X 中具有可数外 so 网.

定理 3.2.14 推广了 Michael 和 Nagami [24]的结果，见引言中的定理 1.1.1.

例 3.2.15 存在每一紧子集可度量化且有可数 sn 网的空间 X，但 X 不是任一可度量化空间的紧覆盖 2 序列覆盖映像.

让 $S_1=\{0\}\bigcup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$，$I=[0,1]$． 定义 $X=I\times S_1$，$Y=I\times(S_1-\{0\})$．

赋予 X 下述拓扑[12]: Y 作为 X 的子空间具有欧氏拓扑，$(t,0)\in X$ 的邻域基元形如 $\{(t,0)\}\bigcup(\bigcup\{V(t,k):k\geq n\})$, $n\in\mathbb{N}$，其中 $V(t,k)$ 是 $(t,\frac{1}{k})$ 在子空间 $I\times\{\frac{1}{k}\}$ 的开邻域.

置 $M=(\oplus\{I\times\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\})\oplus(\oplus\{\{t\}\times S_1:t\in I\})$，其中每一个 $I\times\{\frac{1}{n}\}$ 具有欧氏拓扑，每一个 $\{t\}\times S_1$ 具有欧氏拓扑．让 $f:M\to X$ 是满的自然投射，故 f 是从局部紧的度量空间 M 到 X 上的紧覆盖，1 序列覆盖，商，至多二到一的映射[17，例 1.5.4].

下证 X 中每一紧子集 K 在 X 中具有可数 sn 网.

由于 $I\times\{0\}$ 是 X 的闭离散子空间，离散空间的紧子集只能是有限集，所以 $K\bigcap(I\times\{0\})$ 是有限集，记为 $\{(t_i,0)\}_{i\leq m}$．让 $K_0=\bigcup_{i\leq m}(\{t_i\}\times S_1)$．如果对每一个 $n\in\mathbb{N}$，$K\setminus(K_0\bigcup(\bigcup_{j\leq n}(I\times\{\frac{1}{j}\})))\neq\varnothing$，那么存在序列 $\{j_n\}\subset\mathbb{N}$ 和 $\{x_n\}\subset X$ 满足若 $m\neq n$ 则 $j_m\neq j_n$ 且 $j_n\to+\infty$，对每一个 $n\in\mathbb{N}, x_n\in K\bigcap(I\times\{\frac{1}{j_n}\})\setminus K_0$． 假设 x 是 $\{x_n\}$ 在 K 中的聚点，那么 $x\in K\bigcap(I\times\{0\})$，因此存在 $i\leq m$ 使得 $x=(t_i,0)$．对每一个 $n\in\mathbb{N}$，取 $(t_i,\frac{1}{j_n})$ 在 $I\times\{\frac{1}{j_n}\}$ 中的开邻域 $V(t_i,j_n)$ 使得 $x_n\notin V(t_i,j_n)$．对每一 $k\in\mathbb{N}\setminus\{j_n:n\in\mathbb{N}\}$，令 $V(t_i,k)=I\times\{\frac{1}{k}\}$，定义 $W=\{x\}\bigcup(\bigcup_{k\in N}V(t_i,k))$，那么 W 开于 X，$x\in W$ 且 $x_n\notin W$，矛盾．因此存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $K\subset K_0\bigcup(\bigcup_{j\leq n}(I\times\{\frac{1}{j}\}))$，即

$$K=(\bigcup_{j\leq n}((I\times\{\frac{1}{j}\})\bigcap K))\bigcup(\bigcup_{i\leq m}((\{t_i\}\times S_1)\bigcap K)).$$

因为 $I\times\{\frac{1}{j}\}$ 闭于 X，K 是 X 的紧子集， 所以 $(I\times\{\frac{1}{j}\})\bigcap K$ 是 $I\times\{\frac{1}{j}\}$ 的紧子集．因此 $(I\times\{\frac{1}{j}\})\bigcap K$ 在 $I\times\{\frac{1}{j}\}$ 中有可数邻域基 $\{V_n:n\in\mathbb{N}\}$．对每一个

$(t_i,\frac{1}{j})\in(I\times\{\frac{1}{j}\})\bigcap K$，如果有序列 $\{x_n\}$ 在 X 中收敛到 $(t_i,\frac{1}{j})$，那么 $\{x_n\}$ 终于点 $(t_i,\frac{1}{j})$ 在 $I\times\{\frac{1}{j}\}$ 中的开邻域 $V(t_i,j)$. 容易验证 $\{V_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 $(I\times\{\frac{1}{j}\})\bigcap K$ 在 X 中的可数 sn 网．相似地可以证明 $(\{t_i\}\times S_1)\bigcap K$ 在 X 中有可数 sn 网．因此 K 在 X 中有可数 sn 网.

因为 $(0,0)\in\overline{(I-\{0\})\times S_1}$ 且 X 中收敛于 $(0,0)$ 的序列只能有有限项不属于 $(I-\{0\})\times S_1$，所以不存在 $(I-\{0\})\times S_1$ 中的序列收敛于 $(0,0)$ [15, 例 2.8.16]．因此 X 不是 Fréchet 空间. 因为商映射保持序列空间，所以 X 是序列空间. 若 X 是某一度量空间的紧覆盖 2 序列覆盖映射 f 下的像，由引理 3.2.8 知 f 是开映射，从而 X 是第一可数空间，这与 X 不是 Fréchet 空间矛盾，证毕.

例 3.2.16 可度量化空间的紧覆盖 2 序列覆盖映像不一定是可度量化空间的商映像.

如 $X=\mathbb{N}\bigcup\{p\}$，赋予 X 离散拓扑，其中 $p\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$，那么 X 是可度量化空间．令 $Y=\mathbb{N}\bigcup\{p\}$，赋予 $\mathbb{N}$ 的极大紧化 $\beta\mathbb{N}$ 的子空间拓扑．定义 $f:X\to Y$ 如下：$\forall\ x\in X,\ f(x)=x$． 因为 Y 的每一紧子集是有限的，所以 f 是紧覆盖映射且易证 f 是 2 序列覆盖映射．因为 Y 不是 k 空间，所以 Y 不是任一可度量化空间的商映像.

第 4 章 弱基与度量空间的紧覆盖映像

本章主要引进与 1 序列覆盖映射及紧覆盖映射密切相关的 1-*scc* 映射与 *scc* 映射(见定义 4.2.1)，对引言中提出的三个问题给予回答.

4.1 紧子集具有可数外 *sn* 网的空间

对于弱基性质更广泛探讨的基础是讨论稳定性较好的 *sn* 网，弱基是介于基与 *sn* 网之间的一个概念.

Michael 和 Nagami [24]引入的空间中子集的外基(outer base)概念(见定义 3.2.3)，就是把空间中一点的邻域基扩展到一个子集上每一点的邻域基.

由此，可引入外 *sn* 网的概念.

定义 4.1.1 设 A 是空间 X 的非空子集．X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为 A (在 X 中)的外 *sn* 网(outer *sn*-network)，如果 $\mathscr{B}=\bigcup_{x\in A}\mathscr{B}_x$，其中每一 $\mathscr{B}_x$ 满足：

(1) $\mathscr{B}_x$ 是 x 在 X 中的网，即 $x\in\bigcap\mathscr{B}_x$，且如果 X 的开集 O 含有点 x，则存在 $B\in\mathscr{B}_x$ 使得 $B\subset O$；

(2) 如果 $U, V\in\mathcal{B}_x$，则存在 $W\in\mathscr{B}_x$ 使得 $W\subset U\bigcap V$；

(3) $\mathscr{B}_x$ 中的每一元是 x 在 X 中的序列邻域.

上述 $\mathscr{B}_x$ 称为 x 在 X 中的 *sn* 网(*sn*-network)．X 在 X 中的外 *sn* 网也称为 X 的 *sn* 网[16].

在定义 4.1.1 和定义 3.1.4 中，当把序列邻域加强为邻域时，分别定义了子集 A 的外基及 A 在 X 中的可数邻域基.

下列定理建立了空间中紧子集具有可数 *sn* 网与具有可数外 *sn* 网的精确联系．它是本节中建立度量空间的紧覆盖映像定理的关键.

定理 4.1.2 设 K 是空间 X 的紧子集，则 K 可度量化且在 X 中具有可数 *sn* 网当且仅当存在 K 在 X 中的可数外 *sn* 网 $\mathscr{H}$，满足：$\mathscr{H}$ 的每一元形如 $U\bigcap V$，其中 U 是 X 的开集，V 是 K 在 X 中的序列邻域.

证明：必要性同引理 3.2.13，只需把序列开集改成序列领域，从证明中可以看出 $\mathscr{H}$ 的每一元形如 $U\bigcap V$，其中 U 是 X 的开集，V 是 K 在 X 中的序列邻

域.

充分性．记K在X中的外sn网$\mathscr{H}$为$\{U_n \cap V_n : n \in \mathbb{N}\}$，其中$U_n$是$X$的开子集，$V_n$是$K$在$X$中的序列邻域．由于$\mathscr{H}$是$K$的外$sn$网，所以$\{H \cap K : H \in \mathscr{H}\}$是紧子空间$K$的可数网，从而$K$可度量化(如，见文[11，定理3.1.10])．记$\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$．令

$$\mathscr{V} = \left\{\left(\bigcup \mathscr{U}'\right) \cap \left(\bigcap \{V_n : n \le m\}\right) : \mathscr{U}' \text{是} \mathscr{U} \text{的有限子集且覆盖} K,\ m \in \mathbb{N}\right\},$$

则$\mathscr{V}$是可数的．显然，$\mathscr{V}$中的每一元是K在X中的序列邻域．若X的开子集$V \supset K$，对于每一$x \in K$，因为$\mathscr{H}$是K的外sn网，存在$n_x \in \mathbb{N}$使得$x \in U_{n_x} \cap V_{n_x} \subset V$．那么$K$的覆盖$\left\{U_{n_x} : x \in K\right\}$有有限子覆盖，记为$\mathscr{U}' = \left\{U_{n_{x_i}} : i \le k\right\}$．令$m = \max\left\{n_{x_i} : i \le k\right\}$，则

$\left(\bigcup \mathscr{U}'\right) \cap \left(\bigcap \{V_n : n \le m\}\right) \subset V$．故$\mathscr{V}$是$K$在$X$中的$sn$网．证毕．

例 4.3.5 将说明：紧子集具有可数外sn网不足以保证紧子集在X中具有可数sn网．

为了下列推论叙述的简洁及后面引用的方便，引入fsn覆盖（fsn-covering)的概念．

定义 4.1.3 空间X的有限集族$\mathscr{F} = \{F_i : i \le n\}$称为$X$的子集$C$的$fsn$覆盖，若存在$C$的有限个闭子集$\{C_i : 1 \le i \le n\}$，其并为$C$，且每一$F_i$是$C_i$在$X$中的序列邻域.

推论 4.1.4 设K是空间X的可度量化的紧子集，下述条件相互等价：

(1) K在X中具有可数sn网；

(2) 存在X的可数集族$\mathscr{H}$满足：若V是K在X中的邻域，则存在$\mathscr{H}$的有限子集$\mathscr{H}'$，使得$\mathscr{H}'$是K的fsn覆盖，且$\bigcup \mathscr{H}' \subset V$.

(3) 存在X的可数集族$\mathscr{H}$，具有性质(★)：若C是K的非空紧子集且V是C在X中的邻域，则存在$\mathscr{H}$的有限子集$\mathscr{H}'$，使得$\mathscr{H}'$是C的fsn覆盖，且$\bigcup \mathscr{H}' \subset V$.

证明：$(1) \Rightarrow (3)$．设K在X中具有可数sn网．由定理 4.1.2，让$\mathscr{H}$是满足

定理 4.1.2 必要性中的 K 在 X 中的可数外 sn 网．下证 $\mathscr{H}$ 具有性质(★)．

若 $x \in C$，则存在 $H_x \in \mathscr{H}$ 使得 $x \in H_x \subset V$，不妨记 $H_x = U_x \bigcap V_x$，其中 U_x 是 X 的开集，且 V_x 是 K 在 X 中的序列邻域．于是 X 的开子集族 $\{U_x : x \in C\}$ 覆盖 C，从而有 C 的有限子覆盖 $\{U_{x_i} : i \le n\}$．仍由 C 的紧性，存在 C 的有限闭覆盖 $\{C_i : i \le n\}$ 使得每一 $C_i \subset U_{x_i}$．对于每一 $i \le n$，置 $H_i = U_{x_i} \bigcap V_{x_i}$，因为 U_{x_i} 与 V_{x_i} 都是 C_i 在 X 中的序列邻域，所以 H_i 是 C_i 在 X 中的序列邻域．显然，$\bigcup\{H_i : i \le n\} \subset V$．

$(3) \Rightarrow (2)$ 是显然的，下面证明 $(2) \Rightarrow (1)$．设 X 的可数集族 $\mathscr{H}$ 满足条件(2)．令

$$\mathscr{W} = \left\{\bigcup \mathscr{H}' : \mathscr{H}' \text{是}\mathscr{H}\text{的有限子集且}\bigcup \mathscr{H}' \text{是}K\text{在}X\text{中的序列领域}\right\},$$

则 $\mathscr{W}$ 是可数的．若 X 中的开集 $V \supset K$，存在 K 的 fsn 覆盖 $\mathscr{H}' \subset \mathscr{H}$，使得 $\bigcup \mathscr{H}' \subset V$，则 $\bigcup \mathscr{H}'$ 也是 K 在 X 中的序列邻域．从而，$\mathscr{W}$ 是 K 在 X 中的可数 sn 网．证毕．

对于 X 的紧子集 K，推论 4.1.4 的条件(3)蕴含 K 的可度量性质．事实上，对于每一 $x \in K$，以 $C = \{x\}$ 利用性质(★)，则存在 $\mathscr{H}$ 的某子族是 x 在 X 中的网，所以 $\{H \bigcap K : H \in \mathscr{H}\}$ 是紧子空间 K 的可数网，从而 K 可度量化．这说明，对于紧子集 K，条件(3)与定理 4.1.2 的条件也是相互等价的．

4.2　度量空间的紧覆盖映像

本节引入两类特别的紧覆盖映射，为问题 1.1.7 的回答做准备．

下面引入的映射分别是 1 序列覆盖映射、序列覆盖映射与紧覆盖映射的有机结合．

定义 4.2.1 设映射 $f : X \to Y$．

(1) f 称为 1-scc 映射(1-scc-map)，若对 Y 的每一紧子集 K，存在 X 的紧子集 L，使得 $f(L) = K$，且对于每一 $y \in K$，存在 $x \in L$ 满足：如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y，那么存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$，使得每一

$x_n \in f^{-1}(y_n)$，$n \in \mathbb{N}$.

(2) f 称为 scc 映射(scc-map)，若对 Y 的每一紧子集 K，存在 X 的紧子集 L，使得 $f(L)=K$，且如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 K 中的某点，那么存在 X 中收敛于 L 中某点的序列 $\{x_n\}$，使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$，$n \in \mathbb{N}$.

显然，1-scc(或 scc)映射是 1 序列覆盖映射(或序列覆盖映射)和紧覆盖映射．例 4.3.5 将说明：度量空间上的 1 序列覆盖且紧覆盖映射未必是 scc 映射.

仅讨论度量空间的紧覆盖映像，其刻画是简单的．验证序列覆盖映射的基本途径是第三章中的引理 3.2.6.

推论 4.2.2 第一可数空间上的紧覆盖、开映射是 1-scc 映射.

证明：设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖、开映射，其中 X 是第一可数空间．对于 Y 的每一紧子集 K，存在 X 的紧子集 L 使得 $f(L)=K$．对于每一 $y\in K$，取定 $x\in L\cap f^{-1}(y)$，并让 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的邻域基，那么每一 $f(B_n)$ 是 y 在 Y 中的邻域．由引理 3.2.6，如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y，那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$，使得序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，故 f 是 1-scc 映射． 证毕.

本节的主要结果是下述定理.

定理 4.2.3 对于拓扑空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网的空间；

(2) X 是某一可度量化空间的 1-scc 映像；

(3) X 是某一可度量化空间的 scc 映像.

证明：(1)$\Rightarrow$(2)．设空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网．对于 X 的每一非空紧子集 K，由定理 4.1.2 及推论 4.1.4，存在 K 在 X 中的可数外 sn 网 $\mathscr{H}_K$ 满足定理 4.1.2 及推论 4.1.4 的性质（★）.

令 $\mathscr{H}=\bigcup\{\mathscr{H}_K : K\text{是}X\text{的非空紧子集}\}$，记 $\mathscr{H}=\{H_\alpha:\alpha\in A\}$．让 $(f,M,X,\mathscr{H})$ 是 Ponomarev 系，即置

$$M=\left\{\alpha=(\alpha_i)\in A^{\omega}:\left\{H_{\alpha_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}\text{形成}X\text{中的某点}x_\alpha\text{的网}\right\},$$

其中 M 赋予离散空间 A 的可数次 Tychonoff 积空间的子空间拓扑，定义关系 f：$M\to X$ 为 $f(\alpha)=x_\alpha$，则 M 是度量空间且 f 是映射(如，见文 [17，引理

1.3.8]).. 下证 f 是 1-scc 映射.

设 K 是 X 的非空子集. 由于 $\mathscr{H}_K$ 是可数的，$\mathscr{H}_K$ 的元组成 K 的 fsn 覆盖(定义 4.1.3)的全体是可数的，记为 $\Phi=\left\{\mathscr{H}_i : i\in\mathbb{N}\right\}$，其中对于每一 $i\in\mathbb{N}$，$\mathscr{H}_i=\left\{H_\alpha\right\}_{\alpha\in\Gamma_i}$ 是 K 的 fsn 覆盖，即存在由 K 的非空闭集组成的 K 的有限覆盖 $\mathscr{F}_i=\left\{F_\alpha\right\}_{\alpha\in\Gamma_i}$ 使得每一 H_α 是 F_α 的序列邻域. 置 $L=\left\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i : \bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}\neq\varnothing\right\}$.

(a) L 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 的闭集，从而 L 是 A^ω 的紧子集.

设 $\gamma=(\gamma_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\setminus L$，则 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\gamma_i}=\varnothing$. 由 K 的紧性，则存在 $i_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\bigcap_{i\le i_0}F_{\gamma_i}=\varnothing$. 令 $W=\left\{(\beta_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i : 对于 i\le i_0 有 \beta_i=\gamma_i\right\}$，则 W 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 中含点 γ 的开集且 $W\cap L=\varnothing$，所以 L 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 的闭集.

(b) 若 $(\alpha_i)\in L$ 且 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}$，则 $\left\{H_{\alpha_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网且每一 H_{α_i} 是 x 的序列邻域.

设 V 是 x 在 X 中的邻域，由于 K 是 X 的正则子空间，存在 x 在 K 中的开邻域 W 使得 $\overline{W}=.\mathrm{cl}_K(W)\subset V$ 应用推论 4.1.4 的性质(★)于 K 的外 sn 网 $\mathscr{H}_K$ 及 K 的紧子集 $\overline{W}$，存在 $\mathscr{H}_K$ 的有限子集 $\mathscr{H}'$ 使得 $\mathscr{H}'$ 是 $\overline{W}$ 的 fsn 覆盖且 $\bigcup\mathscr{H}'\subset V$. 又因为 K 的紧子集 $K\setminus W\subset X\setminus\{x\}$，仍应用推论 4.1.4 于 K 的紧子集 $K\setminus W$，存在 $\mathscr{H}_K$ 的有限子集 $\mathscr{H}''$ 使得 $\mathscr{H}''$ 是 $K\setminus W$ 的 fsn 覆盖且 $\bigcup\mathscr{H}''\subset X\setminus\{x\}$，令 $\mathscr{H}^*=\mathscr{H}'\bigcup\mathscr{H}''$，则 $\mathscr{H}^*$ 是 K 的 fsn 覆盖. 于是存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathscr{H}_k=\mathscr{H}^*$. 由于 $x\in F_{\alpha_k}\subset H_{\alpha_k}\in\mathscr{H}_k$，所以 $H_{\alpha_k}\in\mathscr{H}'$，故 $H_{\alpha_k}\subset V$. 从而 $\left\{H_{\alpha_i}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网. 这时每一 H_{α_i} 是 F_{α_i} 的序列邻域且 $x\in F_{\alpha_i}\subset H_{\alpha_i}$，从而 H_{α_i} 是 x 的序列邻域.

(c) $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

设 $\gamma=(\gamma_i)\in L$，则 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\gamma_i}\neq\varnothing$. 取定 $x\in\bigcap_{i\in N}F_{\gamma_i}$，显然 $x\in K$. 由 (b)，$\gamma\in M$ 且 $f(\gamma)=x$，从而 $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

(d) 若 $x\in K$，则存在 $\gamma\in L$ 满足：如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，那么存

在$a_n \in f^{-1}(x_n)$，使得在M中序列$\{a_n\}$收敛于γ．从而，$K \subset f(L)$．

对于每一$i \in \mathbb{N}$，由于$\mathscr{F}_i$覆盖K且$x \in K$，存在$\gamma_i \in \Gamma_{\gamma_i}$使得$x \in F_{\gamma_i}$．从而$x \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} F_{\gamma_i}$．令$\gamma = (\gamma_i)$，则$\gamma \in L$．由(b)，$f(\gamma) = x$．对于每一$n \in \mathbb{N}$，置$B_n = \{(\beta_i) \in M : 对 i \le n 有 \beta_i = \gamma_i\}$．那么$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\gamma$在$M$中下降的邻域基，且对每一$n \in \mathbb{N}$有$f(B_n) = \bigcap_{i\le n} H_{\gamma_i}$．

事实上，设$\beta = (\beta_i) \in B_n$，那么$f(\beta) \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} H_{\beta_i} \subset \bigcap_{i\le n} H_{\beta_i} = \bigcap_{i\le n} H_{\gamma_i}$，所以$f(B_n) \subset \bigcap_{i\le n} H_{\gamma_i}$．再设$z \in \bigcap_{i\le n} H_{\gamma_i}$，由于$\mathscr{H}_{\{z\}}$是$z$在$X$中的网，可选取$z$在$X$中的网$\{H_{\delta_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{H}$，使当$i \le n$时有$\delta_i = \gamma_i$．令$\delta = (\delta_i) \in A^\omega$，那么$\delta \in B_n$且$z = f(\delta)$，于是$\bigcap_{i\le n} H_{\gamma_i} \subset f(B_n)$．

由(b)，每一$H_{\gamma_i}\,(i \le n)$是x的序列邻域，于是$f(B_n)$是x的序列邻域．因为X中的序列$\{x_n\}$收敛于x，由引理 3.2.6，存在$a_n \in f^{-1}(x_n)$，使得在M中序列$\{a_n\}$收敛于γ．

综上所述，f是 1-scc映射．

(2)$\Rightarrow$(3)是显然的，下面证明(3)$\Rightarrow$(1)．

设$f: M \to X$是scc映射，其中M是可度量化空间．由引理 3.1.9，X的每一紧子集可度量化．对X中的任一紧子集K，存在M中的紧子集L满足f是scc映射的要求．由于M是可度量空间，设L在M中的可数邻域基是$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,往证$\{f(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$K$在$X$中的可数$sn$网．

(e) 由于$f(L) = K$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $K \subset f(V_n)$．设X中的开集$U \supset K$，则$L \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}(U)$，于是存在$m \in \mathbb{N}$使$V_m \subset f^{-1}(U)$，所以$f(V_m) \subset U$．

(f) $\forall\ x \in K$，若X中的序列$\{x_n\}$收敛于x，由scc映射的定义，则存在M中的序列$\{a_n\}$收敛于$a \in L$且每一$a_n \in f^{-1}(x_n)$．对$\forall\ m \in \mathbb{N}$, $a \in L \subset V_m$，于是$\{a_n\}$是终于V_m的，所以序列$\{x_n\}$也是终于$f(V_m)$的，即$f(V_m)$是K在X中的序列邻域．证毕．

下列推论用$1-scc$映射,scc映射来重述 Michael 和 Nagami 的定理 1.1.1．其

中 Fréchet 空间，伪开映射的概念可参见定义 3.1.3 和 3.1.5．通过引理 3.2.7, 容易得到以下推论：

推论 4.2.4 对于拓扑空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是某一可度量化空间的紧覆盖、开映像；

(2) X 是某一可度量化空间的 1-scc、伪开映像；

(3) X 是某一可度量化空间的 scc、伪开映像；

(4) X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数基的空间．

证明：定理 1.1.1 表明(1)$\Leftrightarrow$(4)．由推论 3.2.2， (1)$\Rightarrow$ (2)，(2) $\Rightarrow$ (3)是显然的．下面证明(3) $\Rightarrow$ (4)．设空间 X 是某一可度量化空间的 scc、伪开映像，由定理 4.2.3，空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数的 sn 网．由于度量空间是 Fréchet 空间，且伪开映射保持 Fréchet 空间性质不变， 所以 X 是 Fréchet 空间．再由引理 3.2.7， X 的每一紧子集在 X 中具有可数基．证毕．

问题 4.2.5　紧空间上的 scc 映射是否是 1-scc 映射?

4.3　弱基

本节把上两节的内容应用于紧子集具有可数弱基空间的研究，同时给出一些例子说明相关空间与映射之间的一些不蕴含关系．

弱基的概念可参见定义 3.1.2． 显然，弱基是邻域基概念的深化．弱基与 sn 网是通过序列空间建立联系的．

引理 4.3.1 [16]　设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的子集族．

(1) 若 $\mathscr{B}$ 是 X 的弱基，则 $\mathscr{B}$ 是 X 的 sn 网；

(2) 若 $\mathscr{B}$ 是序列空间 X 的 sn 网，则 $\mathscr{B}$ 是 X 的弱基．

定义 4.3.2　设 $\mathscr{B}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{B}_x$ 是空间 X 的弱基．对于 $A\subset X$，

(a) 集族 $\bigcup_{x\in A}\mathscr{B}_x$ 称为 A 在 X 中的外弱基(outer weak base)；

(b) X 的子集列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 A 在 X 中的可数弱基，若它满足：

(1) 每一 V_n 是 A 在 X 中的弱邻域(weak neighborhood)，即对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 和每一 $x\in A$，存在 $B\in\mathscr{B}_x$ 使得 $B\subset V_n$；

(2) 对 X 中每一包含 A 的开集 V，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $V_n\subset V$．

子集A的外基是A的外弱基，A的外弱基是A的外sn网．另一方面，对于拓扑空间X，点$x \in X$的序列邻域是完全确定的，但x的弱邻域与选定的弱基有关．在定义 4.3.2 中，A的外弱基及A在X中的可数弱基均与空间X中选定的弱基有关．这也表明sn网具有较好的稳定性，与弱基相关的概念较难处理．

由定理 4.1.2 及引理 4.3.1 得下述定理，它给出了问题 1.1.8 中两个条件之间的精确关系．

定理 4.3.3 设K是空间X的紧子集，则K可度量化且在X中具有可数弱基当且仅当存在K在X中的可数外弱基$\mathscr{H}$，满足：$\mathscr{H}$的每一元形如$U \bigcap V$，其中U是X的开集，V是K在X中的弱邻域．

证明：充分性的证明同定理 4.1.2，只须把序列邻域换为弱邻域即可．下证必要性．

设$\mathscr{B} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{B}_x$是空间$X$的弱基，子集列$\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$是$K$在$X$中的可数弱基． 由引理 4.3.1 及定理 4.1.2，存在K在X中的可数外sn网$\mathscr{H} = \bigcup_{x \in K} \mathscr{H}_x$，满足：$\mathscr{H}$的每一元形如$U \bigcap V$，其中$U$是$X$的开集，$V$是$K$在$X$中的弱邻域(定理 4.1.2 中为序列邻域，由于这序列邻域是有限个V_n的交，所以在此是弱邻域)．令$\mathscr{W} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{W}_x$，其中

$$\mathscr{W}_x = \begin{cases} \mathscr{H}_x, & \text{如果} x \in K, \\ \mathscr{B}_x, & \text{如果} x \in X \setminus K. \end{cases}$$

下面证明$\mathscr{W}$是X的弱基．这只须验证：对于$O \subset X$，O是X的开集当且仅当对于每一$x \in O$，存在$W \in \mathscr{W}_x$使得$W \subset O$．

如果O是X的开集且$x \in O$，由于$\mathscr{W}_x$是x在X中的网，存在$W \in \mathscr{W}_x$使得$W \subset O$．如果O满足对于每一$x \in O$，存在$W \in \mathscr{W}_x$使得$W \subset O$，于是当$x \in K$时，存在$H \in \mathscr{H}_x$，使得$x \in H \subset O$，记$H = U \bigcap V$，其中U是X的开集，V是K在X中的弱邻域．由定义 4.3.2，存在$B \in \mathscr{B}_x$使得$B \subset W \subset O$．因为$\mathscr{B}$是X的弱基，所以O是X的开集．故，$\mathscr{H}$是K在X中的可数外弱基． 证毕．

由于满足定理 4.3.3 条件的空间未必是序列空间，所以定理 4.3.3 不是定理 4.1.2 的直接推论．

下述定理回答了问题 1.1.7.

定理 4.3.4　对于拓扑空间 X，下述条件相互等价：

(1) X 是某一可度量化空间的 1-scc、商映像；

(2) X 是某一可度量化空间的 scc、商映像；

(3) X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数弱基的空间．

证明：(1) $\Rightarrow$ (2)是显然的．(2) $\Rightarrow$ (3)．设 X 是某一可度量化空间的 scc、商映像． 由定理 4.2.3，X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网的空间．由于度量空间是序列空间且商映射保持序列空间性质，于是 X 是序列空间． 由引理 4.3.1，X 的每一紧子集在 X 中具有可数弱基．

(3) $\Rightarrow$ (1)． 设 X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数弱基的空间．由定理 4.2.3 及引理 4.3.1，存在度量空间 M 及 $1-scc$ 映射 $f:M\to X$． 由于空间 X 的每一点具有可数弱基，即 X 是弱第一可数空间，从而 X 是序列空间 [28]．由引理 3.1.6，f 是商映射，故 X 是可度量化空间的 $1-scc$、商映像．

下述例子否定回答了问题 1.1.8，同时说明在定理 4.1.2、推论 4.1.4 和定理 4.3.3 中的一些附加条件是必需的．

例 4.3.5　Arens 空间 S_2 [18，例 3.2.3]：

(1) 可分度量空间的 1 序列覆盖、紧覆盖、商、有限到一映像；

(2) 存在具有可数外弱基的紧子集 K，并且 K 在 S_2 中不具有可数 sn 网．

记 $S_2=\{0\}\cup\mathbb{N}\cup\mathbb{N}^2$． 对于每一 $n,m,k\in\mathbb{N}$，令 $V(n,m)=\{n\}\cup\{(n,k):k\ge m\}$． S_2 赋予下列拓扑，称为 Arens 空间：$\mathbb{N}^2$ 中的点是孤立点； 对于 $n\in\mathbb{N}$，点 n 的邻域基元形如 $V(n,m)$，其中 $m\in\mathbb{N}$；点 0 的邻域基元形 $\{0\}\cup\left(\cup\{V(n,m_n):n\ge i\}\right)$，其中 $i,m_n\in\mathbb{N}$． 注意到，在 S_2 中不存在 N^2 中的序列收敛于 0．

置

$$\mathscr{B}_x=\begin{cases}\{\{x\}\}, & \text{如果} x\in\mathbb{N}^2,\\ \{V(x,m):m\in\mathbb{N}\}, & \text{如果} x\in\mathbb{N},\\ \{P_m:m\in\mathbb{N}\}, & \text{如果} x=0.\end{cases}$$

其中 $P_m=\{0\}\cup\{n\in\mathbb{N}:n\ge m\}$． 则 $\bigcup_{x\in S_2}\mathscr{B}_x$ 是 S_2 的弱基． 从而，S_2 具有可

数弱基.

(1) 令$M_1=\{0\}\bigcup\mathbb{N}$，赋予下述拓扑：$\mathbb{N}$中的点是孤立点；点0的邻域基元形如$\{0\}\bigcup\{k\in\mathbb{N}:k\geq m\}$，其中$m\in\mathbb{N}$，则$M_1$是紧度量空间.

令$M_2=\mathbb{N}\times(\{0\}\bigcup\mathbb{N})$，赋予下述拓扑：$\mathbb{N}^2$中的点是孤立点；对于$n\in\mathbb{N}$，点$(n,0)$的邻域基元形如$\{(n,0)\}\bigcup\{(n,k):k\geq m\}$，其中$m\in\mathbb{N}$．则$M_2$是可分度量空间.

置$M=M_1\oplus M_2$，则M是可分的度量空间．定义$f:M\to S_2$如下:

$$f(x)=\begin{cases}x, & 如果x\in M_1\oplus\left(M_2\setminus(\mathbb{N}\times\{0\})\right),\\ n, & 如果x=(n,0)\in\mathbb{N}\times\{0\}。\end{cases}$$

则f是1序列覆盖、紧覆盖、商、有限到一映射.

(2) 令$K=\{0\}\bigcup\mathbb{N}$．显然，K是S_2的紧子集．因为K是可数集，所以$\bigcup_{x\in K}\mathscr{B}_x$是$K$在$S_2$中的可数外弱基．假设$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$K$在$S_2$中的$sn$网．对于每一$n\in\mathbb{N},n\in K\subset U_n$，于是$U_n$是$n$在$S_2$中的序列邻域，由于序列$\{(n,m)\}_{m\in\mathbb{N}}$收敛于$n$，所以存在$m_n\in\mathbb{N}$使得$(n,m_n)\subset U_n$．置$U=S_2\setminus\{(n,m_n):n\in\mathbb{N}\}$，则$U$是$K$在$S_2$中的邻域且每一$U_n\not\subset U$．因此$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$不是$K$在$S_2$中的可数$sn$网，矛盾．从而，$K$在$S_2$中也不具有可数弱基．即证.

下例说明定理4.2.3的条件严格弱于定理4.3.4的条件.

例 4.3.6 存在非序列空间X：每一紧子集可度量化且在X中有可数sn网.

让$X=\mathbb{N}\bigcup\{p\}$，其中$p\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$，赋予$\beta\mathbb{N}$的子空间拓扑．由于$X$中不存在非平凡的收敛序列，所以$X$的紧子集都是有限集且每一单点集均是$X$的序列开集．这说明$X$的每一紧子集可度量化且在$X$中具有可数$sn$网，但$X$不是序列空间．从而，$X$不是度量空间的商映像．如果让$M$是集$X$赋予离散拓扑的空间，定义$f:M\to X$是恒等映射，则$M$是度量空间,$f$是$1-scc$映射，但是$f$不是商映射.

下例说明定理4.3.4的条件严格弱于推论4.2.4的条件.

例 4.3.7 存在非 Fréchet 空间X：每一紧子集可度量化且在X中有可数弱

基.

如例 3.2.15 中的空间 X 不是 Fréchet 空间，下面只需证明此 X 是某一可度量化空间的 $1-scc$ 、商映像．置

$$M=\left(\oplus\left\{I\times\left\{\frac{1}{n}\right\}:n\in\mathbb{N}\right\}\right)\oplus\left(\oplus\left\{\{t\}\times S_1:t\in I\right\}\right),$$

则 M 是可度量化空间，让 $f:M\to X$ 是自然映射．下证 f 是 1-scc 映射．

设 K 是 X 的非空紧子集．由于 $I\times\{0\}$ 是 X 的闭离散子空间，故 $K\bigcap\left(I\times\{0\}\right)$ 是有限集，记为 $\left\{(t_i,0)\right\}_{i\le m}$． 令 $K_0=\bigcup_{i\le m}\left(\{t_i\}\times S_1\right)$，则若存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$K\subset K_0\bigcup\left(\bigcup_{j\le n}\left(I\times\left\{\frac{1}{j}\right\}\right)\right)\text{ (如，见文[15，例 2.8.16]).}$$

置 $L=\left(\underset{i\le m}{\oplus}\left(\left(\{t_i\}\times S_1\right)\bigcap K\right)\right)\oplus\left(\underset{j\le n}{\oplus}\left(\left(I\times\left\{\frac{1}{j}\right\}\right)\bigcap K\right)\right)$ 那么 L 是 M 的紧子集，且 $f(L)=K$． 让 $x\in K\subset X$．

若 $x\in\bigcup_{j\le n}\left(I\times\left\{\frac{1}{j}\right\}\right)$，则存在 $j\le n$ 和 $a\in L$ 使得 $a\in\left(I\times\frac{1}{j}\right)\bigcap f^{-1}(x)$． 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，则 $\{x_n\}$ 只有有限项不在 $I\times\left\{\frac{1}{j}\right\}$ 中，所以可以取定 $a_n\in f^{-1}(x_n)$，使得序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a．

若 $x\in K_0\setminus\left(\bigcup_{j\le n}\left(I\times\left\{\frac{1}{j}\right\}\right)\right)$，则存在唯一的 $i\le m$ 和 $s\in S_1$ 使得 $x=(t_i,s)$，从而存在 $a\in\left(\{t_i\}\times S_1\right)\bigcap f^{-1}(x)$，则 $a\in L$． 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x，则 $\{x_n\}$ 只有有限项不在 $\{t_i\}\times S_1$ 中，所以可以取定 $a_n\in f^{-1}(x_n)$，使得序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a．

由定理 4.3.4，X 的每一紧子集可度量化且在 X 中有可数弱基.

因为具有点可数基的空间是度量空间的紧覆盖的开映像[24]，所以具有点可数基的空间中的每一紧子集具有可数外基．本文最后提出下述问题.

问题 4.3.8 具有点可数弱基的空间中的每一紧子集是否具有可数外弱基？

参考文献

[1] Alexandroff P S, Urysohn P. Sur les espaces topologiques compacts [J]. Bull Intern Acad Pol Sci Ser A, 1923: 5-8.

[2] Arhangel'skiĭ A V. On open and almost-open mappings of topological spaces [J] (in Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1962, 147: 999-1002.

[3] Arhangel'skiĭ A V. Some type of quotient mappings and the relations between classes of topological spaces[J] (in Russian). Dokl Akad Nauk SSSR, 1963, 153: 743-746.

[4] Arhangel'skiĭ A V. Mappings and spaces [J]. Russian Math Survey, 1966, 21: 115-162.

[5] Chen Huaipeng. Compact-coverings maps and k -networks [J]. Proc Amer Math Soc, 2003, 131: 2623-2632.

[6] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice [J]. Fund Math, 1965, 57: 107-115.

[7] Frink A H. Distance functions and the metrization problem [J]. Bull Amer Math Soc, 1937, 43: 133-142.

[8] Gale D. Compact sets of functions and function rings [J]. Proc Amer Math Soc, 1950, 1: 303-308.

[9] 高国士. 拓扑空间论(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[10] Ge Y. Weak forms of open mappings and strong forms of sequence-covering mappings [J] Mate Vesnik, 2007, 59: 1-2.

[11] Gruenhage G. Generalized metric spaces [C]. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1984, 423-501.

[12] Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers [J]. Pacific J Math, 1984, 113: 303-332.

[13] Hart K P, Nagata J, Vaughan J E. Encyclopedia of General Topology [M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2004.

[14] 李克典. 双层空间的刻画[J]. 数学物理学报, 2010, 30A: 649-655.

[15] 林寿. 广义度量空间与映射[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[16] 林寿. 关于序列覆盖 s 映射[J]. 数学进展, 1996, 25: 548-551.

[17] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[18] 林寿. 度量空间与函数空间的拓扑[M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[19] 林寿. 广义度量空间与映射(第二版)[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[20] 林寿, 燕鹏飞. 关于序列覆盖紧映射[J]. 数学学报, 2001, 44: 175-182.

[21] Lin S, Yan P. Note on cfp -covers [J]. Comment Math Univ Carolinae, 2003, 44: 295-306.

[22] McAuley L F. A relation between perfect separability and normality in semimetric spaces [J]. Pacific J Math, 1956, 6: 315-326.

[23] Michael E A. $\aleph_0$ -spaces [J]. J Math Mech, 1966, 15: 983-1002.

[24] Michael E A, Nagami K. Compact-covering images of metric space [J]. Proc Amer Math Soc, 1973, 37: 260-266.

[25] van Mill J, Reed G M. Open Problems in Topology [M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1990.

[26] 彭良雪, 王丽霞. 关于 CSS 空间及相关结论[J]. 数学物理学报, 2010, 30A: 358-363.

[27] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient maps [J]. General Topology Appl, 1971, 1: 143-154.

[28] Siwiec F, On defining a space by a weak base [J]. Pacific J Math, 1974, 52: 233-245.

[29] Tkachuk V V. Monolithic spaces and D -spaces revisited [J]. Topology Appl, 2009, 156: 840-846.

[30] Weil A. Sur lesespa à stucture uniforme et sur la topologie générale [M]. Paris, 1938.

[31] 燕鹏飞. 度量空间的紧映像[J]. 数学研究, 1997, 30: 185-187.

致 谢

三年的研究生求学生涯即将结束，值此毕业论文完成之际，谨向所有关心、帮助和支持过我的人表示最真诚的感谢！

首先衷心感谢我的导师林寿教授，本论文是在林老师的亲切关怀和悉心指导下完成的．在整个研究生学习期间，林老师为我创造了良好的学习环境和学习氛围，始终给予我严格的要求、充分的信任、热情的鼓励和全面锻炼的机会，所有这些一起奠定了我顺利完成论文的坚实基础．林老师严肃的科学态度，严谨的治学精神，精益求精的工作作风深深地感染和激励着我，从他身上我学到了许多处事之理、做人之道，并将使我终身受益．三年来，林老师不仅在学业上给予我精心指导，同时在思想上、生活上给我以无微不至的关怀．在这即将完成学业之际，谨向导师致以诚挚的谢意和崇高的敬意！

感谢李进金院长和李克典教授三年来的关心和帮助！

感谢我的师兄林福财，师姐郑春燕和师弟张金煌和朱忠景给我的关心和帮助！

感谢数学与信息科学系的领导和老师们三年来的关心和帮助，是他们的教育和鼓励不断激励着我．同时，向三年来一直给予我帮助和支持的同学们表示诚挚的谢意！

感谢我的家人给予我精神上、生活上、学习上的关怀和支持，是他们给了我前进的动力，在此祝他们身体健康，快乐幸福！

攻读硕士学位期间完成的论文

1. **张静**. *LF* 拓扑空间的子空间的序列连通性. 漳州师范学院学报，2010,(1):18-22.

2. **张静**. Frink 引理的注记. 数学研究，2010，43（2）：167-170.

3. **张静**. On compact-covering and sequence-covering images of metric spaces. 已被 Matematicki Vesnik 录用.

4. 林寿，**张静**.弱基与度量空间的紧覆盖映像. 审理中.