四 川 大 学

博 士 学 位 论 文

题 目 仿 拓 扑 群 与 rectifiable 空 间 的 研 究

作 者 林 福 财 完成日期 2011 年 3 月 25 日

培 养 单 位 四川大学

指 导 教 师 林 寿 教授

专 业 基 础 数 学

研 究 方 向 拓 扑 学

授予学位日期 年 月 日

摘　要

仿拓扑群与 rectifiable 空间的研究

基础数学专业

研究生　林福财　　**指导教师**　林寿

本文主要致力于拓扑代数中拓扑群、仿拓扑群、rectifiable 空间的研究, 共分四部分.

第一部分(即第二章): 主要讨论仿拓扑群与 rectifiable 空间的基数不变量、广义度量性质、局部紧性和 Moscow 性质, 其中主要证明了 (1) 若 A 和 B 都是仿拓扑群 G 的 ω-narrow 子集, 则 AB 也是 G 中 ω-narrow 子集, 这肯定地回答了 A.V. Arhangel'shiĭ 和 M. Tkachenko 的问题 [10, Open problem 5.1.9]; (2) 若 G 是局部紧和可分的 rectifiable 空间, 则 G 是 σ 紧的, 这肯定回答了 A.V. Arhangel'skiĭ 和 M.M. Choban 在 [Topology Appl., **157**(2010), 789-799] 的一个公开问题; (3) rectifiable 空间包含一个 (闭) 拷贝 S_ω 当且仅当它有一个 (闭) 拷贝 S_2; (4) 在 $\flat = \omega_1$ 的假设下, 具有 α_1 性质的紧 rectifiable 空间是可度量化的当且仅当具有 α_4 性质的局部紧 rectifiable 空间是可度量化的; (5) 点态标准弱伪紧的 rectifiable 空间是 Moscow 空间.

第二部分(即第三章): 讨论关于 rectifiable 空间上 Vietoris 拓扑和定义了 rectifiable 完全并讨论相关性质, 其中主要结果为 (1) 定义 rectifiable 空间 G 的紧子集族 $C(G)$ 上右 loop 结构和半右 loop 结构, 证明了 $(C(G), \cdot)$ 具有右 loop 结构当且仅当 $|G| = 1$; (2) 在 rectifiable 空间 G 的紧子集族 $C(G)$ 上赋予的 Vietoris 拓扑, 证明了若 G 是局部紧的 rectifiable 空间, 那么赋予 Vietoris 拓扑的空间 $(C(G), \cdot)$ 是拓扑半右 loop; (3) 定义了 rectifiable 完全, 证明了局部紧的 rectifiable 空间是 rectifiable 完全的.

第三部分(即第四章): 本章系统讨论了拓扑群、仿拓扑群、rectifiable 空间的 Hausdorff 紧化的余, 其中主要证明了 (1) 若 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG\setminus G$ 是具有局部点可数 k 网的局部 k 空间, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的, 这肯定地回答了刘川和林寿关于拓扑群的紧化的余的两个问题, 见 [Topology Appl., **156**(2009), 849–854] 和 [Topology Appl., **157**(2010), 1966-1974]; (2) 若拓扑群 G 的余具有局部拟 G_δ 对角线, 则 G, bG 是可分与度量化的, 这推广了

A.V. Arhangel'skiĭ 和刘川的结果; (3) 若 G 是非局部紧的仿拓扑群, 那么 G 的每一个余或具有 Baire 性质或是 meager 和 Lindelöf, 这给出了仿拓扑群的 Hausdorff 紧化的余的二岐性定理; (4) 给出例子说明存在仿拓扑群 X 使得某 Hausdorff 紧化 bX 的余不是伪紧的也不具有 meager 性质, 这否定回答了 D. Basile 和 A. Bella 在 [Comment. Math. Univ. Carolin., **50(4)**(2009), 607–613] 中的一个公开问题; (5) 若 rectifiable 空间 G 的 Hausdorff 紧化的余具有局部拟 G_δ 对角线, 那么 G, bG 是可分与度量化的.

第四部分(即第五章): 本章主要讨论自由仿拓扑群的特征和拓扑嵌入问题, 其中主要证明了 (1) 对 Tychonoff 空间 X 有 $\chi(AP(X)) = D(\mathscr{P}_X, \leq) = d({}^\omega\mathscr{U}_X, \leq)$, 见定理 5.1.16 和 5.1.18; (2) 若 X 是 Tychonoff 空间 Y 的任意子空间, 那么自然映射 $\hat{e}_{X,Y} : AP(X) \to AP(Y)$ 是拓扑单同态 (拓扑嵌入) 当且仅当 X 是拟 P^* 嵌入 Y, 见定理 5.2.7.

关键词: 拓扑群; 仿拓扑群; rectifiable 空间; 度量性; 自由交换仿拓扑群; Hausdorff 紧化; 余.

Abstract

Researches on rectifiable spaces and paratopological groups

Major: Fundamental Mathematics

Graduate Student: Lin Fucai **Supervisor:** Lin Shou

This thesis is devoted to studying topological groups, paratopological groups and rectifiable spaces in the theory of topological algebra. The contents are arranged into four parts.

In the first part (Chapter 2), we mainly discuss the cardinal invariants, generalized metric properties, local compactness and Moscow properties on paratopological groups or rectifiable spaces, where we mainly show that (1) if A and B are ω-narrow subsets of a paratopological group G, then AB is ω-narrow in G, which gives an affirmative answer for A.V. Arhangel'shiĭ and M. Tkachenko's open problem [10, Open problem 5.1.9]; (2) if G is separable and locally compact rectifiable space, then G is σ-compact, which gives an affirmative answer for A.V. Arhangel'skiĭ and M.M. Choban's open problem [Topology Appl., **157**(2010), 789-799]; (3) a rectifiable space G contains a (closed) copy of S_ω if and only if G has a (closed) copy of S_2; (4) under the assumption of $\flat = \omega_1$, locally compact α_4-rectifiable spaces are metrizable if and only if compact α_1-rectifiable spaces are metrizable; (5) a pointwise canonically weakly pseudocompact rectifiable space is Moscow.

In the second part (Chapter 3), we mainly discuss the Vietoris topology on rectifiable spaces, and define the concept of rectifiable complete and investigate some properties, where the main results are that (1) we define the concepts of right loop and semi-right loop on the family $C(G)$ of all compact subsets of rectifiable space G, and obtain that $(C(G), \cdot)$ is right loop if and only if $|G| = 1$; (2) if G is a locally compact rectifiable space then $(C(G), \cdot)$ with Vietoris topology is topological semi-right loop; (3) we define the rectifiable completeness of a rectifiable space, and show that a locally compact rectifiable space is rectifiable complete.

In the third part (Chapter 4), we systematically discuss the remainders of the Hausdorff compactification of topological groups, paratopological groups or rectifiable spaces, where we mainly prove that (1) if G is a non-locally compact topological group and $Y = bG \setminus G$ is a locally k-space with a point-countable k-network, then G and bG are separable and metrizable spaces, which gives an affirmative answer two open problems of Chuan Liu and Shou Lin's, see [Topology Appl., 156(2009), 849–854] and [Topology Appl., **157**(2010), 1966-1974], respectively; (2) if the remainders of the Hausdorff compactification of topological groups has locally quasi-G_δ diagonal, then G, bG are separable and metrizable, which extend the corresponding results Arhangel'skiĭ and Chuan Liu's; (3) if G is a non-locally compact paratopological group, then either every remainder of G has the Baire property, or every remainder of G is meager and Lindelöf, which give out a dichotomy theorem for remainders in compactifications of paratopological groups; (4) we give out an example to explain that there exists a paratopological group X such that some Hausdorff compactification bX of X has a remainder which is neither pseudocompact nor meager, which gives a negative answer for D. Basile and A. Bella's open problem [Comment. Math. Univ. Carolin., **50(4)**(2009), 607–613]; (5) if the remainders of the Hausdorff compactification of rectifiable space G has locally quasi-G_δ diagonal, then G, bG are separable and metrizable.

In the fourth part (Chapter 5), we mainly discuss the character and the topological embedding of free Abelian paratopological groups, where the main results are that (1) if X is a Tychonoff space, then $\chi(AP(X)) = D(\mathscr{P}_X, \leq) = d({}^{\omega}\mathscr{U}_X, \leq)$, see theorems 5.1.16 and 5.1.18, respectively; (2) if X is an arbitrary subspace of a Tychonoff space Y, then the natural mapping $\hat{e}_{X,Y} : AP(X) \to AP(Y)$ is a topological monomorphism if and only if X is quasi-P*-embedded in Y, see Theorem 5.2.7.

Key Words: topological groups; paratopological groups; rectifiable spaces; metrizabilities; free Abelian paratopological groups; Hausdorff compactifications; remainders.

引 言

拓扑和代数是数学中的两个基本领域, 在研究中取着相互补充的角色. 拓扑主要是研究连续与收敛, 从而为研究极限的概念提供一个框架. 大部分研究的拓扑主要致力于无限集和自己本身的无限结构, 从某种意义上说其研究的方法是多种多样的. 代数主要研究各种各样的运算, 从而为算法和计算提供了基础, 从某种意义上说其方法本质上确是有限的 [10]. 因为这些本质上差别, 使得如今的代数与拓扑的发展越来越独立. 但是在数学的高水平中, 如函数分析、动力系统、表示理论等等, 代数与拓扑又有着很密切的联系. 数学中许多重要的研究方向都有着代数的表示和拓扑的结构, 如拓扑函数分析、线性拓扑、拓扑群、拓扑域、变换群和拓扑格等等. 因为代数与拓扑本质是由集合所确定, 这使得它们自然而然地联系在一起, 如变换群就是一个典型的例子. 显然, 代数运算与拓扑联系的规则是运算是连续或分离连续. 近几年来, 拓扑群、仿拓扑群和 rectifiable 空间理论的研究成为在研究拓扑与代数结合的新的热门的研究方向, 所取得结果也是层出不穷, 见 [10]. 特别地, G. Birkhoff 和 S. Kakutani 证明了每一个第一可数的拓扑群是可度量化的 [21, 46], 拓扑学家们发现具有代数结构的拓扑空间自身具有更良好的拓扑结构, 更引起人们对拓扑代数的兴趣. 最近, 一些拓扑学家研究具有代数结构的广义度量性质, 如 [7, 11, 26, 47, 48]. 所谓的广义度量空间, 指的是这样的一些空间类, 有益于刻画可度量性且继承了度量空间的的一些优美性质和度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类 [38, 41]. 自从上世纪 50 年代初 R. H. Bing [25], J. Nagata [58] 和 Yu. Smirnov [80] 给出了度量空间的内在刻画以来, 对 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理的各种推广形成了形形色色的广义度量空间.

仿拓扑群和 rectifiable 空间是拓扑群的重要推广, 很多拓扑学家对它们的研究产生了很大的兴趣, 也取得了许多让人意想不到的结果. A. Bouziad 证明了每一个 *Čech* 完全的半拓扑群是拓扑群 [17]; A.S. Gul′ko 证明了每一个第一可数的 rectifiable 空间是可度量化的 [35]; 刘川和林寿教授证明了每一具有左不变对称度量的的仿拓扑群是拓扑群 [48]. 但是对于拓扑群和 rectifiable 空间的研究远远没有结束, 有很多问题至今仍然是公开问题. 第二章主要讨论仿拓扑群与 rectifiable 空间的基数不变量、广义度量性质、局部紧性和 Moscow 性质, 分别肯定第回答了 A.V. Arhangel'shiĭ 和 M. Tkachenko 在 [10] 中一个公开问题及 A.V. Arhangel'skiĭ 和 M.M. Choban 在 [13] 中一个公开问题.

Weil 完全性在一般拓扑学是一个极其重要的概念, 具体可见 [10] 和 [32]. 本文的第三章主要是讨论 rectifiable 空间上的紧子集族赋予的 Vietoris 拓扑的空间所具有的代数结构. 另外, 我们定义了 rectifiable 完全, 证明了局部紧的 rectifiable 空间是 rectifiable 完全的. 最后, 我们还证明了 rectifiable 空间上的开映射定理.

对拓扑空间的 Hausdorff 紧化的余的研究是一般拓扑学的一个研究方向. 由于对拓扑空间的紧化比较神秘, 所以对拓扑空间的 Hausdorff 紧化的余的研究往往使一些拓扑学家望而怯步. 然而, 一个拓扑空间 Hausdorff 紧化的余到底属于什么样的空间类是一个重要问题, 因为依此我们可以对拓扑空间进行一些归类. M. Henriksen 和 J. Isbell 证明了 Tychonoff 空间 X 是可数型当且仅当 X 的任何 (或某一) Hausdorff 紧化的余是 Lindelöf. 近年来, 著名拓扑学家 A.V. Arhangel'skiĭ 取得很多重要的成果, 特别是二岐性定理的取得: 若 G 是拓扑群, 那么 G 的 Hausdorff 紧化的余或者是伪紧的或者是 Lindelöf. 二岐性定理的取得使拓扑学家们对该问题的可能性解决看到了曙光, 运用二岐性定理得到了一些重要结果, 具体见 [11, 12, 13, 47, 48]. 本文的第四章系统讨论了拓扑群、仿拓扑群、rectifiable 空间的 Hausdorff 紧化的余, 肯定地回答了刘川教授和林寿教授的公开问题 [47, 48]. 另外, 否定回答了 D. Basile 和 A. Bella 在 [18] 中的公开问题.

1941年, A.A. Markov 为了构造拓扑群在 [54] 引入了自由拓扑群的定义. 至今, 自由拓扑群成为在拓扑群理论研究的定理证明和提供例子的重要且强有力的工具, 具体可见 [10]. 类似于自由拓扑群, S. Romaguera, M. Sanchis 和 M.G. Thackenko 引入了自由仿拓扑群的定义 [68]. 最近, N.M. Pyrch 和 A.V. Ravsky 在自由仿拓扑群方面做了一系列的工作, 如 [61, 62, 63]. 本文的第五章主要讨论自由仿拓扑群的特征和拓扑嵌入问题, 继续完善了自由仿拓扑群方面的工作.

目　录

第一章　预备知识

§1.1　记号和术语

约定: 第二、三、五章的空间均指满足 $\mathbf{T}_2$ 分离公理的拓扑空间, 第四章的空间均指满足 Tychonoff 分离公理的拓扑空间.

本节定义文中常用的一些记号和术语.

1.1.1 一些记号

以 $\mathbb{R}$ 表示实直线, $\mathbb{N},\omega,\mathbb{Q},\mathbb{P},\mathbb{I}$ 和 $\mathbb{R}^+$ 分别表示正整数集、自然数集、有理数集、无理数集、单位闭区间和非负实数集. ω 也表示最小的无限序数. ω_1 表示最小的不可数序数.

对空间 X, $\tau(X)$ 表示 X 的拓扑, $\tau^c(X)$ 表示 X 中闭集的全体. 对 X 的子集 A 及 X 的子空间 Y 的子集 Z,

$\overline{A}$ 或 $\mathrm{cl}(A)$ 表示 A 在 X 中的闭包;

A° 或 $\mathrm{int}(A)$ 表示 A 在 X 中的内部;

∂A 表示 A 在 X 中的边界;

A^d 表示 A 在 X 中的聚点的集合;

$\mathrm{cl}_Y(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的闭包;

$\mathrm{int}_Y(Z)$ 表示 Z 在 Y 中的内部.

集合 S 的基数记为 $|S|$. 空间 X 的势定义为

$$\omega(X)=\omega+\min\{|\mathscr{B}|:\mathscr{B}\text{ 是空间 }X\text{ 的基}\}.$$

空间 X 的稠密度定义为

$$d(X)=\omega+\min\{|D|:D\text{ 是空间 }X\text{ 的稠密子集}\}.$$

空间 X 的特征定义为

$$\chi(X)=\sup\{\chi(X,x):x\in X\},$$

其中 X 在点 x 的特征定义为

$$\chi(X,x)=\omega+\sup\{|\mathscr{B}_x|:\mathscr{B}_x\text{ 是空间 }X\text{ 在点 }x\text{ 的邻域基}\}.$$

空间 X 的伪特征定义为

$$\psi(X)=\sup\{\psi(X,x):x\in X\},$$

其中 X 在点 x 的伪特征定义为

$$\psi(X,x)=\omega+\min\{|\mathscr{G}|:\mathscr{G}\text{ 是空间 }X\text{的开集族且 }\cap\mathscr{G}=\{x\}\}.$$

空间 X 的胞腔度定义为

$$c(X)=\omega+\sup\{|\mathscr{A}|:\mathscr{A}\text{ 是空间 }X\text{ 的不相交的非空开集族}\}.$$

空间 X 的紧覆盖数定义为

$$k(X)=\omega+\min\{|\mathscr{K}|:\mathscr{K}\text{ 是空间 }X\text{ 的紧覆盖}\}.$$

设 X 是拓扑空间. X 的非空开子集的集合 $\mathscr{U}$ 称为点 x 的 π 基, 若对点 x 的每一邻域 O, 则存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $U\subset O$. 点 x 的 π 特征 定义为

$$\pi\chi(x,X)=\min\{|\mathscr{U}|:\mathscr{U}\text{ 是点 }x\text{ 在 }X\text{ 的 }\pi\text{ 基}\}.$$

X 的 π 特征 定义为

$$\pi\chi(X)=\sup\{\pi\chi(x,X):x\in X\}.$$

1.1.2 空间上的映射

设 X,Y 是空间, $f:X\to Y$ 是连续映射.

f 称为开映射, 若对 X 中每一开集 U 有 $f(U)$ 是 Y 中的开集.

f 称为闭映射, 若对 X 中每一闭集 F 有 $f(F)$ 是 Y 中的闭集.

f 称为商映射, 若对 Y 中每一子集 U 是 Y 中的开集当且仅当 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集.

1.1.3 空间的运算

设 Φ 是一拓扑性质.

(1) Φ 称为可加的, 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族, 则拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 具有性质 Φ.

(2) Φ 称为可积的 (有限可积的, 可数可积的), 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是一族具有性质 Φ 的空间族 (且 Λ 是有限集, Λ 是可数集), 则积空间 $\prod_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 也具有性质 Φ.

(3) Φ 称为被映射类 $\mathscr{L}$ 保持 (逆保持), 若映射 $f:X\to Y$, 其中 $f\in\mathscr{L}$ 且空间 X (空间 Y) 具有性质 Φ, 则空间 Y (空间 X) 也具有性质 Φ.

§1.2 广义度量空间类

1.2.1 第一可数空间的推广

对空间 X, X 中非空有限集视为一确定的平凡收敛序列. X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为非平凡的, 若各 x_n 是互不相同的. $\{x_n\}$ 称为是终于子集 $A \subset X$ 的, 如果存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x_n : n > m\} \subset A$.

空间 X 称为关于 $\mathscr{P}$ 具有弱拓扑, 如果对于 $A \subset X$, A 是 X 的闭子集当且仅当对于每一 $P \in \mathscr{P}$, $P \cap A$ 是 P 的闭子集. 若 X 称为关于 $\mathscr{P}$ 具有弱拓扑, 我们也称 X 被 $\mathscr{P}$ 确定.

定义 1.2.1 *[36] 空间X 称为是 k 空间, 若 X 关于 X 中的全体紧子集组成的集族具有弱拓扑.*

定义 1.2.2 *[34] 空间 X 的子集 P 称为是点 x 的序列邻域, 若 X 中每一收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 都终于 P. X 的子集 $U \subset X$ 称为是 X 的序列开集, 若 U 是其中每一个点的序列邻域. 序列开集的补集称为是序列闭集. X 称为是序列空间, 若 X 中每一个序列开集是开的.*

若 A 是空间 X 的子集, 则记 $[A]^{Seq}$ 为 A 的序列闭包, 即: A 中所有收敛序列的极限点的集合. 显然, $A \subset [A]^{seq}$. 在 $\alpha \in \omega_1 + 1$ 上用归纳法, 可定义 $[A]_\alpha$ 如下: $[A]_0 = A, [A]_{\alpha+1} = [[A]_\alpha]^{seq}$ 和对极限序 α 有 $[A]_\alpha = \cup\{[A]_\beta : \beta < \alpha\}$. 易证得 $[A]_{\omega_1+1} = [A]_{\omega_1}$, 则空间 X 是序列当且仅当对每一 $A \subset X$ 有 $\overline{A} = [A]_{\omega_1}$. 对序列空间 X, X 的序列序 $so(X)$ 定义为

$$so(X) = \min\{\alpha \in \omega_1 + 1 : \text{对每一 } A \subset X \text{ 有 } \overline{A} = [A]_\alpha\}.$$

定义 1.2.3 *[34] 空间X 称为是 Fréchet-Urysohn 空间, 如果对每一 $A \subset X$ 以及 $x \in \overline{A}$, 存在 A 中序列收敛于 x.*

定义 1.2.4 *[77] X 称为强 Fréchet-Urysohn 空间, 若 $\{A_n\}$ 是 X 的递减的集列且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$, 则存在 $x_n \in A_n$, 使 $\{x_n\}$ 收敛于 x.*

定义 1.2.5 *设$\mathscr{P}$ 是空间 X 的一个覆盖. 集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的网 [1], 如果对 $x \in U \in \tau$, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使 $x \in P \subset U$.*

定义 1.2.6 设 $\mathscr{P}=\bigcup_{x\in X}\mathscr{P}_x$ 是空间 X 的覆盖且满足对每一 $x\in X$ 有 *(a)* 若 $U,V\in\mathscr{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathscr{P}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$; *(b)* $\mathscr{P}_x$ 是 x 的网.

集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基 [2], 如果对每一 $G\subset X$ 和 $x\in G$ 存在 $P\in\mathscr{P}_x$ 使得 $P\subset G$, 那么 G 是 X 中的开集. X 称为弱第一可数的, 若对每一 $x\in X$ 有 $\mathscr{P}_x$ 是可数的.

定义 1.2.7 [10] 设 ζ 和 η 是 X 的非空子集族.

1. 集族 ζ 称为空间 X 的预滤, 若对 ζ 中的任意元素 P_1 和 P_2 存在 $P\in\zeta$ 使得 $P\subset P_1\cap P_2$;
2. X 的预滤 ζ 称为收敛于点 $x\in X$, 若对点 x 的每一开邻域包含 ζ 中的一个元素;
3. 点 $x\in X$ 称为是 ζ 的聚点, 若 x 属于预滤 ζ 的每一个元素的闭包;
4. X 的预滤 ζ 和 η 称为同步的, 若对任意 $P\in\zeta$ 和 $Q\in\eta$ 有 $P\cap Q\neq\emptyset$;
5. 空间 X 称为是双序列 [10], 若对 X 的每一个聚于某点 $x\in X$ 的预滤 ζ, 那么存在 X 中可数的且收敛于点 x 的预滤 ξ 使得 ζ 和 ξ 是同步的.

显然, 我们有下列关系 [32] (逆关系都不成立):

$$
\begin{tikzcd}
& \text{强 Fréchet-Urysohn} \arrow[r] & \text{Fréchet-Urysohn} \arrow[d] & \\
\text{第一可数空间} \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \text{弱第一可数空间} \arrow[r] & \text{序列空间} \arrow[r] & k\ \text{空间} \\
& \text{双序列空间} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

1.2.2 网的加强形式

定义 1.2.8 设$\mathscr{P}$ 是空间 X 的一个覆盖.

1. $\mathscr{P}$ 称为是 X 的一个 cs 网 [40], 如果对任意收敛序列 L 以及任意开集 U 满足 $L\subset U$, 存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $P\subset U$ 并且 L 终于P;

2. $\mathscr{P}$ 称为是 X 的一个 cs^* 网 [52], 如果对任意收敛序列 L 以及任意开集 U 满足 $L \subset U$, 存在 L 的子列 L' 以及 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $L' \subset P \subset U$;

3. $\mathscr{P}$ 称为是 X 的一个 k 网 [65], 如果对 X 中的任意紧集 K 和开集 U 满足 $K \subset U$, $K \subset \cup\mathscr{P}' \subset U$ 对某个有限子族 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ 成立.

1.2.3 各种广义度量空间

定义 1.2.9 [64] X 称为是一个 $\aleph$ 空间, 若 X 是正则的并且具有 σ 局部有限 k 网.

定义 1.2.10 [38] 完全正则空间 X 称为 p 空间, 若存在 βX 中的开集族的序列 $\{\mathscr{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足

1. 每一 $\mathscr{U}_n$ 覆盖 x;

2. 对每一 $x \in X$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} st(x, \mathscr{U}_n) \subset X$.

空间 X 具有点可数型的 [32], 若对每一点 $x \in X$, 存在 X 的紧子集 K 使得 $x \in K$ 且 K 在 X 中具有可数邻域基. X 具有可数型的 [32], 若对 X 的每一紧子集 F, 存在 X 的紧子集 K 使得 $F \subset K$ 且 K 在 X 中具有可数邻域基.

对空间 X, X 称为是具有点 G_δ 性质 [38], 如果 X 中每一单点集都是 G_δ 集; X 称为是具有 G_δ 对角线 [38], 如果对角线 $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ 是 $X \times X$ 的一个 G_δ 子集. X 称为是具有正则 G_δ 对角线, 如果对角线 $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ 是 $X \times X$ 中 Δ 的可数个开邻域闭包的交. 显然, 空间具有正则 G_δ 对角线有 G_δ 对角线. 此外, 文 [27] 中证明了空间 X 具有 G_δ 对角线当且仅当存在一个开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{st}(x, \mathcal{U}_n)$. 由此可见, 如果空间 X 具有 G_δ 对角线, 则 X 具有 点G_δ 性质. X 的子集 Y 称为 G_δ 稠, 若 X 的每一 G_δ 子集与 Y 相交.

空间 X 称为拟可展的 [23], 若存在 X 的开子集族序列 $\{\mathcal{G}_n\}_n$ 使得, 对每一点 $x \in X$, $\{\mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}, \mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n) \neq \emptyset\}$ 是点 x 的邻域基. 空间 X 具有拟 G_δ 对角线 [44], 若存在 X 的开子集族序列 $\{\mathcal{G}_n\}_n$ 使得, 对每一点 $x \in X$, $\{\mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n) : n \in \mathbb{N}, \mathrm{st}(x, \mathcal{G}_n) \neq \emptyset\}$ 是点 x 的 p 网.

定义 1.2.11 设 κ 是无限基数.

1. 空间 X 称为 S_κ, 若 X 是 κ 个收敛序列 (包含极限点) 把所有极限点等同一点的商空间;

2. 空间 X 称为 S_2 空间 (Arens' 空间), 若 $X = \{\infty\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_n(m) : m, n \in \mathbb{N}\}$ 且拓扑定义如下: 每一点 $x_n(m)$ 是孤立点; 点 x_n 的基本邻域形式为 $\{x_n\} \cup \{x_n(m) : m > k$, 其中 $k \in \mathbb{N}\}$; ∞ 的基本邻域形式为 $\{\infty\} \cup (\bigcup\{V_n : n > k$, 其中 $k \in \mathbb{N}\})$, 其中 V_n 是点 x_n 的邻域.

定义 1.2.12 设 X 是拓扑空间. 对 $i = 1, 4$, X 称为 α_i 空间, 若对任意 $n \in \mathbb{N}$, 序列 S_n 收敛点 $x \in X$, 则存在收敛于点 x 的序列 S 使得

(α_1) 每一 $S_n \setminus S$ 是有限的;

(α_4) 存在无限个 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $S_n \cap S \neq \emptyset$.

显然, $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_4$.

§1.3 拓扑代数空间类

设 G 是拓扑空间, 又是一个群, 而且群的乘积运算与求逆按此拓扑是连续的, 即从拓扑空间 $G \times G$ 到拓扑空间 G 上的映射 $(x, y) \mapsto x \cdot y$ 及从 G 到 G 上的映射 $x \mapsto x^{-1}$ 都是连续映射, 则称 G 为*拓扑群*; 若 G 的乘积运算按此拓扑是连续的, 则又称 G 是*仿拓扑群*. 若 G 的乘积运算按此拓扑是分离连续的, 则又称 G 是*半拓扑群*.

设 G 是拓扑空间且 $\pi_1 : G \times G \to G$ 是到第一坐标的投射, 若存在满同胚映射 $\varphi : G \times G \to G \times G$ 和元素 $e \in G$ 使得 $\pi_1 \circ \varphi = \pi_1$ 且对每一 $x \in G$ 有 $\varphi(x, x) = (x, e)$, 则称 G 是 *rectifiable* 空间. 此外, 称 φ 是 G 的 *rectification*.

显然, 拓扑群是 rectifiable 空间和仿拓扑群. 事实上, 对任意具有单位元 e 的拓扑群 G, 显然 G 是仿拓扑群且易知 $\varphi(x, y) = (x, x^{-1}y)$ 是 G 上的 rectification. 然而, 存在仿拓扑群不是 rectifiable 空间也不是拓扑群, 如 Sorgenfrey 直线 ([32, 例子 1.2.2]). 此外, 7 维球 S_7 是 rectifiable 空间而不是拓扑群 [86, § 3]. 更进一步地, 易知仿拓扑群和 rectifiable 空间是齐性空间.

定理 1.3.1 [28, 35, 85] 拓扑空间 G 是 *rectifiable* 空间当且仅当存在 $e \in G$ 和连续映射 $p : G^2 \to G$ 与 $q : G^2 \to G$ 使得对任意 $x \in G, y \in G$ 下列成立:

$$p(x, q(x, y)) = q(x, p(x, y)) = y \text{ 且 } q(x, x) = e.$$

事实上, 可在定理 1.3.1 中设 $p = \pi_2 \circ \varphi^{-1}$ 和 $q = \pi_2 \circ \varphi$. 取定点 $x \in G$, 分别定义 $f_x, g_x : G \to G$ 为对任意 $y \in G$ 有 $f_x(y) = p(x, y)$ 和 $g_x(y) = q(x, y)$, 那么 $f_x, g_x : G \to G$ 都是同胚映射. 我们分别记 f_x 和 g_x 为 $p(x, G)$ 和 $q(x, G)$.

设 G 是 rectifiable 空间且 p 是 G 上的乘法. 此外, 有时记 $p(x, y)$ 为 $x \cdot y$ 和 $p(A, B)$ 为 $A \cdot B$, 其中 $A, B \subset G$. 因此, $q(x, y)$ 是 G 中的元素且满足 $x \cdot q(x, y) = y$; 因为 $x \cdot e = x \cdot q(x, x) = x$ 且 $x \cdot q(x, e) = e$, 所以 e 是 G 的右单位元且 $q(x, e)$ 是 x 的右逆元. 因此 rectifiable 空间 G 具有运算 p, q 的拓扑代数系统. 易知该代数系统关于乘法运算 p 不要求满足结合律. 显然, 每一拓扑 loop 是 rectifiable 空间.

定义 1.3.2 *[54] 设 X是拓扑群 G 的子空间. 设*

1. *集 X 代数生成 G, 即: $< X >= G$;*
2. *每一连续的映射 $f : X \to H$ 允许连续的同态延拓 $\hat{f} : G \to H$, 其中 H 是拓扑群.*

那么 G 称为 X 上的 Markov 自由拓扑群, 且表示为 $F(X)$.

定义 1.3.3 *[68] 设 X是仿拓扑群 G 的子空间. 设*

1. *集 X 代数生成 G, 即: $< X >= G$;*
2. *每一连续的映射 $f : X \to H$ 允许连续的同态延拓 $\hat{f} : G \to H$, 其中 H 是仿拓扑群.*

那么 G 称为 X 上的 Markov 自由仿拓扑群, 且表示为 $FP(X)$.

此外, 如果上面定义中的所有的群是交换群, 那么我们可分别得到 X 上的 *Markov 自由交换拓扑群* 和 *Markov 自由交换仿拓扑群*, 且分别记为 $A(X)$ 和 $AP(X)$.

若在不混淆的情况下, 在本文中字母 e 分别表示群的单位元或是 rectifiable 空间的右单位元.

第二章　仿拓扑群与 rectifiable 空间

近年来, 研究仿拓扑群与 rectifiable 空间是一般拓扑学的热点方向之一, 所取得的结果层出不穷, 如: (1) G. Birkhoff 和 S. Kakutani 证明了每一个第一可数的拓扑群是可度量化的 [21, 46]; (2) A. Bouziad 证明了每一个 *Čech* 完全的半拓扑群是拓扑群 [17]; (3) A.S. Gul′ko 证明了每一个第一可数的 rectifiable 空间是可度量化的 [35]; (4) 正则的拓扑群是完全正则的; (5) 刘川和林寿教授证明了每一具有左不变对称度量的的仿拓扑群是拓扑群 [48]. 仿拓扑群与 rectifiable 空间作为拓扑群的推广有许多拓扑性质是拓扑群具有而它们所不具有的, 如第一可数的仿拓扑群不一定可度量化; 而正则的仿拓扑群或 rectifiable 空间是不是完全正则的至今仍然是一个公开问题, 这些引起我们对仿拓扑群与 rectifiable 空间的兴趣.

本章讨论关于仿拓扑群与 rectifiable 空间的基数不变量、广义度量性质、局部紧性和 Moscow 性质, 分别肯定地回答了拓扑学家 A.V. Arhangel'shiĭ 和 M. Tkachenko [10, Open problem 5.1.9] 与 A.V. Arhangel'shiĭ 和 M.M. Choban [Topology Appl., **157**(2010), 789-799] 的公开问题. 本章取材于作者与沈荣鑫博士的合作文章"On rectifiable spaces and paratopological groups" 和与刘川教授、导师林寿教授的合作文章"A note on rectifiable spaces".

§2.1　仿拓扑群与 rectifiable 空间的基数不变量

本节我们主要讨论仿拓扑群与 rectifiable 空间的基数不变量问题. 首先, 我们肯定地回答 [10] 中关于仿拓扑群的一个公开问题; 然后我们证明双序列或弱第一可数的 rectifiable 空间是可度量化的. 最后我们证明了 rectifiable 空间是 α_4 的序列空间当且仅当它是强 Fr*é*chet-Urysohn.

设 B 是仿拓扑群 G 的子集. B 称为 G 的 *ω-narrow* 子集, 若对 e 的每一邻域 U, 则存在 G 中可数子集 F 使得 $B\subset FU\cap UF$.

问题 2.1.1 *[10, 公开问题5.1.9] 设 A 和 B 都是仿拓扑群 G 的 ω-narrow 子集, 则 AB 也是 G 中 ω-narrow 子集?*

定理 2.1.2 *设 A 和 B 都是仿拓扑群 G 的 ω-narrow 子集, 则 AB 也是 G 中 ω-narrow 子集.*

证明 设 U 是 G 中单位元 e 的任一邻域. 因为 G 是仿拓扑群, 所以存在单位元 e 在 G 中的开邻域 V 使得 $V^2 \subset U$. 又因为 B 是 ω-narrow, 所以存在 G 中子集 C 使得 $|C| \leq \omega$ 且 $B \subset CV$. 对任意 $y \in C$, 取 e 在 G 中邻域 W_y 使得 $y^{-1}W_y y \subset V$. 由 A 是 ω-narrow, 则对于每一 $y \in C$, 存在 G 中子集 K_y 使得 $|K_y| \leq \omega$ 且 $A \subset K_y W_y$. 设 $K = \bigcup_{y \in C} K_y$ 且 $M = KC$. 显然, 我们有 $|M| \leq \omega$. 现证明 $AB \subset MU$. 假设 $a \in A$ 且 $b \in B$. 那么存在点 $y \in C$ 使得 $b \in yV$. 因此，存在点 $x \in K_y$ 使得 $a \in xW_y$. 从而我们有

$$ab \in xW_y yV = xy(y^{-1}W_y y)V \subset xyVV \subset xyU,$$

即, $ab \in MU$. 因此我们证明了 $AB \subset MU$. 类似地我们能证明存在 G 中的子集 P 使得 $|P| \leq \omega$ 且 $AB \subset UP$. 置 $D = M \cup P$. 显然, 我们有 $AB \subset DU \cap UD$ 且 $|D| \leq \omega$. 因此 AB 是 G 中的 ω-narrow 子集.

众所周知, 双序列或弱第一可数的拓扑群的可度量化的, 如见[10]. 现在我们将证明双序列或弱第一可数的 rectifiable 空间是可度量化的.

定理 2.1.3 *每一双序列的 rectifiable 空间 G 是可度量.*

证明 因为 G 是双序列, 所以由 [10, 引理 4.7.11] 知 G 中存在可数开预滤 γ 收敛于点 $g \in G$. 因为 G 是齐性的, 不失一般性, 不妨设 $g = e$. 则集族 $\{q(B, B) : B \in \gamma\}$ 是 e 的一个局部基. 事实上, 对 e 的任一开邻域 U, 存在 e 的开邻域 V 和 $B \in \gamma$ 使得 $q(V, V) \subset U$ 且 $B \subset V$. 因此我们有

$$e \in q(B, B) \subset q(V, V) \subset U,$$

所以空间 G 在点 e 有可数局部基. 又因为 G 是齐性的, 所以空间 G 是第一可数的. 从而由 [35, 定理 3.2] 知 G 是度量化的.

设 X 是一个拓扑空间, 称 X 具有 AS 性质, 若对任意族 $\{a_{m,n} : (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \subset X$ 使得对每一 $m \in \mathbb{N}$ 有 $\lim_n a_{m,n} = a \in X$, 则存在严格递增序列 $\{i_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ 和 $\{j_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ 满足 $\lim_l a_{i_l, j_l} = a$. 显然, 具有 AS 性质的空间是 α_4 空间.

引理 2.1.4 *Fréchet-Urysohn rectifiabe 空间 G 具有 AS 性质. 因此也具有 α_4 性质.*

证明 不妨设 G 是非离散空间. 对每一 $m \in \mathbb{N}$, 设 $\{a_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \subset X$ 使得 $\lim_n a_{m,n} = e$. 因为 G 是 Fréchet-Urysohn 非离散空间, 所以存在序列 $\{s_m\}m \in \mathbb{N} \subset G$ 使得 $\lim_m s_m = e$ 且对任意 $m \in \mathbb{N}$ 有 $s_m \neq e$.

如果 $q(s_m, a_{m,k+m}) \neq e$, 则置 $z_{m,k} = q(s_m, a_{m,k+m})$; 如果 $q(s_m, a_{m,k+m}) = e$, 则置 $z_{m,k} = s_m$. 设 $M = \{z_{m,k} : (m,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$. 显然, 对任意的 $m \in \mathbb{N}$, 因为 $s_m \neq e$, 所以 $e \notin M$. 但是我们有 $e \in \overline{M}$. 事实上, 若 $M \cap \{s_m : m \in \mathbb{N}\}$ 是无限的, 则易证得 $e \in \overline{M}$. 因此, 可设 $M \cap \{s_m : m \in \mathbb{N}\}$ 是有限的. 那么存在点 e 的开邻域 U 使得 $U \cap M \cap \{s_m : m \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. 设 V 是点 e 的开邻域使得 $V \subset U$. 那么存在点 e 的开邻域 W 使得 $q(W,W) \subset V$. 因为 $\lim_m s_m = e$, 所以存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $s_m \in W$. 又因为 $\lim_n a_{m,n} = e$, 所以存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $a_{m,k+m} \in W$. 因此, $q(s_m, a_{m,k+m}) = z_{m,k} \in q(W,W) \subset V \subset U$.

因为 $e \in \overline{M}$ 且 G 是 Fréchet-Urysohn, 所以 G 中存在序列 $\{(m_l, k_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ 使得 $\lim_l z_{m_l,k_l} = e$.

情况 1: 序列 $\{k_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ 是有界.

不失一般性, 设存在 $r \in \mathbb{N}$ 使得对任意 $l \in \mathbb{N}$ 有$k_l = r$. 因为 $\lim_l z_{m_l,k_l} = \lim_l z_{m_l,r} = e$ 且对每一 $l \in \mathbb{N}$ 有 $z_{m_l,r} \neq e$, 所以 $\lim_l m_l = \infty$. 不失一般性, 对每一 $l \in \mathbb{N}$, 设 $m_l < m_{l+1}$. 设 $N_1 = \{l \in \mathbb{N} : z_{m_l,r} = s_{m_l}\}$.

子情况 1.1: 集合 N_1 是无限的.

记 N_1 为 $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$, 其中对每一 $i \in \mathbb{N}$ 有 $p_i < p_{i+1}$. 则对任意 $l \in \mathbb{N}$，易证得 $q(s_{m_{p_l}}, a_{m_{p_l},r+m_{p_l}}) = e$. 因为 $\lim_l s_{m_{p_l}} = e$, 所以

$$a_{m_{p_l},r+m_{p_l}} = p(s_{m_{p_l}}, q(s_{m_{p_l}}, a_{m_{p_l},r+m_{p_l}})) = p(s_{m_{p_l}}, e) = s_{m_{p_l}} \to e \text{ 当 } l \to \infty.$$

因此，置 $i_l = m_{p_l}$ 且对每一 $l \in \mathbb{N}$ 有 $j_l = r + m_{p_l}$. 那么可得两个严格递增的序列 $\{i_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ 和 $\{j_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ 使得 $\lim_l a_{i_l,j_l} = e$.

子情况 1.2: 集合 N_1 是有限的.

设 $N_2 = \{l \in \mathbb{N} : z_{m_l,r} \neq s_{m_l}\}$, 那么 N_2 是无限的. 我们记 N_2 为 $\{q_i : i \in \mathbb{N}\}$, 其中对每一 $i \in \mathbb{N}$ 有 $q_i < q_{i+1}$. 从而对每一 $l \in \mathbb{N}$ 有

$$z_{m_{q_l},k_{q_l}} = q(s_{m_{q_l}}, a_{m_{q_l},r+m_{q_l}}).$$

因为 $\lim_l z_{m_{q_l},k_{q_l}} = e$ 且 $\lim_l s_{q_l} = e$, 所以

$$a_{m_{q_l},r+m_{q_l}} = p(s_{q_l}, q(s_{m_{q_l}}, a_{m_{q_l},r+m_{q_l}})) = p(s_{q_l}, z_{m_{q_l},k_{q_l}}) \to p(e,e) = e \text{ 当 } l \to \infty.$$

因此, 对每一 $l\in\mathbb{N}$ 置 $i_l=m_{q_l}$ 和 $j_l=r+m_{q_l}$. 那么可得两个严格递增的序列 $\{i_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ 和 $\{j_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ 使得 $\lim_l a_{i_l,j_l}=e$.

情况 2: 序列 $\{k_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ 是无界的.

不失一般性，设 $\{k_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ 是一个严格递增的序列.

论断: $\lim_l m_l=\infty$.

否则, 设存在 $t\in\mathbb{N}$ 使得对每一 $l\in\mathbb{N}$ 有 $m_l=t$. 因为 $\{k_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ 是一个严格递增的序列，所以 $\lim_l a_{t,t+k_l}=e$. 又 $\lim_l z_{t,k_l}=e$，从而

$$a_{t,t+k_l}=a_{m_l,m_l+k_l}=p(s_{m_l},z_{m_l+k_l})=p(s_t,z_{t,k_l})\to p(s_t,e)=s_t \text{ 当 } l\to\infty.$$

此外, $a_{t,t+k_l}\to e$ 当 $l\to\infty$. 因此 $s_t=e$, 矛盾.

由论断知存在一个严格递增序列 $\{n_l\}_{l\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{N}$ 使得对每一 $i\in\mathbb{N}$ 有 $m_{n_i}<m_{n_{i+1}}$. 因此置 $i_l=n_l$ 和每一 $l\in\mathbb{N}$ 有 $j_l=m_{n_l}+k_{n_l}$. 那么得到严格递增序列 $\{i_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ 和 $\{j_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ 满足 $\lim_l a_{i_l,j_l}=e$.

因为 α_4 Fréchet-Urysohn 空间是强 Fréchet-Urysohn, 所以我们有下列定理.

定理 2.1.5 *rectifiable 空间 G 是 Fréchet-Urysohn 当且仅当 G 是强 Fréchet-Urysohn.*

引理 2.1.6 *设 G 是 α_4-rectifiable 空间. 若 G 是序列空间, 那么 G 是强 Fréchet-Urysohn.*

证明 由定理 2.1.5, 只需证明 G 是 Fréchet-Urysohn. 设 G 不是 Fréchet-Urysohn, 则存在 G 的子集 A 使得 $\hat{\hat{A}}\setminus\hat{A}\neq\emptyset$, 其中 $\hat{A}$ 是 A 中所有收敛序列的极限点. 取 $x\in\hat{\hat{A}}\setminus\hat{A}$. 不失一般性, 设 $x=e$.

因为 $e\in\hat{\hat{A}}$, 所以存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\hat{A}$ 使得 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于点 e. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在序列 $\{x_{nj}\}_{j=1}^{\infty}\subset A$ 使得序列 $\{x_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛于点 x_n. 因为 G 是 rectifiable 空间, 所以序列 $\{q(x_n,x_{nj})\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛于 $q(x_n,x_n)=e$ 当 $j\to\infty$. 此外, 因为 G 是 α_4-rectifiable 空间, 存在递增序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和序列 $\{j(n_k)\}_{k=1}^{\infty}$ 使得 $\{q(x_{n_k},x_{n_kj(n_k)})\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛于点 e. 那么

$$x_{n_kj(n_k)}=p(x_{n_k},q(x_{n_k},x_{n_kj(n_k)}))\to p(e,e)=e \text{ 当 } k\to\infty.$$

此外, 我们有 $e\notin\hat{A}$, 矛盾.

由引理 2.1.4, 2.1.6 和定理 2.1.5, 我们有如下定理.

定理 2.1.7 设 G 是序列 *rectifiable* 空间. 则下列条件等价:

1. 空间 G 是 α_4 空间;
2. 空间 G 是 *AS* 空间;
3. 空间 G 是 *Fréchet-Urysohn;*
4. 空间 G 是强 *Fréchet-Urysohn.*

定理 2.1.8 若 G 是弱第一可数 *rectifiable* 空间, 则 G 是第一可数的, 因此 G 是可度量化的.

证明 因为弱第一可数是序列 α_4 空间, 由定理 2.1.7, G 是 Fréchet-Urysohn 空间, 又因为 Fréchet-Urysohn 且弱第一可数空间是第一可数的 [78], 所以 G 是第一可数的, 从而 G 是可度量化的.

定理 2.1.9 设 G 是 *Fréchet-Urysohn rectifiable* 空间, M 是第一可数空间, 则积空间 $G \times M$ 是 *Fréchet-Urysohn.*

证明 取 $G \times M$ 的任意子集 A 和任意点 $(x, y) \in \overline{A}$. 取 M 在点 y 的递减可数局部基 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. 置 $B_n = \pi_1((G \times U_n) \cap A)$. 显然, 对任意 $n \in \mathbb{N}$ 我们有 $x \in \overline{B_n}$. 因为 $U_{n+1} \subset U_n$, 所以 $B_{n+1} \subset B_n$. 从而由定理 2.1.7, 存在序列 $\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset G$ 收敛于点 x 且与无限个 B_n 相交. 对任意 $k \in \mathbb{N}$, 存在 $b_k \in B_{n_k}$ 且 $c_k \in U_{n_k}$ 使得 $(b_k, c_k) \in A$ 且 $n_k > k$. 那么显然有 $\{(b_k, c_k) : k \in \mathbb{N}\}$ 收敛于点 (x, y).

引理 2.1.10 设 $\mathcal{P}$ 是被积空间和连续映射保持. 对 *rectifiable* 空间 G, 则下列条件等价:

(i) G 中具有拓扑性质 $\mathcal{P}$ 的每一子集具有可数伪特征;

(ii) G 中具有拓扑性质 $\mathcal{P}$ 的每一子集具有正则 G_δ 对角线.

证明 (ii) $\to$ (i) 显然.

(i) $\to$ (ii). 设 A 是 G 中具有性质 $\mathcal{P}$子集. 因为 $q : G \times G \to G$ 是连续且性质 $\mathcal{P}$ 被乘积和连续映射保持, 所以 $q(A \times A) = B$ 是 G 中具有性质 $\mathcal{P}$ 的子

集. 因为 $q(x,x)=e$, 所以 $e\in B$. 因此, e 是 B 中的 G_δ 集, 设 $\{U_n: n\in\mathbb{N}\}$ 是可数开子集族使得 $e\in U_n$ 且 $\overline{U_{n+1}}\subset U_n$. 那么 $\Delta=\{(x,x): x\in A\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} q^{-1}(U_n)=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{q^{-1}(U_n)}$. 事实上, 设 $(x,y)\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{q^{-1}(U_n)}$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 有 $(x,y)\in\overline{q^{-1}(U_n)}$, 从而 $q(x,y)\in\overline{U_n}$, 那么 $\pi_2(\varphi(x,y))\in\overline{U_n}$, $\pi_2(x,y')\in\overline{U_n}$, 其中 $\varphi(x,y)=(x,y')$ 且任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $y'\in\overline{U_n}$. 因此, $y'=e$. 因为 $\varphi(x,x)=e$, $\varphi(x,y)=e$ 且 φ 是一到一映射, 所以 $x=y$. 那么 $\Delta=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{q^{-1}(U_n)}$. 因为 $\overline{q^{-1}(U_{n+1})}\subset q^{-1}(\overline{U_{n+1}})\subset q^{-1}(U_n)$, 所以 A 具有正则 G_δ 对角线.

因为具有 G_δ 对角线的可数紧 (紧) 空间是可度量化, 所以由引理 2.1.10 我们有下列定理.

定理 2.1.11 对 *rectifiable* 空间 G, 则下列等价*:*

(i) 每一紧 *(*可数紧*)* 子集是第一可数*;*

(ii) 每一紧 *(*可数紧*)* 子集是可度量化*.*

推论 2.1.12 设 *rectifiable* 空间 G 具有可数伪特征, 则 G 具有正则 G_δ 对角线*.*

§2.2 rectifiable 空间的广义度量性质

本节主要讨论 rectifiable 空间上的广义度量性质. 首先, 我们证明了 rectifiable 空间包含一个 (闭) 拷贝 S_ω 当且仅当它有一个 (闭) 拷贝 S_2; 然后证明 rectifiable 空间若具有 σ 点离散 k 网, 则它不包含 S_{ω_1} 的闭拷贝. 这些结果推广了拓扑群中的相应结论.

定理 2.2.1 设 G 是 *rectifiable* 空间, 则 G 包含一个 *(*闭*)* 拷贝 S_ω 当且仅当 G 有一个 *(*闭*)* 拷贝 S_2*.*

证明 充分性. 因为 G 是齐性, 不失一般性, 设 $A=\{e\}\cup\{x_n: n\in\mathbb{N}\}\cup\{x_n(m): m,n\in\mathbb{N}\}$ 是 S_2 的一个拷贝, 其中 $x_n\to e$ 当 $n\to\infty$ 且对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $x_n(m)\to x_n$ 当 $m\to\infty$. 对任意 $m,n\in\mathbb{N}$, 置 $y_n(m)=q(x_n,x_n(m))$. 那么, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 有 $y_n(m)=q(x_n,x_n(m))\to q(x_n,x_n)=e$ 当 $m\to\infty$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 设 $A_n=\{y_n(m): m\in\mathbb{N}\}$.

论断 1: 对每一 $m\in\mathbb{N}$, 集合 $F=\{n: A_m\cap A_n$ 是无限的$\}$ 是有限的.

事实上, 否则, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $F = \{n : A_m \cap A_n$ 是无限的$\}$ 是无限的. 对 $n_i < n_{i+1}$, 取不同 $q(x_{n_i}, x_{n_i}(m_i)) \in A_m \cap A_{n_i}$. 对任意 $i \in \mathbb{N}$, 因为 $q(x_{n_i}, x_{n_i}(m_i)) \in A_m$, 所以当 $i \to \infty$ 有 $q(x_{n_i}, x_{n_i}(m_i)) \to e$. 因为当 $i \to \infty$ 有 $x_{n_i}(m_i) = p(x_{n_i}, q(x_{n_i}, x_{n_i}(m_i))) \to q(e, e) = e$, 所以当 $i \to \infty$ 有 $x_{n_i}(m_i) \to e$, 矛盾.

由论断 1, 不失一般性, 对不同的 $i, j \in \mathbb{N}$, 设 $A_i \cap A_j = \emptyset$. 置 $B = \{e\} \cup \{y_n(m) : n, m \in \mathbb{N}\}$.

论断 2: G 的子空间 B 是 S_ω 的一个闭拷贝.

首先, 集 B 是 G 中的闭集. 事实上, 否则, 则存在点 $x \in G \setminus B$ 使得 $x \in \overline{B}$. 显然, 有 $x \neq e$, 又因为 $p(e, e) = e$ 和 $P(e, G)$ 是一个同胚, 所以 $p(e, x) \neq e$. 因为 A 是闭的, 所以存在 e 的开邻域 V 使得 $|p(V, x \cdot V) \cap A| \leq 1$ 或对某 $k \in \mathbb{N}$ 有 $p(V, x \cdot V) \cap A \subset \{x_k\} \cup \{x_k(m) : m \in \mathbb{N}\}$. 设 U 是 e 的开邻域使得 $U \cdot (x \cdot U) \subset V \cdot (x \cdot V)$ 和 $e \notin x \cdot U$. 那么 $x \cdot U$ 包含一个无限的子集 $\{y_{n_i}(m_i) : i \in \mathbb{N}\} \subset B$, 其中对不同的 $i, j \in \mathbb{N}$ 有 $n_i \neq n_j$. 因为 $x_n \to e$ 当 $n \to \infty$, 所以设 $\{x_n : i \in \mathbb{N}\} \subset U$. 因此, 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 所以

$$x_{n_i}(m_i) = p(x_{n_i}, q(x_{n_i}, x_{n_i}(m_i))) \subset p(U, x \cdot U) \subset p(V, x \cdot V),$$

这蕴含 $\{x_{n_i}(m_i) : i \in \mathbb{N}\} \subset p(V, x \cdot V)$, 矛盾.

设 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 那么 $C = \cup\{y_n(m) : m \leq f(n), n \in \mathbb{N}\}$ 没有任何聚点. 事实上, 否则存在点 $x \in \overline{C \setminus \{x\}}$. 设 V_1 是 e 的开邻域使得 $|p(V_1, x \cdot V_1) \cap \{x_n(m) : m \leq f(n), n \in \mathbb{N}\}| \leq 1$, 设 U_1 是 e 的开邻域使得 $U_1 \cdot (x \cdot U_1) \subset V_1 \cdot (x \cdot V_1)$, 那么 $x \cdot U_1$ 包含 C 中的无限子集 $\{y_{k_i}(l_i) : i \in \mathbb{N}\}$. 因为 $x_n \to e$ 当 $n \to \infty$, 所以设 $\{x_{k_i} : i \in \mathbb{N}\} \subset U_1$. 因此, 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$x_{k_i}(l_i) = p(x_{k_i}, q(x_{k_i}, x_{k_i}(l_i))) \subset p(U_1, x \cdot U_1) \subset p(V_1, x \cdot V_1),$$

这蕴含 $\{x_{k_i}(l_i) : i \in \mathbb{N}\} \subset p(V_1, x \cdot V_1)$, 矛盾.

必要性. 设 $A = \{e\} \cup \{y_n(m) : m, n \in \mathbb{N}\}$ 是 S_ω 的一个闭拷贝, 其中对每一 $n \in \mathbb{N}$, $y_n(m) \to e$ 当 $m \to \infty$. 显然存在非平凡序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 e 当 $n \to \infty$, 其中对每一 $n \in \mathbb{N}$ 有 $x_n \neq e$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 设 U_n 是 x_n 的开邻域使得对不同 $i, j \in \mathbb{N}$ 有 $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$. 对每一 $n, m \in \mathbb{N}$, 则 $x_n(m) = x_n \cdot y_n(m)$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 有 $x_n(m) \to x_n$ 当 $m \to \infty$. 不失一般性, 设 $\{x_n(m) : m \in \mathbb{N}\} \subset U_n$. 置 $B = \{e\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_n(m) : n, m \in \mathbb{N}\}$.

论断 3: B 是 G 中一个闭拷贝 S_2.

首先, 证 B 是 G 中的闭集. 若不然, 存在点 $x \in G \setminus B$ 使得 $x \in \overline{B}$. 易知 $q(e,x) \neq e$. 因为 A 是闭的, 所以存在点 e 的开邻域 V 使得 $q(V, x \cdot V) \cap (A \setminus \{q(e,x)\}) = \emptyset$. 设 U 是 e 的开邻域使得 $q(U, x \cdot U) \subset q(V, x \cdot V)$ 和 $x \cdot \overline{U} \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \emptyset$. 显然, 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 集 $x \cdot U \cap \{x_n(m) : m \in \mathbb{N}\}$ 是有限的. 此外, $x \cdot U$ 包含 $\{x_n(m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ 中的无限个元素, 记 $U \cap \{x_n(m) : n, m \in \mathbb{N}\} = \{x_{n_i}(m_i) : i \in \mathbb{N}\}$. 因为 $x_n \to e$ 当 $n \to \infty$, 不失一般性设 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U$. 因此, 对每一 $i \in N$, 有

$$y_{n_i}(m_i) = q(x_{n_i}, p(x_{n_i}, y_{n_i}(m_i))) \subset q(U, x \cdot U) \subset q(V, x \cdot V),$$

这蕴含着 $q(V, x \cdot V)$ 包含无限个 $y_n(m)$, 矛盾.

若 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, 类似论断 2 的证明, 那么

$$\bigcup \{x_n(m) : \text{存在 } k \in \mathbb{N} \text{ 使得 } m \leq f(n), n \geq k\}$$

是 G 中的闭集. 因此, B 是 S_2 的闭拷贝.

推论 2.2.2 *设 G 是序列 rectifiable 空间. 若 G 具有点可数 wcs^* 网, 则 G 是可度量化当且仅当 G 不包含闭拷贝 S_2.*

证明 显然, 只需证明充分性. 若 G 不包含闭拷贝 S_2, 则由定理 2.2.1 知 G 不包含闭拷贝 S_ω, 因此由 [51, 推论 2.1.11] 知 G 是第一可数的. 因此 G 是可度量化 [35].

设 $\mathscr{B} = \{B_\alpha : \alpha \in H\}$ 是空间 X 的子集族. 集族 $\mathscr{B}$ 称为点离散的, 若对每一 $\alpha \in H$ 取任意 $x_\alpha \in B_\alpha$, 则 $\{x_\alpha : \alpha \in H\}$ 是 X 的闭离散子集. 集族 $\mathscr{B}$ 称为遗传闭包保持 (abbrev. HCP), 若对每一 $P \in \mathscr{B}$ 取任意的子集 $S(P) \subset P$, 则 $\{S(P) : P \in \mathscr{B}\}$ 是闭包保持的.

定理 2.2.3 *设 G 是 rectifiable 空间. 若 G 具有 σ 点离散 k 网, 则 G 不包含 S_{ω_1} 的闭拷贝.*

证明 设 G 包含闭拷贝 $S_{\omega_1} = \{e\} \cup \{x_n(\alpha) : \alpha < \omega_1, n \in \mathbb{N}\}$, 其中对每一 $\alpha < \omega_1$, $x_n(\alpha) \to e$ 当 $n \to \infty$. 显然, 存在非平凡序列 $\{x_n\}$ 使得 x_n 收敛点 e. 由 G 的正则性, 取 G 的开子集 U_n 使得 $x_n \in U_n$, $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset (i \neq j)$ 且

$\overline{U_n} \cap \{x_i : i \in \mathbb{N}\} = \{x_n\}$. 对每一 $m \in \mathbb{N}$ 和 $\alpha < \omega_1$, 易证得 $x_m \cdot x_n(\alpha) \to x_m$ 当 $n \to \infty$ 且 $\{x_m \cdot x_n(\alpha) : n \in \mathbb{N}\}$ 终留于 U_m. 不失一般性, 设 $\{x_m \cdot x_n(\alpha) : n \in \mathbb{N}\} \subset U_m$.

论断 4: 对 $n(\alpha), m(\alpha) \in \mathbb{N}$, G 的子空间 $B = \{x_{n(\alpha)} \cdot x_{m(\alpha)}(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是离散的.

情况 1: 集 $\{n(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是有限的.

记 $\{n(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 为 $\{l_1, \cdots, l_k\}$. 因为对每一 $g : \omega_1 \to \mathbb{N}$ 有 $\{x_{g(\alpha)}(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是离散的且对每一 $x \in G$, 映射 $p(x, G)$ 是同胚的, 所以对每一 $1 \leq i \leq k$ 有 $\{x_{l_i} \cdot x_{g(\alpha)}(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是离散的. 因此, B 是离散的.

情况 2: 集 $\{n(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是无限的.

设 B 是非离散的且 x 是 B 的聚点. 对每一 $g : \omega_1 \to \mathbb{N}$, 存在 e 的开邻域 V 使得

$$|q(V, (x \cdot V)) \cap \{x_{g(\alpha)}(\alpha) : \alpha < \omega_1\}| \leq 1.$$

设 U 是 e 的开邻域且满足 $q(U, (x \cdot U)) \subset q(V, (x \cdot V))$. 显然, 对无限个 $n(\alpha)$ 集 $C = x \cdot U \cap \{x_{n(\alpha)} \cdot x_{m(\alpha)}(\alpha) : \alpha < \omega_1\} \neq \emptyset$, 记这无限个下标为 $\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$. 因为 $x_n \to e$ 当 $n \to \infty$, 不失一般性, 设 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U$. 显然, 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 有

$$x_{m(\alpha)}(\alpha) = q(x_{n_i(\alpha)}, p(x_{n_i(\alpha)}, x_{m(\alpha)}(\alpha))) \subset q(U, x \cdot U) \subset q(V, x \cdot V).$$

则 $|q(V, x \cdot V) \cap \{x_{g(\alpha)}(\alpha) : \alpha < \omega_1\}| \geq \omega$, 矛盾.

对 $\alpha < \omega_1$, 设 $C_\alpha = \{e\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_n \cdot x_i(\alpha) : n \in \mathbb{N}, i \geq f_n(\alpha)\}$. 显然有 $x_n \cdot x_{j_n}(\alpha) \to e$ 当 $n \to \infty$, 其中 $j_n > f_n(\alpha)$. 因为 C_α 中的每个无限子集都有聚点, 所以 C_α 是可数紧. 因为具有 σ 点离散网的可数紧空间具有可数网, 所以 C_α 是紧的.

设 $\mathscr{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{P}_n$ 是 G 中由闭子集组成的 σ 点离散 k 网. 那么存在有限子族 $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}$ 使得 $C_0 \subset \cup \mathscr{P}'$. 取 $P_0 \in \mathscr{P}'$ 使得 P_0 包含点 $a_0 = x_{n(0)} \cdot x_{m(0)}(0)$ 和无限个 x_n. 设对每一 $\alpha < \beta$, 存在 $P_\alpha \in \mathscr{P}$ 使得 P_α 包含点 $a_\alpha = x_{n(\alpha)} \cdot x_{m(\alpha)}(\alpha)$ 和无限个 x_n. 那么 $C_\beta \subset G \setminus \{a_\alpha : \alpha < \beta\}$, 由论断 4 知它是 G 中的开集. 因此, 存在有限子族 $\mathscr{P}'' \subset \mathscr{P}$ 使得 $C_\beta \subset \cup \mathscr{P}'' \subset G \setminus \{a_\alpha : \alpha < \beta\}$. 取 $P_\beta \in \mathscr{P}$ 使得 P_β 包含点 $a_\beta = x_{n(\beta)} \cdot x_{m(\beta)}(\beta)$ 和无限个 x_n. 由归纳, 可取 $\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset \mathscr{P}$ 使得 $P_\alpha \neq P_\beta$ 当任意 $\alpha \neq \beta$ 且每一 P_α 包含无限个 x_n. 因此存在 $n \in \mathbb{N}$ 和不

可数个 $P_\alpha \in \mathscr{P}_n$. 因为 $\mathscr{P}_n$ 是点离散的, 所以 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 中存在子序列 L 使得 L 是离散, 矛盾.

在文 [45], H.J. Junnila 和恽自求证明空间 X 是 $\aleph$ 空间当且仅当 X 具有 σ-HCP k 网且不包含闭拷贝 S_{ω_1}. 因此由定理 2.2.3 我们有下列推论.

推论 2.2.4 *rectifiable 空间 G 是 $\aleph$ 空间当且仅当 G 有 σ-HCP 的 k 网.*

§2.3 局部紧 rectifiable 空间

7 维球 S_7 是局部紧的 rectifiable 空间而不是拓扑群, 从而引起我们对局部紧 rectifiable 空间的讨论. 在本节中, 首先证明了若 G 是局部紧和可分的 rectifiable 空间, 则 G 是 σ 紧的, 从而回答了 A.V. Arhangel'skiĭ 和 M.M. Choban 的问题; 此外, 还证明了在 $\flat = \omega_1$ 的假设下, 具有 α_1 性质的紧 rectifiable 空间是可度量化的当且仅当具有 α_4 性质的局部紧 rectifiable 空间是可度量化的.

在 [13] 中, A.V. Arhangel'skiĭ 和 M.M. Choban 提出了如下问题:

问题 2.3.1 *[13, 问题5.10] 具有可数 Souslin 的 rectifiable p 空间 G 是 Lindelöf? 若又假设 G 是可分或可分且局部紧的, 则 G 是 Lindelöf?*

在可分且局部紧的情况下, 我们给出问题 2.3.1 一个肯定回答.

引理 2.3.2 *设 G 是 rectifiable 空间. 若 Y 是 G 的稠子集且 U 是 e 在 G 中的开邻域, 则 $G = Y \cdot U$.*

证明 取定任意点 $z \in G$. 因为 $q(z, z) = e \in U$, 所以存在 e 的开邻域 V 使得 $q(z \cdot V, z) \subset U$. 置 $W = z \cdot V$. 则 W 是 G 中点 z 的开邻域. 因为 Y 是 G 的稠子集, 所以有 $W \cap Y \neq \emptyset$. 取点 $y \in W \cap Y = z \cdot V \cap Y$. 则存在点 $v \in V$ 使得 $y = z \cdot v$, 那么

$$z = p(z\cdot v, q(z\cdot v, z)) = p(y, q(z\cdot v, z)) \in p(y, q(z\cdot V, z)) \subset p(y, U) = y\cdot U \subset Y\cdot U.$$

由点 z 选取的任意性, 则 $G = Y \cdot U$.

由引理 2.3.2, 我们有下列的结果, 这给问题 2.3.1一个肯定回答.

定理 2.3.3 *若 G 是局部 σ 紧和可分的 rectifiable 空间, 则 G 是 σ 紧的 (因此是 Lindelöf).*

推论 2.3.4 *若 G 是局部紧和可分的 rectifiable 空间, 则 G 是 σ 紧的(因此是 Lindelöf).*

推论 2.3.5 *若 G 是局部 Lindelöf 和可分的 rectifiable 空间, 则 G 是 Lindelöf.*

设 A 是 rectifiable 空间 G 的子集. 则 A 称为 G 的 *rectifiable* 子空间 若 $p(A,A) \subset A$ 且 $q(A,A) \subset A$.

命题 2.3.6 *设 G 是 rectifiable 空间. 若 H 是 G 的 rectifiable 子空间, 则 $\overline{H}$ 也是 G 的 rectifiable 子空间.*

证明 取任意两点 $x, y \in \overline{H}$. 则 $p(x,y) \in \overline{H}$ 且 $q(x,y) \in \overline{H}$.

事实上, 因为 $x, y \in \overline{H}$, 所以存在 H 中两个网 $\{x_\alpha\}, \{y_\beta\}$ 使得 $x_\alpha \to x, y_\beta \to y$. 又因为 p 是连续, 所以 $p(x,y)$ 是 $\{p(x_\alpha, y_\beta\} \subset H$ 的聚点. 从而 $p(x,y) \in \overline{H}$. 类似, 我们可证 $q(x,y) \in \overline{H}$.

引理 2.3.7 *设 G 是 rectifiable 空间. 若 V 是 G 的开 rectifiable 子空间, 则 V 是 G 中的闭集.*

证明 设 V 是 G 的非闭子集, 则 $\overline{V} \setminus V \neq \emptyset$. 取点 $x \in \overline{V} \setminus V$. 因为 $q(x,x) = e \in V$ 和 q 的连续性, 所以存在 e 的开邻域 W 使得 $q(x \cdot W, x) \subset V$. 置 $U = x \cdot W$, 那么 U 是 x 的一个开邻域, 因为 $x \in \overline{V}$, 所以 $U \cap V \neq \emptyset$. 从而存在点 $a \in W$ 和 $b \in V$ 使得 $x \cdot a = b$, 则

$$x = p(x \cdot a, q(x \cdot a, x)) = p(b, q(x \cdot a, x)) \subset p(V, V) = V,$$

其中因为 V 是 G 的 rectifiable 子空间, 所以 $p(V,V) = V$. 然而, 点 $x \notin V$, 矛盾.

定理 2.3.8 *若 H 是 rectifiable 空间 G 中的局部紧 rectifiable 子空间, 则 H 是 G 中的闭集.*

证明 设 $K=\overline{H}$. 那么由命题 2.3.6 知 K 是 G 的 rectifiable 子空间. 因为 H 是 K 局部紧的稠子空间, 所以由 [32, 定理 3.3.9] 知 H 在 K 中开的. 由引理 2.3.7, H 是闭的, 从而 $K=H$.

引理 2.3.9 *设 F 是空间 X 的紧子集且在 X 中具有可数基 $\{U_n\}$ 使得 $\overline{U_{n+1}}\subset U_n$, 又设 $H=\cap_n V_n$ ($V_{n+1}\subset V_n$ 且每一 V_n 是 F 中的开集) 是 F 的 G_δ 子集. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 设 W_n 是 X 的开子集使得 $V_n=W_n\cap F$, $W_n\subset U_n$, $\overline{W_{n+1}}\subset W_n$, 那么 $\{W_n\}$ 是 H 在 X 中的可数邻域基.*

证明 显然，$H=\cap_n W_n=\cap_n\overline{W_n}$. 设 $\{W_n\}$ 不是 H 的可数邻域基, 则存在 X 的开子集 U 使得 $H\subset U$ 且 $W_n\setminus U\neq\emptyset$. 由归纳法, 取点 $x_n\in W_n\setminus U$ 使得如果 $i\neq j$, 那么$x_i\neq x_j$. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 因为 $x_n\in U_n$, 所以 $\{x_n\}$ 具有聚点 x. 事实上, 若 $\{x_n\}\cap F$ 是无限的, 则因为 F 是紧的, 所以 $\{x_n\}$ 在 F 中有聚点; 若 $\{x_n\}\cap F$ 是有限的, 不失一般性, 不妨设 $\{x_n\}\cap F=\emptyset$. 因为 $F\subset X\setminus\{x_n\}$ 是 X 中的开集, 所以存在点 $n_0\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $n>n_0$ 有 $F\subset U_n\subset X\setminus\{x_n\}$. 这与 $x_n\in U_n$ 矛盾. 因此, 对每一 n 有 $x\in\overline{W_n}$, 从而 $x\in H\subset U$, 那么 U 包含无限个 x_n, 矛盾.

引理 2.3.10 *设 G 是 rectifiable 空间且 F 是 G 中包含点 e 的紧子集且在 G 具有可数基 $\{U_n:n\in\mathbb{N}\}$. 设 $\zeta=\{V_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是点 e 在 G 的开邻域使得 $\overline{V_{n+1}}\cdot\overline{V_{n+1}}\subset V_n\cap U_n$ 且 $q(V_{n+1},V_{n+1})\subset V_n$, 则 $H=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n$ 是 G 的紧 rectifiable 子空间, $H\subset F$ 且 ζ 是 H 在 G 中邻域基.*

证明 显然, 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 有 $\overline{V_{n+1}}\subset V_n$, 那么 H 是 G 的紧 rectifiable 子空间.

事实上, 易证 $H=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}V_n=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{V_n}$, 因此 H 是 G 中的闭集. 对任意 $x,y\in H$, 则对每一 $n\in\mathbb{N}$ 有 $x,y\in V_n$. 那么对每一 $n\in\mathbb{N}$, 因为 $\overline{V_{n+1}}\cdot\overline{V_{n+1}}\subset V_n$, 所以 $x\cdot y\in V_n$. 因此, $x\cdot y\in H$. 因为 $q(V_{n+1},V_{n+1})\subset V_n$, 所以 $q(x,y)\in H$. 从而 H 是一个闭的 rectifiable 子空间. 显然, $H\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n=F$. 因此 H 是紧的. 由引理 2.3.9, 则 ζ 是 H 在 G 中邻域基.

命题 2.3.11 *设 G 具有点可数型的 rectifiable 空间. 若 O 是点 e 的开邻域, 则 G 中存在紧且具有可数特征的 rectifiable 子空间 H 使得 $H\subset O$.*

证明 因为 G 是点可数型的, 所以 G 中存在具有可数邻域基的紧子集 F. 由于 G 是齐性, 不妨设 $e \in F$. 设 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 F 在 G 中的可数邻域基. 由归纳, 可定义点 e 在 G 中开邻域序列 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足下列条件:

(1) $V_1 \subset O$;

(2) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\overline{V_{n+1}} \cdot \overline{V_{n+1}} \subset V_n \cap U_n$;

(3) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $q(V_{n+1}, V_{n+1}) \subset V_n$.

置 $H = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. 由 (1), 知 $H \subset O$. 由引理 2.3.10, H 是 G 中的紧 rectifiable 子空间且 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 H 在 G 中的邻域基.

因为局部紧空间是点可数型, 所以有下列推论.

推论 2.3.12 *设 G 是局部紧的 rectifiable 空间. 如果 O 是点 e 的开邻域, 那么 G 中存在具有可数特征的紧 rectifiable 子空间 H 使得 $H \subset O$.*

设 ω^ω 表示从 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的所有函数的集合. 对 $f, g \in \omega^\omega$, 若除有限个 $n \in \mathbb{N}$ 外有 $f(n) < g(n)$, 则记为 $f <^* g$. 集族 $\mathscr{F}$ 称为*有界的* 若存在 $g \in \omega^\omega$ 使得对所有的 $f \in \mathscr{F}$ 有 $f <^* g$; 否则称为*无界的*. 记 $\flat$ 为 ω^ω 中无界族的最小基数. 易知 $\omega < \flat \leq \mathfrak{c}$, 其中 $\mathfrak{c}$ 表示连续基数.

引理 2.3.13 *[60] 对 $i \in \{1, 4\}$, D^κ 是 α_i 空间当且仅当 $\kappa < \flat$, 其中 D 离散空间 $\{0, 1\}$.*

定理 2.3.14 *下列条件等价:*

1. *具有 α_1 性质的紧 rectifiable 空间是可度量化的;*
2. *具有 α_4 性质的局部紧 rectifiable 空间是可度量化的;*
3. *$\flat = \omega_1$.*

证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 它是显然的.

(1) $\Rightarrow$ (3). 因为 D^{ω_1} 是紧的非度量化群, 所以由 (1) 知它不是 α_1 空间. 由引理 2.3.13 知 $\flat \leq \omega_1$. 又 $\flat > \omega$, 从而 $\flat = \omega_1$.

(3) $\Rightarrow$ (2). 设 $\flat = \omega_1$ 且 G 是具有 α_4 性质的局部紧的 rectifiable 空间. 下面证 G 是可度量化的. 由命题 2.3.11, G 中存在具有可数特征的紧的 rectifiable

子空间 F, 则 F 是可度量化的. 否则, 由 V.V. Uspenskij 在 [85, 86] 中证知紧 rectifiable 是 dyadic, 因此 F 包含一个子空间同胚于 D^{ω_1}. 因为 α_4 性质是遗传的, 所以 D^{ω_1} 是 α_4 空间. 那么, 由引理 2.3.13 知 $\omega_1 < \flat$, 矛盾. 因此, F 是可度量化的.

设 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 F 在 G 中的可数邻域基, 其中对每一 $n \in \mathbb{N}$, 有 $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$. 设 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为点 e 在 F 中可数邻域基, 其中对每一 $n \in \mathbb{N}$ 有 $\mathrm{cl}_F V_{n+1} \subset V_n$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 存在 G 中开子集 W_n 使得 $V_n = W_n \cap F$, $W_n \subset \overline{U_n}$ 且 $\overline{W_{n+1}} \subset W_n$. 置 $\gamma = \{W_n : n \in \mathbb{N}\}$. 由引理 2.3.9, γ 是点 e 在 G 中的邻域基. 那么 G 是第一可数的, 因此它是可度量化的.

推论 2.3.15 *[60] 下列条件是等价的:*

1. *具有 α_1 性质的紧的拓扑群是可度量化的;*
2. *具有 α_4 性质的局部紧的拓扑群是可度量化的;*
3. *$\flat = \omega_1$.*

问题 2.3.16 *设 G 是局部紧的 α_4-rectifiable 空间. 则在 ZFC 中 G 具有 α_1 性质?*

下面我们给问题 2.3.16 一个部分回答.

引理 2.3.17 *[35, 定理3.3] 若 G 是 rectifiable 空间, 则 $\omega(G) \leq k(G)\chi(G)$ 且 $\chi(G) = \pi\chi(G)$*

由引理 2.3.17, 我们有下列命题.

命题 2.3.18 *若 G 是无限紧的 rectifiable 空间, 则 $\pi\chi(G) \geq \omega(G)$.*

引理 2.3.19 *[75, 定理 1] 存在从无限紧空间 X 到 I^κ 的连续满映射当且仅当存在 X 中的闭子集 F 使得对每一 $x \in F$ 有 $\pi\chi(x, F) \geq \kappa$.*

由命题 2.3.18 和引理 2.3.19, 有下列定理.

定理 2.3.20 *存在从无限紧的 rectifiable 空间 G 到 $I^{\omega(G)}$ 的连续满映射.*

空间 X 称为 *nondegenerate*, 若对任意 $X = \cup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, 其中每一 F_n 是 X 中的闭集, 那么存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\omega(F_n) = \omega(X)$.

引理 2.3.21 *每一无限紧的 rectifiable 空间 G 是 nondegenerate.*

证明　设 $G = \cup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$, 其中每一 F_n 是 G 中的闭集. 因为 G 是局部紧的, 所以 G 具有 Baire 性质, 因此存在某 F_n 有非空内部, 那么设 $W \neq \emptyset$ 满足 $W \subset F_n$. 由命题 2.3.18 和 W 是开集, 所以

$$\omega(G) \leq \pi\chi(G) \leq \pi\chi(W) \leq \omega(W) \leq \omega(F_n) \leq \omega(G).$$

因此, $\omega(G) = \omega(F_n)$.

由 Hagler [42], Gerlits [39] 和 Efimov [30], 有如下的结果:

定理 2.3.22 *[30, 39, 42] 无限的 nondegenerate 和 dyadic 紧空间 X 包含一个拷贝 $D^{\omega(X)}$.*

定理 2.3.23 *每一个无限紧的 rectifiable 空间包含一个拷贝 $D^{\omega(G)}$.*

证明　设 G 是无限紧的 rectifiable 空间. 由 V.V. Uspenskij 在 [85, 86] 中的结果, 则每一个紧的 rectifiable 空间是 dyadic 紧的. 由引理 2.3.21 和定理 2.3.22, G 包含一个拷贝 $D^{\omega(G)}$.

推论 2.3.24 *设 G 是非离散的 σ 紧的、局部紧的 rectifiable 空间. 则下列条件等价:*

1. *存在 G 中的紧的 rectifiable 子空间 H 使得 $\omega(H) = \omega(G)$;*
2. *空间 G 包含一个拷贝 $D^{\omega(G)}$.*

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 因为 H 是紧的 rectifiable 空间, 所以由定理 2.3.23 知 H 包含一个拷贝 $D^{\omega(H)}$. 又 $\omega(H) = \omega(G)$, 那么 G 包含一个拷贝 $D^{\omega(G)}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). 显然, $D^{\omega(G)}$ 是 G 的紧 rectifiable 子空间. 设 $H = D^{\omega(G)}$. 因为 $\omega(D^{\omega(G)}) = \omega(G)$, 所以 $\omega(H) = \omega(G)$.

定理 2.3.25 *每一紧的 α_4 rectifiable 空间是 α_1.*

证明　设 G 是紧的 α_4-rectifiable 空间. 若 G 是有限集, 那么显然 G 是 α_1. 不失一般性, 不妨设 G 是无限集. 由定理 2.3.23, G 包含一个拷贝 $D^{\omega(G)}$. 因为 α_4 性质是遗传的, 所以 $D^{\omega(G)}$ 是 α_4 空间. 由引理 2.3.13, $\omega(G) < \flat$. 因为一个空间的特征若小于 $\flat$ 是一个 α_1 空间[59], 所以 G 是 α_1.

问题 2.3.26 *若 G 是非离散的 σ 紧、局部紧的 rectifiable 空间, 则 G 包含一个拷贝 $D^{\omega(G)}$ 吗?*

问题 2.3.27 *若 G 是非离散的 σ 紧、局部紧的 rectifiable 空间, 则存在从 G 到 $I^{\omega(G)}$ 的连续满映射?*

注记 若问题 2.3.26 是肯定的, 则由下列命题知问题 2.3.27 也是肯定的.

命题 2.3.28 *[76] 设 τ 是无限基数, 若正规空间 X 包含一个拷贝 D^{τ}, 则存在从 X 到 $I^{\omega(G)}$ 的连续满映射.*

§2.4　rectifiable 空间的可度量性

在 [48] 中, 刘川与林寿证明了具有点可数 k 网的序列拓扑群是仿紧空间, 自然我们有下列的问题:

问题 2.4.1 *是否每一个具有点可数 k 网的序列 rectifiable 空间是仿紧的?*

在本小节中我们将给问题 2.4.1 的一个部分回答, 证明了当 G 具有点可数 k 网的序列 rectifiable 空间. 若 $so(G) < \omega_1$, 则 G 是可度量化. 此外, 我们讨论 rectifiable 的可度量性, 推广了定理 2.1.3.

设 X 是一个拓扑空间且 $x \in X$. 空间 X 具有性质 $P(x, U)$ [71] 若 $U \subset X$, $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset U$, $x_i \to x$ 当 $i \to \infty$ 且当 $i \neq j$ 有 $x_i \neq x_j$, 则存在 $\Gamma = \{x(n,k) : n, k \in \mathbb{N}\} \subset U$ 使得当 $k \to \infty$ 有 $x(n,k) \to x_n$ 且 $t : \mathbb{N}^2 \to \Gamma$ 是一双射, 其中 $t(n,k) = x(n,k)$ 且 $\Gamma \cup \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ 是 X 中同胚于 S_2 的闭子集.

引理 2.4.2 *[71] 具有点可数 k 网的序列非 Fréchet-Urysohn 空间包含闭拷贝 S_2.*

引理 2.4.3 设 G 具有点可数 k 网的序列非 *Fréchet-Urysohn rectifiable* 空间, 则对任意 $x \in G$ 和任意开集 $U \subset G$, G 具有性质 $P(x, U)$.

证明 由引理 2.4.2, G 中存在闭子集同胚于 S_2. 由定理 2.2.1, G 包含一个闭子集同胚于 S_ω. 设 $S_\omega = \{y(n,k) : n, k \in \mathbb{N}\} \cup \{e\}$, 其中 $y(n,k) \to e$ 当 $k \to \infty$ 且若 $(n,k) \neq (l,m)$ 有 $y(n,k) \neq y(l,m)$. 不妨设 S_ω 是 G 中闭子集. 设 U 是 G 中的开集且 $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset U$, $x_i \to x$ 当 $i \to \infty$ 且若 $i \neq j$ 有 $x_i \neq x_j$. 对任意 $i, k \in \mathbb{N}$, 置 $x(i,k) = p(x_i, y(i,k))$. 因为 $y(i,k) \to e$ 当 $k \to \infty$, 所以 $x(i,k) \to p(x_i, e) = x_i$ 当 $k \to \infty$. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 取 $k_i \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x(i,k) : i \in \mathbb{N}, k \geq k_i\} \subset U$ 且若 $(i,k) \neq (i',k')$ 和 $k \geq k_i, k' \geq k_{i'}$ 有 $x(i,k) \neq x(i',k')$. 则 $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{x(i,k) : i \in \mathbb{N}, k \geq k_i\} \cup \{x\}$ 是 G 同胚于 S_2 的闭子集. 否则, 存在序列 $\{x(i_j, k_j)\}_{j=1}^{\infty}$ 收敛于点 $b \in G$ 使得若 $j \neq j'$ 有 $i_j \neq i_{j'}$. 因此, 我们有

$$y(i_j, k_j) = q(x_{i_j}, p(x_{i_j}, y(i_j, k_j))) = q(x_{i_j}, x(i_j, k_j)) \to q(x, b) \text{ as } j \to \infty.$$

然而, 集 $\{y(i_j, k_j) : j \in \mathbb{N}\}$ 是 G 中闭和离散的, 矛盾.

引理 2.4.4 *[71]* 设 X 具有点可数 k 的序列空间且对任意 $x \in X$ 和 $U \subset X$ 性质 $P(x, U)$ 成立. 那么对任意 $\alpha < \omega_1, x \in X, U \subset X$ 是 X 中的开集, 则下列成立:

$Q(\alpha, x, U)$: 若 $\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset U$, $x_i \to x$ 当 $i \to \infty$, 则存在子集 $Q \subset U$ 使得 $\overline{Q}$ 是可数的且任意 $\beta < \alpha$ 有 $\overline{Q} \setminus \{x\} = U$, $x \in [Q]_\alpha$, $x \notin [Q]_\beta$.

定理 2.4.5 设 G 具有点可数 k 网的序列 *rectifiable* 空间. 若 $so(G) < \omega_1$, 则 G 是可度量化.

证明 设 $so(G) = \alpha$.

论断: 空间 G 是 Fréchet-Urysohn.

若不然, 由引理 2.4.3 和 2.4.4, 知 G 具有性质 $Q(\alpha+1, e, G)$. 显然, 因为 G 具有性质 $Q(\alpha+1, e, G)$, 所以 $so(G) \geq \alpha + 1 > \alpha$, 矛盾.

由论断知 G 是 Fréchet-Urysohn rectifiable 空间, 因此 G 不包含闭拷贝 S_2. 又因为 G 具有点可数 k 网的 Fréchet-Urysohn rectifiable 空间, 所以由推论 2.2.2 知 G 是可度量化.

引理 2.4.6 *[60] 设 G 是被点可数覆盖 $\mathscr{G}$ 确定的空间, 设 $\mathscr{G}$ 的任意有限个元素的并是 Fréchet-Urysohn 或者是每一点是 G_δ 集的序列空间. 若 G 不包含闭拷贝 S_ω 和 S_2, 则对 G 的每一点 x, 存在 $\mathscr{G}$的有限子族使得其并是点 x 的开邻域.*

引理 2.4.7 *设 G 是由可数递增的覆盖 $\mathscr{G} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ 确定的 rectifiable 空间, 其中每一G_n 是 rectifiable 子空间. 假设下列条件之一成立:*

1. *每一 G_n 是 Fréchet-Urysohn, 或者*
2. *每一 G_n 是序列的且点 e 是 G_n 中的 G_δ 子集.*

那么或者

(i) G 包含闭拷贝 S_ω, 或者

(ii) 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 G_n 是 G 的开且闭的子集.

证明 易证得 $\mathscr{G}$ 满足引理 2.4.6 的条件. 设 G 不包含闭拷贝 S_w. 则由定理 2.2.1, G 不包含闭拷贝 S_2. 又由引理 2.4.6, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $e \in \mathrm{Int}G_n$. 因此, $G_n = \cup\{x \cdot \mathrm{Int}G_n : x \in G_n\}$ 是 G 中的开集. 由引理 2.3.7, G_n 也是 G 中的闭集.

引理 2.4.8 *[60] 被由序列子空间组成的覆盖确定的空间是序列空间.*

定理 2.4.9 *设 G 是由可数递增的覆盖 $\mathscr{G} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ 确定的 rectifiable 空间, 其中每一 G_n 是具有点可数 k 网的 rectifiable 子空间. 假设下列条件之一成立:*

1. *每一 G_n 是 Fréchet-Urysohn, 或者*
2. *每一 G_n 是序列的且点 e 是 G_n 中的 G_δ 子集.*

那么 G 是可度量化的, 若 G 不包含闭拷贝 S_ω.

证明 设 G 不包含闭拷贝 S_ω. 由引理 2.4.7, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 G_n 是 G 中的开闭集. 因此, 对每一 $m \geq n$, G_m 也是 G 中的开闭集. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 设 $\mathscr{B}_n$ 是 G_n 的点可数 k 网. 置 $\mathscr{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$. 则 $\mathscr{B}$ 是 G 的可数 k 网. 事实上, 对 G 中

的每一紧子集 K, 有 $K \subset \bigcup_{m\geq n} G_m$, 即: $\{G_m : m \geq n\}$ 是 K 的开覆盖. 因此, 存在 $k \geq n$ 使得 $K \subset G_k$. 设 $K \subset U$, 其中 U 是 G 中开集. 因为 $K \subset G_k \cap U$, 所以 $\mathscr{B}_k$ 存在有限子族 $\mathscr{B}'_k$ 使得 $K \subset \cup\mathscr{B}'_k \subset U \cap G_k \subset U$. 因此, $\mathscr{B}$ 是 G 的可数 k 网. 由引理 2.4.8, G 是序列空间, 从而由推论 2.2.2, G 是可度量化的.

设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的一个预滤, 则 $\mathscr{U}$ 称为 X 的 *nest* [3], 若 $\mathscr{U}$ 每一元素是 X 的开子集且具有下列性质: 对任意 $U, V \in \mathscr{U}$ 或者 $U \subset V$ 或者 $V \subset U$. 空间 X 称为 π-*nested* 在点 $x \in X$ [3], 如果存在 nest 收敛于点 x; X 称为 *nested* 在点 x [3], 如果存在 X 中的 nest 使得其是点 x 的局部基. 最后, 空间 X 称为 *nested*, 如果 X 中每一点都是 nested.

引理 2.4.10 *如果 rectifiable G 是 π-nested 在某点 $a \in G$, 则 G 是 nested.*

证明　因为 G 是齐性的, 所以不妨设 a 是点 e. 取 nest $\mathscr{A}$ 使得其收敛于点 e. 置 $\phi = \{q(U, U) : U \in \mathscr{A}\}$. 那么 ϕ 是一个 nest 且是点 e 在 G 中的局部基. 由 G 是齐性的, 所以 G 是 nested.

引理 2.4.11 *[60] 设 U 是 X 的非空开子集, ϕ 是 X 的有限个子集组成的集合且 $U \subset \phi$. 那么存在 $E \in \phi$ 和 X 中非空开子集 V 使得 $V \subset \overline{V \cap E}$.*

引理 2.4.12 *设 G 是由双序列子空间组成的点可数覆盖 $\mathscr{G}$ 确定的 rectifiable 空间且满足如下条件:*

1. *对每一有限子族 $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$, $\cup\mathscr{G}'$ 是 Fréchet-Urysohn 且*
2. *G 不包含闭拷贝 S_ω.*

那么 G 是可度量化的.

证明　如果 G 是离散的, 那么显然 G 是可度量化的. 设 G 是非离散空间. 显然, $\mathscr{G}$ 和 G 满足引理 2.4.6 的假设条件. 因此, 存在有限子族 $\mathscr{E} \subset \mathscr{G}$ 和开集 U 使得 $e \in U \subset \cup\mathscr{E}$. 由引理 2.4.11, 存在 $E \in \mathscr{E}$ 和非空的开集 V 使得 $V \subset \overline{V \cap E}$. 取点 $x \in V \cap E$. 因为 $V \cap E$ 是 E 的一个开双序列子空间, 所以子空间 $V \cap E$ 是双序列. 因此, 由 [3, 命题 1], $V \cap E$ 是 π-nested 在点 x. 又由 [3, 引理 20], $\overline{V \cap E}$ 也是 π-nested 在点 x. 因为 $x \in V \subset \overline{V \cap E}$, 所以 V 也是 π-nested 在点 x. 因此, G 是 π-nested 在点 x. 因为 G 是 rectifiable 空间, 所以由引理 2.4.10

知 G 是 nested. 由引理 2.4.8, 空间 G 是序列, 从而 G 包含一个非平凡收敛序列. 因此, 空间 G 具有 G_δ 的子集不是开集. 又 G 是 nested, 所以由 [3, 引理 10] 知 G 是第一可数的. 因此 G 是可度量化的.

定理 2.4.13 *设 G 是由双序列子空间组成的点可数覆盖 $\mathscr{G}$ 确定的 rectifiable 空间. 那么下列条件等价:*

1. *空间 G 是 α_4 空间;*

2. *空间 G 是 Fréchet-Urysohn;*

3. *空间 G 是可度量化的.*

证明 (3)⇒(2) 是显然的. 由定理 2.1.7, (2)⇒(1), 所以只需证 (1)⇒(3).

(1)⇒(3). 由引理 2.4.8 和定理 2.1.7, G 是强 Fréchet-Urysohn. 特别, 对每一 $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$, $\cup\mathscr{G}'$ 是 Fréchet-Urysohn. 因此, 引理 2.4.12 中的 (1) 成立. 因为强 Fréchet-Urysohn 是闭遗传的, 所以 G 不包含闭拷贝 S_ω. 由引理 2.4.12, G 是可度量化的.

引理 2.4.14 *[60] 如果空间 X 被由 α_4 子空间组成的点有限覆盖 $\mathscr{U}$ 确定, 则 X 是 α_4 空间.*

推论 2.4.15 *如果 rectifiable 空间 G 被由双序列子空间组成的点有限覆盖 $\mathscr{U}$ 确定, 则 G 是可度量化的.*

证明 因为双序列空间是 α_4, 所以由引理 2.4.14, G 是 α_4. 由定理 2.4.13, 空间 G 可度量化.

定理 2.4.16 *设 G 被由闭双序列子空间组成的点可数覆盖 $\mathscr{G}$ 确定, 那么下列条件等价:*

1. *空间 G 不包含闭拷贝 S_ω;*

2. *空间 G 不包含闭拷贝 S_2;*

3. *空间 G 是可度量化.*

证明　由定理 2.2.1, (1)⇔(2). (3)⇒(1) 是显然.

(1)⇒(3). 因为每一个元素 $D \in \mathscr{G}$ 是闭双序列子空间, 所以对每一有限子族 $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ 知 $\cup\mathscr{G}'$ 是 Fréchet-Urysohn. 由引理 2.4.12, G 是可度量化.

定理 2.4.17 *设 G 是由可数递增的覆盖 $\mathscr{G} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ 确定的 rectifiable 空间, 其中每一G_n 是双序列子空间. 那么下列条件等价:*

1. *空间 G 不包含闭拷贝 S_ω;*
2. *空间 G 不包含闭拷贝 S_2;*
3. *空间 G 是可度量化.*

证明　易知每一有限子族 $\mathscr{G}' \subset \mathscr{G}$ 包含在某 G_n. 因此, 定理显然成立.

空间 X 称为 $\mathcal{M}_\omega$, 若 X 被可数个闭的度量化子空间所确定.

推论 2.4.18 *设 G 是 $\mathcal{M}_\omega$-rectifiable 空间. 若 G 不包含闭拷贝 S_ω, 则空间 G 是可度量化的.*

然而, 我们不能去掉推论 2.4.18 的条件“G 不包含闭拷贝 S_ω”. 事实上, 若 X 是包含极限点的一个收敛序列, 则自由拓扑群 $F(X)$ 是 $\mathcal{M}_\omega$ 空间, 但 $F(X)$ 是不可度量化.

§2.5　Moscow 的 rectifiable 空间

Moscow 性质是讨论拓扑群理论的重要工具, 具体可见[10, 第六章]. 在本小节中, 我们主要讨论什么样 rectifiable 空间具有 Moscow 性质, 如主要证明了点态标准弱伪紧的 rectifiable 空间是 Moscow 空间.

空间 X 称为 *Moscow* [10], 若对 X 每一开子集 U, 那么 $\overline{U}$ 是 X 中一族 G_δ 子集的并, 即: 对每一 $x \in \overline{U}$, 存在 X 中的 G_δ 子集 P 使得 $x \in P \subset \overline{U}$.

点 $x \in X$ 称为标准弱伪紧的点 (*point of canonical weak pseudocompactness*) [10] 或简记为 *cwp* 点, 如果满足下列条件:

(CWP) 对 X 中每一正则开集 U 满足 $x \in \overline{U}$, 若果存在 U 中的序列子集 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得对每一 $n \in \mathbb{N}$ 有 $x \in \overline{A_n}$ 且对 X 中每一开子集序列 $\eta = \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足对每一 $O_n \cap A_n \neq \emptyset$, 那么 η 在 X 中有聚点.

空间 X 称为点态标准弱伪紧 (*pointwise canonically weakly pseudocompact*) [10], 若 X 中的每一点是 cwp 点.

定理 2.5.1 如果 *rectifiable* 空间 G 是点态标准弱伪紧, 那么 G 是 *Moscow* 空间.

证明 设 U 是 G 的正则开子集. 显然, 只需证: 若 $e \in \overline{U}$, 则存在 G_δ 子集 $P \subset G$ 使得 $e \in P \subset \overline{U}$. 因此, 设 $e \in \overline{U}$ 且固定子集 $A_n \subset U$ 满足 (CWP), 其中 $x = e$.

下面我们将定义点 e 的一个开邻域序列 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 和序列 $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset U$ 使得对每一 $n \in \mathbb{N}$ 有 $a_n \in A_n$. 首先, 取 $a_1 \in A_0$ 且设 V_1 是点 e 的开邻域使得 $a_1 \cdot V_1 \subset U$. 设对某 $k \in \mathbb{N}$ 点 e 的开邻域 V_k 已经定义. 取点 $a_{k+1} \in A_{k+1} \cap V_k$. 设 V_{k+1} 是点 e 的开邻域使得 $\overline{V_{k+1}} \cdot V_{k+1} \subset V_k$, $q(V_{k+1}, V_{k+1}) \subset V_k$ 且 $a_{k+1} \cdot V_{k+1} \subset U$. 那么归纳定义了开邻域序列 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. 设 $\zeta = \{a_n \cdot V_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ 且 H 是 ζ 在 G 中所有聚点的集合.因为 G 是点态标准弱伪紧, 所以 $H \neq \emptyset$. 置 $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$. 显然, $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V_n}$, 因此 B 是 G 中的闭集.

论断 1: 集 H 是 B 的子集.

由 $a_n \in V_{n-1}$, 所以对任意 $n \geq 3$ 有 $a_n \cdot V_{n+1} \subset V_{n-1} \cdot V_{n+1} \subset V_{n-1} \cdot V_{n-1} \subset V_{n-2}$. 因此, 对每一 $k \geq 2$, $H \subset \overline{\cup\{a_n \cdot V_{n+1} : n \in \mathbb{N}, n \geq k+1\}} \subset \overline{V_{k-1}}$. 从而 $H \subset B$, 即论断 1 得证.

论断 2: 对每一 $a \in H$, 有 $a \cdot B = B$

事实上, 固定点 $a \in H$, 那么由论断 1 知 $a \in B$. 因此, 对每一点 $n \in \mathbb{N}$, $a \in V_n$. 对每一 $b \in B$ 和 $k \in \mathbb{N}$, 因为 $p(a, b) \in V_k$, 所以 $p(a, b) \in B$. 那么 $a \cdot B \subset B$. 取点 $b \in B$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 因为 $q(a, b) \in V_n$, 所以 $q(a, b) \in B$. 因此, $b = p(a, q(a, b)) = a \cdot q(a, b) \in a \cdot B$. 那么 $B \subset a \cdot B$, 从而 $a \cdot B = B$.

取定点 $a \in H$. 那么由论断 2, 我们有

$$B = a \cdot B \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cdot V_{n+1}) \cdot B} \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cdot V_n) \cdot V_n} \subset \overline{U}.$$

因为 $e \in B$, 所以 $e \in B \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (a_n \cdot V_n) \cdot V_n} \subset \overline{U}$. 又 B 是 G_δ 集, 所以 G 是 Moscow.

设 Y 是 X 的子集, Y 称为 C 嵌入 X, 若 Y 上的每一个连续实函数可连续延拓到 X.

引理 2.5.2 *[86, 引理 5] 设 X 是 Moscow 空间和 Y 是 X 的 G_δ 稠子集, 那么 Y 是 C 嵌入 X 中.*

由定理 2.5.1 和引理 2.5.2, 我们有下列推论.

推论 2.5.3 *设 G 是点态标准弱伪紧的 rectifiable 空间且 Y 是 G 中 G_δ 稠子空间. 那么 Y 是 C 嵌入 X 中.*

设 G 是 rectifiable 空间和 $U \subset G$. G 的子集 A 称为在 U 中是 *ω-deep*, 如果存在 G 存在 G_δ 子集 B 使得 $e \in B$ 且 $A \cdot B \subset U$. 称空间 G 的 *g-tightness* ($t_g(G)$) 是可数的, 若对 G 中每一正则的开集 U 和每一 $x \in \overline{U}$, 存在 U 中的 ω-deep 子集 A 使得 $x \in \overline{A}$.

定理 2.5.4 *每一个具有可数 g-tightness 的 rectifiable 空间是 Moscow 空间.*

证明 取 G 中的任意正则开集 U 和任意点 $x \in \overline{U}$. 因为 $t_g(G) \leq \omega$, 所以存在 U 中的 ω-deep 子集 A 使得 $x \in \overline{A}$. 那么我们可以取定 G 中的一个 G_δ 子集 B 使得 $e \in B$ 且 $A \cdot B \subset U$. 对每一 $a \in G$, 因为 $p(a, G)$ 是一个同胚映射, 所以 $x \in x \cdot B \subset \overline{A \cdot B} \subset \overline{U}$ 且 $x \cdot B$ 是 G 中的 G_δ 子集. 因此, 空间 G 是 Moscow 空间.

下列引理是一个简单的练习.

引理 2.5.5 *对 rectifiable 空间 G 中任意集 U, 则 U 中的任意可数个 ω-deep 子集的并是 U 中的 ω-deep 子集.*

引理 2.5.6 *如果 G 是具有可数 tightness 的 rectifiable 空间, 则 G 的 g-tightness 也是可数的.*

证明 由引理 2.5.5, 易知引理成立.

空间 X 具有可数 *o-tightness*, 若对于 X 任意开子集族 η 及 $\cup\eta$ 的闭包的任意点 $a \in X$, 存在 η 的可数子族 ζ 使得 $a \in \overline{\cup\zeta}$.

引理 2.5.7 *如果 G 具有可数 o-tightness 的 rectifiable 空间, 那么 G 中的 g-tightness 是可数的. 特别, 若 G 有可数胞腔度, 则 G 的 g-tightness 也是可数的.*

证明　设 U 是 G 的正则开集且 $x \in \overline{U}$. 记 ζ 为 U 中所有非空的开 ω-deep 子集的集合. 因为 G 是 rectifiable 空间, 所以 $U = \cup\zeta$. 因为 G 中的 o-tightness 是可数的, 所以存在可数子族 $\gamma \subset \zeta$ 使得 $x \in \overline{\cup\gamma}$. 那么 η 是可数的, 因此, 由引理 2.5.5 知 $V = \cup\gamma$ 是 U 中的 ω-deep 子集. 从而 $t_g(G) \le \omega$. 因为一个空间的 o-tightness 不大于一个空间的胞腔度, 所以证明完成.

拓扑空间 X 称为极不连通, 若 X 中的任意开集的闭包是 X 中的开集.

下列两个引理显然成立.

引理 2.5.8 *若 G 是极不连通的 rectifiable 空间, 则 G 中的 g-tightness 是可数的.*

引理 2.5.9 *若 G 具有可数伪特征的 rectifiable 空间, 那么 G 中的 g-tightness 是可数的.*

定理 2.5.10 *具有可数 g-tightness 的 rectifiable 空间 G 的每一稠子空间是 Moscow. 特别地, 如果 rectifiable 空间 G 满足下列条件之一, 则 G 是 Moscow 空间.*

1. *G 是 κ-Fréchet-Urysohn rectifiable G 的稠子空间;*
2. *G 的 tightness 是可数的;*
3. *G 的 o-tightness 是可数的;*
4. *G 的胞腔度是可数的;*
5. *G 的伪特征是可数的;*
6. *G 是极不连通的.*

证明　有引理 2.5.5 和 2.5.6, (1) 成立. 由定理 2.5.4、引理 2.5.7、引理 2.5.8 和引理 2.5.9, 知 (3), (4), (5) 和 (6) 分别成立.

引理 2.5.11 *设 G 是 rectifiable 空间, U 是 G 的子集和 b 是 G 的一个点. 若 U 中存在可数的 ω-deep 子集族 γ 使得 $b \in \overline{\cup\gamma}$, 那么 G 有一个闭 G_δ 子集 P 使得 $b \in P \subset \overline{U}$.*

证明 不失一般性, 不妨设 $b = e$. 此外, 记 γ 为 $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 易证可取闭 G_δ 子集 V_n 使得 $e \in V_n$, $F_n \cdot V_n \subset U$, $V_{n+1} \cdot V_{n+1} \subset V_n$ 和 $q(V_{n+1}, V_{n+1}) \subset V_n$. 现设 $P = \cap\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. 显然, P 是 G 的闭 G_δ 子集. 由定理 2.2.1 中论断 2 的证明, 我们有 $P = e \cdot P$. 因为 $e \in \overline{\cup\gamma}$, 所以

$$P = e \cdot P \subset \overline{\cup\{F_n \cdot P : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\cup\{F_n \cdot V_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{U}.$$

由引理 2.5.11, 我们有下列定理.

定理 2.5.12 *设 G 是 rectifiable 空间. 对 G 的每一开集 U 和每一点 $b \in \overline{U}$, 若 U 存在可数的 ω-deep 子集族 γ 使得 $b \in \overline{\cup\gamma}$, 那么 G 是 Moscow 空间.*

定理 2.5.13 *设 G 是序列的 rectifiable 且 $G \setminus \{e\}$ 是正规的, 那么 G 有可数的伪特征.*

证明 不妨设 e 是 G 中的非孤立点. 因为 G 是齐性, 所以只需证 e 是一个 G_δ 点. 设 e 不是 G 的 G_δ 点. 显然, $G \setminus \{e\}$ 不是序列闭子集, 从而存在收敛于点 e 的序列 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset G \setminus \{e\}$. 置 $A = \{x_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ 和 $B = \{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$. 显然, 可设 A 和 B 是不相交的. 显然, A 和 B 是 $G \setminus \{e\}$ 中的闭子集, 又因为 $G \setminus \{e\}$ 是正规的, 所以在 $G \setminus \{e\}$ 上存在连续的函数 f 使得对每一 $x \in A$ 有 $f(x) = 1$ 且对每一 $x \in B$ 有 $f(x) = 0$. 因此, 不可能连续延拓函数 f 到点 e. 但因为 G 是序列, 所以由定理 2.5.10 的 (2) 知空间 G 是 Moscow, 因此由引理 2.5.2 知 $G \setminus \{e\}$ 是 C 嵌入 G, 矛盾.

第三章　rectifiable 空间上 Vietoris 拓扑和 rectifiable 完全

rectifiable 空间所具有的代数结构与拓扑群有很大的区别, 而讨论拓扑空间上 Vietoris 拓扑与拓扑空间本身的联系, 对于我们研究拓扑空间特别是具有代数结构的空间有很大的好处. Weil 完全性在一般拓扑学是一个极其重要的概念, 具体可见 [10] 和 [32].

本章讨论关于 rectifiable 空间上 Vietoris 拓扑. 我们主要定义了 rectifiable 完全并讨论相关性质, 证明了: (1) $(C(G),\cdot)$ 具有右 loop 结构当且仅当 $|G|=1$, 其中 G 是 rectifiable 空间; (2) 证明了局部紧的 rectifiable 空间是 rectifiable 完全的和 rectifiable 空间上的开映射定理.

§3.1　rectifiable 空间上 Vietoris 拓扑

设 G 是 rectifiable 空间. $C(G)$ 表示 G 中所有非空的紧子集. 本小节中, 我们定义 rectifiable 空间 $C(G)$ 的上右 loop 结构和半右 loop 结构, 证明了 $(C(G),\cdot)$ 具有右 loop 结构当且仅当 $|G|=1$; 另外, 我们定义了强 rectifiable 且证明了若 G 是强 rectifiable, 则 $(\mathcal{G},\cdot)$ 是 $C(G)$ 中具有右 loop 结构的极大的唯一子集.

§3.1.1　$C(G)$ 上的右 loop 结构

定义 3.1.1 *设集合 S 赋予一个二元运算 '$*$', 则称 $(S,*)$ 具有右 loop 结构, 若如下列条件满足:*

1. *存在 $e\in S$ 使得对每一 $s\in S$ 有 $s*e=s$;*
2. *对任意 $a,b\in S$, $a*b\in S$;*
3. *对任意 $a\in S$, 存在唯一的元素 $b\in S$ 使得 $a*b=e$.*

*此外, 如果去掉上面定义的条件 (3), 那么称 $(S,*)$ 具有***半右 loop 结构***.*

注记 (1) 整数 Z 赋予减法运算 $(-)$ 具有右 loop 结构.

(2) 显然, 若 G 是 rectifiable 空间, 则 $(C(G),\cdot)$ 具有半右 loop 结构. 然而, 我们将证明当 G 基数大于 1 时, $(C(G),\cdot)$ 不具有右 loop 结构, 见定理 3.1.2.

定理 3.1.2 *$(C(G),\cdot)$ 具有右 loop 结构当且仅当 $|G|=1$.*

证明 充分性是显然的.

必要性. 设 $|C(G)|\geq 2$.

论断: $C(G)$ 中的每一元素的右逆是单点集.

设 $A,B\in C(G)$ 且 $a\in A, b_1,b_2\in B$. 显然, 因为 $p(a,G)$ 是同胚映射, 所以 $a\cdot b_1=a\cdot b_2$ 当且仅当 $b_1=b_2$. 从而对每一 $a\in A$ 有 $|a\cdot B|=|B|$. 那么 $|A\cdot B|\geq|B|$. 又因为 $C(G)$ 具有右 loop 结构, 所以 $C(G)$ 的元素 A 在 $C(G)$ 有右逆 A^*. 那么

$$1=|\{e\}|=|A\cdot A^*|\geq|A^*|\geq 1.$$

因此 $|A^*|=1$, 即: A^* 是单点集.

由论断, $q(G,e)$ 是单点集. 因为 $q(e,e)=e$, 所以 $q(G,e)=\{e\}$. 但是, 对每一 $g\in G$, 有 $e=g\cdot q(g,e)=g\cdot e=g$, 这蕴含 G 是单点集, 矛盾.

由定理 3.1.2, 若 $|G|\geq 2$, 则 $C(G)$ 不具有右 loop 结构. 易知 $C(G)$ 包含子集 $\mathcal{G}=\{\{g\}:g\in G\}$ 关于运算 '$\cdot$' 具有右 loop 结构. 但我们不知道 $(\mathcal{G},\cdot)$ 是否是 $C(G)$ 中具有右 loop 结构极大的子集? 因此, 有下列问题:

问题 3.1.3 *$(\mathcal{G},\cdot)$ 是 $C(G)$ 中具有右 loop 结构的极大 (唯一) 子集?*

下面我们就问题 3.1.3 给出一些部分回答.

定义 3.1.4 *rectifiable 空间 G 称为强 rectifiable 若, 对每一 $x\in G$, 有 $q(x,e)\cdot q(e,x)=e$.*

定理 3.1.5 *若 G 是强 rectifiable, 则 $(\mathcal{G},\cdot)$ 是 $C(G)$ 中具有右 loop 结构的极大的唯一子集.*

证明 设 $\mathcal{H}$ 是具有右 loop 结构且包含 $\mathcal{G}$ 的极大子集. 由定理 3.1.2 中论断的证明, 对每一 $A\in\mathcal{H}$, 存在 $\{a\}\in\mathcal{G}$ 使得 $A\cdot\{a\}=A\cdot a=\{e\}$, 因此 $q(A,e)=\{a\}$. 若存在点 $a\in G$ 使得 $q(A,e)=\{a\}$, 那么 A 是一个单点集. 事实上, 若不然, 存

在非单点集 $A \in \mathcal{H}$ 和某点 $a \in G$ 使得 $q(A,e)=\{a\}$. 因此, 存在不同的两点 $a_1, a_2 \in A$ 使得 $q(a_1,e)=q(a_2,e)=a$. 那么

$$a \cdot q(e,a_1) = q(a_1,e)\cdot q(e,a_1) = e \text{ 且 } a\cdot q(e,a_2) = q(a_2,e)\cdot q(e,a_2) = e.$$

因为 $p(a,G)$ 是同胚映射, 所以 $q(e,a_1)=q(e,a_2)$, 这蕴含 $a_1=a_2$. 矛盾. 另外，由定理 3.1.2 中论断知 $C(G)$ 中任意具有右 loop 结构的的极大子集包含 $(\mathcal{G},\cdot)$, 所以唯一性也得以证明.

§3.2　$C(G)$ 上赋予的 Vietoris 拓扑

本小节中, 我们在 $C(G)$ 上赋予的 Vietoris 拓扑, 证明了若 G 是局部紧的 rectifiable 空间, 那么赋予 Vietoris 拓扑的空间 $(C(G),\cdot)$ 是拓扑半右 loop.

集 $C(G)$ 上的 *Vietoris 拓扑* 定义如下: 对 G 中的每一子集 A, 定义 $A^+=\{B\in C(G): B\subset A\}$ 和 $A^-=\{B\in C(G): B\cap A\neq\emptyset\}$. 集 $C(G)$ 上的 Vietoris 拓扑的一个子基为 $\{W^+: W \text{ 是 } G \text{ 中的开集}\}\cup\{W^-: W \text{ 是 } G \text{ 中的开集}\}$. 显然, 有 $V_1^+\cap\cdots\cap V_n^+=(V_1\cap\cdots\cap V_n)^+$, 因此 Vietoris 拓扑的基本开集具有形式为 $V_1^-\cap\cdots\cap V_n^-\cap V_0^+$, 其中 $V_0, V_1,\cdots,V_n$ 是 G 中的开集; 此外, 可不妨设 $V_i\subset V_0, i=1,2,\cdots,n$.

在本小节中, 对一个 rectifiable 空间, 我们在 $C(G)$ 上都赋予的 Vietoris 拓扑.

引理 3.2.1 *设 G 是局部紧的 rectifiable 空间和 A,B 是 G 中满足 $A\cdot B\subset V$ 的两个紧子集, 其中 V 是 G 中的开子集, 那么存在 e 的开邻域 U 使得 $(A\cdot U)\cdot(B\cdot U)\subset V$.*

证明　首先, 我们先证明两个论断.

论断 1: 存在 G 中两个开集 L,W 使得 $A\cdot B\subset L\cdot W\subset V$, $A\subset L$ 且 $B\subset W$.

事实上, 取定点 $a\in A$. 对每一 $b\in B$, 因为 $p(a,b)\in V$ 和 G 是局部紧的, 所以存在点 e 的紧邻域 V_{ab} 使得 $p(a\cdot V_{ab}, b\cdot V_{ab})\subset p(a\cdot\overline{V}_{ab}, b\cdot\overline{V}_{ab})\subset V$. 又 B 是紧的且 $B\subset\cup\{b\cdot V_{ab}: b\in B\}$, 从而存在有限子集 $\{b_i: i=1,\cdots,n\}\subset B$ 使得 $B\subset\bigcup_{i=1}^n b_i\cdot V_{ab_i}$. 设 $U_a=\bigcup_{i=1}^n b_i\cdot V_{ab_i}$. 那么 $\overline{U_a}=\bigcup_{i=1}^n\overline{b_i\cdot V_{ab_i}}$ 是紧的, 设 $W_a=\bigcap_{i=1}^n V_{ab_i}$, 则 $p(a\cdot W_a,\overline{U_a})\subset V$.

因为 $\{a\cdot W_a : a\in A\}$ 是 A 的开覆盖, 所以存在有限子集 $\{a_i : i = 1,\cdots,m\}\subset A$ 使得 $A\subset\bigcup_{i=1}^m a_j\cdot W_{a_j}$. 设 $L=\bigcup_{i=1}^m a_j\cdot W_{a_j}$ 和 $W=\bigcap_{j=1}^m U_{a_j}$. 那么 $A\subset L$ 和 $B\subset W$. 从而

$$A\cdot B\subset L\cdot B\subset L\cdot W\subset V, A\subset L \text{ 且 } B\subset W.$$

论断 2: 对 G 中每一个紧子集 C, 若 C 包含 G 中的开子集 U_C, 则存在 G 中开子集 L_C使得 $C\cdot L_C\subset U_C$.

事实上, 对每一 $x\in C$, 因为 $x\in U_C$, 所以存在点 e 的开邻域 U_x 使得 $p((x\cdot U_x),U_x)\subset U_C$. 又由 C 是紧的, 所以存在有限子集 $\{c_i : i=1,\cdots,l\}\subset C$ 使得 $C\subset\bigcup_{i=1}^l x_i\cdot U_{x_i}\subset U_C$. 设 $L_C=\cap\bigcap_{i=1}^l U_{x_i}$. 从而

$$C\cdot L_C\subset(\bigcup_{i=1}^l x_i\cdot U_{x_i})\cdot L_C=\bigcup_{i=1}^l((x_i\cdot U_{x_i})\cdot L_C)\subset\bigcup_{i=1}^l((x_i\cdot U_{x_i})\cdot U_{x_i})\subset U_C.$$

由论断 1 和 2, 易知引理成立.

定义 3.2.2 *设 $(S,\cdot)$ 是具有半右 loop 结构的二元运算且赋予拓扑 $\mathscr{S}$. $(S,\cdot)$ 称为拓扑半右 loop, 若二元运算 '$\cdot$' 关于拓扑 $\mathscr{S}$ 是连续的.*

定理 3.2.3 *如果 G 是局部紧的 rectifiable 空间, 那么赋予 Vietoris 拓扑的空间 $(C(G),\cdot)$ 是拓扑半右 loop.*

证明 定义映射 $f : C(G)\times C(G)\to C(G)$ 为 $f(A,B)=A\cdot B$, 其中 $A,B\in C(G)$. 那么我们只需证明 f 是连续的. 设 $A,B\in C(G)$ 且 $U_0,U_1,\cdots,U_n$ 是 G 中的开集使得 $U_i\subset U_0$ 和 $f(A,B)=A\cdot B\in U_1^-\cap\cdots\cap U_n^-\cap U_0^+$. 由引理 3.2.1, 存在点 e 的开邻域 W 使得 $(A\cdot W)\cdot(B\cdot W)\subset U_0$. 此外, 对每一 $i=1,\cdots,n$, 因为 $A\cdot B\cap U_i\neq\emptyset$, 所以存在点 $a_i\in A$ 和 $b_i\in B$ 使得 $a_i\cdot b_i\in U_i$. 因此, 对每一 $i=1,\cdots,n$, 存在点 e 的开邻域 W_i 使得 $(a_i\cdot W_i)\cdot(b_i\cdot W_i)\subset U_i$.

置

$$\mathcal{H}=(a_1\cdot W_1)^-\cap\cdots(a_n\cdot W_n)^-\cap(A\cdot W)^+;$$

$$\mathcal{M}=(b_1\cdot W_1)^-\cap\cdots(b_n\cdot W_n)^-\cap(B\cdot W)^+.$$

显然, $\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{M}$ 是 $C(G)$ 中的开集. 此外, 易证 $A\in\mathcal{H}$ 和 $B\in\mathcal{M}$. 下面证 $f(\mathcal{H},\mathcal{M})=\mathcal{H}\cdot\mathcal{M}\subset U_1^-\cap\cdots\cap U_n^-\cap U_0^+$.

事实上, 对任意 $H \in \mathcal{H}$ 和 $M \in \mathcal{M}$, 我们有 $H \subset A \cdot W$ 和 $M \subset B \cdot W$. 因此, $H \cdot M \subset (A \cdot W) \cdot (B \cdot W) \subset U_0$. 对每一 $1 \leq i \leq n$, 因为 $H \cap (a_i \cdot W_i) \neq \emptyset$, 所以存在 $h_i \in H$ 和 $w_i \in W_i$ 使得 $h_i = a_i \cdot w_i$. 此外, 对每一 $1 \leq i \leq n$, 因为对每一 $1 \leq i \leq n$ 有 $M \cap (b_i \cdot W_i) \neq \emptyset$, 所以存在 $m_i \in M$ 和 $v_i \in W_i$ 使得 $m_i = b_i \cdot v_i$. 因此, 对每一 $1 \leq i \leq n$, 有

$$h_i \cdot m_i = (a_i \cdot w_i) \cdot (b_i \cdot v_i) \in (a_i \cdot W_i) \cdot (b_i \cdot W_i) \subset U_i.$$

那么对每一 $1 \leq i \leq n$, 有 $(H \cdot M) \cap U_i \neq \emptyset$. 因此 $H \cdot M \in U_1^- \cap \cdots \cap U_n^- \cap U_0^+$.

推论 3.2.4 $(C(S_7), \cdot)$ 赋予 *Vietoris* 拓扑是拓扑半右 *loop*.

命题 3.2.5 $C(G)$ 赋予 *Vietoris* 拓扑是 T_2 空间.

证明 设 $A, B \in C(G)$ 且 $A \neq B$. 不妨设 $A \not\subseteq B$. 取点 $b \in B \setminus A$. 由于 G 是正则的且 A 和 B 是紧的, 那么易知存在 G 中的开集 U 和 V 使得 $b \in U$, $A \subset V$ 和 $U \cap V = \emptyset$, 那么显然 U^+ 和 V^+ 分别是 A 和 B 的开集且 $U^+ \cap V^+ = \emptyset$. 从而 $C(G)$ 是 T_2 空间.

下列两命题是一个简单的练习, 我们略去证明.

命题 3.2.6 设 $\mathcal{D}$ 是 G 的有限子集组成的集合. 若 $C(G)$ 赋予 *Vietoris* 拓扑, 那么 $\mathcal{D}$ 是 $C(G)$ 中的稠子集.

命题 3.2.7 若 $C(G)$ 赋予 *Vietoris* 拓扑, 那么 $\mathcal{G}$ 在 $C(G)$ 中是闭的.

定理 3.2.8 若 $C(G)$ 赋予 *Vietoris* 拓扑, 那么子空间 $\mathcal{G}$ 是 *rectifiable* 子空间.

证明 因为 G 是 rectifiable 空间, 所以存在同胚映射 $\varphi : G \times G \to G \times G$ 和点 $e \in G$ 使得 $\pi_1 \circ \varphi = \pi_1$ 且对任意 $x \in G$ 有 $\varphi(x, x) = (x, e)$. 定义 $\phi : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ 使得对每一 $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{G}$ 有 $\phi(\{x\}, \{y\}) = (\{\pi_1 \circ \varphi(x, y)\}, \{\pi_2 \circ \varphi(x, y)\})$. 易知 ϕ 是一个在 $\mathcal{G}$ 上的 rectification. 因此, $\mathcal{G}$ 是 rectifiable 子空间.

§3.3　rectifiable 空间的 rectifiable 完全

在本小节中, 我们定义了 rectifiable 完全, 证明了局部紧的 rectifiable 空间是 rectifiable 完全的. 另外, 我们还证明了 rectifiable 空间上的开映射定理.

rectifiable 空间 G 的网 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 称为*左柯西网*, 若对在点 e 每一开邻域 U 存在 $\alpha_0\in\Gamma$ 使得对每一 $\alpha,\beta\geq\alpha_0$ 有 $q(x_\alpha,x_\beta)\in U$.

设 ξ 是 rectifiable 空间 G 的子集组成的滤子. ξ 称为*左柯西滤子*, 若对点 e 每一邻域 U, 那么存在 $F\in\xi$ 和点 $a\in G$ 使得 $q(a,F)\subset U$. rectifiable 空间 G 称为 *rectifiable 完全*, 若对 G 每一左柯西滤子是收敛的. 显然, 一个 rectifiable 空间 G 是 rectifiable 完全当且仅当 G 中每一个左柯西网是收敛的.

设 G 是 rectifiable 空间. 如果存在一个 rectifiable 空间 H 使得 G 是 H 的稠子集, 那么称 H 是 G 的 rectifiable 完全且记为 $\widehat{G}$.

设 G,H 是 rectifiable 空间且 $f:G\to H$ 是 G 到 H 的映射. 映射 f 称为*同态*, 若对任意的点 $x,y\in G$ 那么有 $f(p_G(x,y))=p_H(f(x),f(y))$. 此外, 若 f 是 G 到 H 的一到一的满同态, 那么 f 称为*同构*.

命题 3.3.1 *设 G,H 是 rectifiable 空间且 $f:G\to H$ 是 G 到 H 同态, 那么 $f(e_G)=e_H$ 且对任意 $x,y\in G$ 有 $f(q_G(x,y))=q_H(f(x),f(y))$.*

证明　显然, $f(e_G)=f(p_G(e_G,e_G))=p_H(f(e_G),f(e_G))$. 因为 $p_H(f(e_G),e_H)=f(e_G)$ 且 $p_H(f(e_G),G)$ 是同胚映射, 所以 $e_H=f(e_G)$.

对任意的 $x,y\in G$, 我们有 $f(y)=f(p_G(x,q_G(x,y)))=p_H(f(x),f(q_G(x,y)))$. 因此, $f(q_G(x,y))=q_H(f(x),p_H(f(x),f(q_G(x,y))))=q_H(f(x),f(y))$.

下列引理是一个简单练习, 我们略去证明.

引理 3.3.2 *设 $f:G\to H$ 是连续同态, 其中 G 和 H 是 rectifiable 空间. 若 ξ 是 G 的左柯西滤子, 那么 $f(\xi)$ 是 H 的左柯西滤子.*

由命题 3.3.1 和引理 3.3.2, 类似 [67] 中的证明我们能证明下面两引理. 读者也可以参见 [10, 命题 3.6.12 和 3.6.13] 中的证明.

引理 3.3.3 *设 G 是 rectifiable 空间 H 中稠的 rectifiable 子空间且 $f:G\to K$ 是 G 到 rectifiable 完全空间 K 的连续同态, 那么 f 可延拓成连续同态 $\tilde{f}:H\to K$.*

引理 3.3.4 设 $f: G \to H$ 是 *rectifiable* 空间之间的拓扑同构. 设 G 和 H 分别是 *rectifiable* 完全空间 G^* 和 H^* 的稠 *rectifiable* 子空间, 那么 f 可延拓成拓扑同构 $\tilde{f}: G^* \to H^*$.

由引理 3.3.4, 我们有下面定理, 该定理表明一个 rectifiable 空间的 rectifiable 完全是唯一的.

定理 3.3.5 设 G 是 *rectifiable* 空间且设 H_1 和 H_2 是 *rectifiable* 完全空间使得 G 是 H_1 和 H_2 的 *rectifiable* 稠子空间, 那么存在从 H_1 到 H_2 的拓扑同构 ϕ 使得对每一 $g \in G$ 有 $\phi(g) = g$.

易证得下面两命题.

命题 3.3.6 *Rectifiable* 完全空间 G 的 *rectifiable* 子空间 H 是 *rectifiable* 完全当且仅当 H 是 G 中的闭集.

命题 3.3.7 一族 *rectifiable* 完全空间的积空间是 *rectifiable* 完全的.

定理 3.3.8 *[85, 引理4]* 设 K 是紧的 *rectifiable* 空间且 G 是 K 的稠 *rectifiable* 子空间, 则下列等价:

1. G 是伪紧的;
2. G 是 K 的 G_δ 稠子集;
3. $G \times G$ 是伪紧的.

引理 3.3.9 设 G 是 *rectifiable* 空间, 那么 G 中每一个具有收敛子网的左柯西网是收敛的.

证明 设 $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 G 中的左柯西网且 $\{x_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ 是收敛于点 $x \in G$ 的子网, 其中 Λ 是 Γ 的共尾子集. 设 U 和 V 是 G 点 e 的邻域使得 $p(x\cdot V, V) \subset p(x, U) = x\cdot U$. 因为 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ 是 G 左柯西网, 所以存在 $\alpha_0 \in \Gamma$ 使得对每一 $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ 有 $q(x_\alpha, x_\beta) \in V$. 另一方面, 因为 $x_\beta \to x$, 所以存在 $\beta_0 \in \Lambda$ 使得 $\beta_0 > \alpha_0$ 且对每一 $\beta \geq \beta_0$ 有 $x_\beta \in x \cdot V$. 让 $\alpha = \beta_0$, 则对每一 $\gamma > \alpha_0$ 有

$$x_\gamma = p(x_\alpha, q(x_\alpha, x_\gamma)) \in p(x_{\beta_0}, V) \subset p(x \cdot V, V) \subset x \cdot U,$$

即, $x_\gamma \to x$.

定理 3.3.10 局部紧的 *rectifiable* 空间是 *rectifiable* 完全的. 特别地, 紧的 *rectifiable* 空间是 *rectifiable* 完全.

证明 设 U 是点 e 在 G 中的开邻域且具有紧的闭包且设 $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 G 中的左柯西网, 那么存在 $\alpha_0\in\Gamma$ 使得对每一 $\alpha,\beta\geq\alpha_0$ 有 $q(x_\alpha,x_\beta)\in U$. 对每一 $\beta>\alpha_0$, $x_\beta=p(x_{\alpha_0},q(x_{\alpha_0},x_\beta))\in p(x_{\alpha_0},U)$. 因为 $p(x_{\alpha_0},\overline{U})$ 是紧的, 所以存在收敛的子网 $\{x_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$ 和某共尾子集 $\Lambda\subset\Gamma$ 使得 $x_\beta\to x\in G$. 那么由引理 3.3.9 知 $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 收敛于点 x.

定理 3.3.11 设 G 是可数紧的 *rectifiable* 空间, 那么 βG 是 G 的 *rectifiable* 完全.

证明 正如 V.V. Uspenskij 在 [86] 的证明, 空间 βG 是 rectifiable 空间. 因此由定理 3.3.10, βG 是 rectifiable 完全. 因为 G 是 βG 中的稠子集, 所以由定理 3.3.5 有 $\beta G=\widetilde{G}$.

定理 3.3.12 设 $G=\prod_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 是 *rectifiable* 空间的乘积空间, 那么 $\widetilde{G}$ 是拓扑同构于积空间 $\prod_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{G_\alpha}$.

证明 显然, G 是 rectifiable 空间 $H=\prod_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{G_\alpha}$ 的稠 rectifiable 子空间. 由命题 3.3.7, H 是 rectifiable 完全的, 从而由定理 3.3.5 有 $\widetilde{G}$ 是拓扑同构于 H.

定理 3.3.13 设 $\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是一族可数紧的 *rectifiable* 空间, 那么 $G=\prod_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 是伪紧的.

证明 置 $K=\prod_{\alpha\in\Lambda}\widetilde{G_\alpha}$, 其中每一 $\widetilde{G_\alpha}$ 是 G_α rectifiable 完全. 由定理 3.3.11 和 3.3.12, K 是 G 紧的 rectifiable 完全. 此外, 易证 G 在 K 中是 G_δ 稠, 那么由定理 3.3.8, G 是伪紧的.

注记 存在两个可数紧的空间 X,Y 使得 $X\times Y$ 不是伪紧的, 见 [58, 82].

问题 3.3.14 设 $\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是一族伪紧的 *rectifiable* 空间, 那么 $G=\prod_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 是伪紧吗?

问题 3.3.15 若 G 是伪紧的 *rectifiable* 空间, 那么 G 具有 *rectifiable* 完全?

但是, 我们有下列的结果.

推论 3.3.16 *设 G 是 rectifiable 空间. 若 βG 是紧的 rectifiable 空间, 则 G 是伪紧的.*

证明 由 [85, 86], 紧的 rectifiable 空间 βG 是 dyadic 紧的. 由 [31], 若 βY 是 dyadic, 那么 Y 是伪紧的, 从而 X 是伪紧的.

定理 3.3.17 [开映射定理] *设 G 和 H 是局部紧的 rectifiable 空间且设 f 是从 G 到 H 的连续同态. 若 G 是 σ 紧的, 那么 f 是开映射.*

证明 设 U 是点 e_G 在 G 中的开邻域, 其中 e_G 是 G 的右恒等元, 那么存在点 e_G 在 G 中的开邻域 V 使得 $q(\overline{V},\overline{V})\subset U$ 且 $\overline{V}$ 是紧的. 因为 $G=\bigcup_{x\in G}p_G(x,V)$ 和 G 是 σ 紧的, 所以存在 G 中的可数子集 $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ 使得 $G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}p_G(x_n,V)$. 因此, $H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f(p_G(x_n,\overline{V}))$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 设 $y_n=f(x_n)$. 那么 $H=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f(p_G(x_n,\overline{V}))=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}p_H(y_n,f(\overline{V}))$. 因为 H 是局部紧的, 所以 rectifiable 空间 H 具有 Baire 性质. 那么存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{Int}f(\overline{V})\neq\emptyset$, 从而 H 中存在非空间的开集 W 使得 $W\subset f(\overline{V})$. 取一点 $w\in W$. 那么 $w\in f(\overline{V})$ 且对某 $v\in\overline{V}$ 有 $w=f(v)$. 因此,

$$e_H\in q_H(w,W)\subset q_H(w,f(\overline{V}))=q_H(f(\overline{V}),f(\overline{V}))=f(q_G(\overline{V},\overline{V}))\subset f(U),$$

这蕴含 $f(U)$ 是点 e_H 在 H 中的开邻域.

引理 3.3.18 *若 Y 是正则空间 X 的稠子空间, 那么对每一 $y\in Y$ 有 $\chi(y,Y)=\chi(y,X)$.*

引理 3.3.19 *若 H 是 G 中度量化的 rectifiable 子空间, 那么 $\overline{H}$ 是度量化的.*

证明 由命题 3.3.1, $\overline{H}$ 是 G 的 rectifiable 子空间, 因此 $\overline{H}$ 是齐性空间. 因为一个 rectifiable 空间是可度量化的当且仅当它是第一可数的. 因此, 只需证 $\overline{H}$ 中的点 e 在 $\overline{H}$ 中具有可数局部基. 因为 $\chi(e,H)\leq\omega$, 所以由引理 3.3.18 有 $\chi(e,\overline{H})\leq\omega$. 因此 $\overline{H}$ 是可度量化的.

由引理 3.3.19, 我们有下列定理.

定理 3.3.20 *对任意度量化的 rectifiable 空间 G, 那么它的 rectifiable 完全 $\widetilde{G}$ 是可度量化的.*

第四章　具有代数结构的拓扑空间的 Hausdorff 紧化的余

一个拓扑空间 X 的 Hausdorff 紧化的余指的是 X 的某 Hausdorff 紧化 bX 中的子空间 $bX \setminus X$. 在研究 Hausdorff 紧化的一个重要问题是一个 Tychonoff 空间 X 的 Hausdorff 紧化的余属于什么样的空间类? M. Henriksen 和 J. Isbell [9] 证明了 Tychonoff 空间 X 是可数型当且仅当 X 的任何 (或某一) Hausdorff 紧化的余是 Lindelöf. 这结果的取得, 让拓扑学家看到研究的可能性. 近年来, 著名拓扑学家 A.V. Arhangel'skiĭ 取得很多重要的成果, 特别是二岐性定理的取得: 若 G 是拓扑群, 那么 G 的 Hausdorff 紧化的余或者是伪紧的或者是 Lindelöf. 二岐性定理的取得使拓扑学家们对该问题的可能性解决看到了曙光, 运用二岐性定理得到了一些重要结果, 具体见 [11, 12, 13, 47, 48]. 但是, 对拓扑空间 Hausdorff 紧化的研究还有很多是不知道, 即使是拓扑群的 Hausdorff 紧化.

本章系统讨论了拓扑群、仿拓扑群、rectifiable 空间的 Hausdorff 紧化的余, 肯定地回答了刘川教授与林寿教授的两个公开问题, 见 [Topology Appl., 156(2009), 849–854] 和 [Topology Appl., **157**(2010), 1966-1974]; 另外, 否定回答了 D. Basile 和 A. Bella 的一个公开问题 [Comment. Math. Univ. Carolin., **50(4)**(2009), 607–613]. 本章部分取材于作者与沈荣鑫博士的合作文章“On rectifiable spaces and paratopological groups” 和与刘川教授、导师林寿教授的合作文章“A note on rectifiable spaces”.

§4.1　拓扑群的 Hausdorff 紧化的余的局部性质

设 X 是非局部紧的拓扑群且 bX 是 X 的紧化. 在 [7] 中, A.V. Arhangel'skiĭ 证明了若余 $Y = bX \setminus X$ 具有 G_δ 对角线或点可数基, 则 X 和 Y 是可分与度量化的. 在 [47] 中, 刘川推广了 A.V. Arhangel'skiĭ 的结果, 证明了若 Y 满足下列条件 (i) 或 (ii), 则 X 和 bX 是可分与度量化的.

(i) $Y = bX \setminus X$ 是度量空间的商 s 映像且 Y 的 π 特征是可数的;

(ii) $Y = bX \setminus X$ 具有局部 G_δ 对角线.

在本节中, 我们主要讨论下列问题.

问题 设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 具有什么样的局部性质 Φ, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.

空间 X 称为具有局部 Φ, 若对每一点 $x \in X$, 存在点 x 的开邻域 U 使得 U 具有性质 Φ.

§4.1.1 余具有可数 π 特征

本小节中, 我们主要讨论拓扑群的 Hausdorff 紧化的余具有可数 π 特征, 这些结果推广了 A.V. Arhangel'skiĭ 和刘川的结果.

首先, 我们先给出一些技术引理.

定理 4.1.1 *(Henriksen 和 Isbell [43]) 空间 X 是可数型当且仅当 X 的任何紧化的余是 Lindelöf.*

引理 4.1.2 *[6] 若 X 是 Lindelöf p 空间, 那么 X 的任何余是 Lindelöf p 空间.*

引理 4.1.3 *[47] 设 G 是非局部紧的拓扑群. 则 G 是局部可分与度量化, 若对每一点 $y \in Y = bG \setminus G$, 存在点 y 的开邻域 $U(y)$ 使得 $U(y)$ 中每一可数紧的子集是可度量化且 Y 的 π 特征是可数的.*

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族. $\mathscr{A}$ 称为 X 的 p 网 [19], 若对不同的点 $x, y \in X$ 存在 $A \in \mathscr{A}$ 使得 $x \in A \subset X - \{y\}$. $\mathscr{A}$ 称为 X 的 p 基 (即, T_1 点分离开覆盖) [19], 若 $\mathscr{A}$ 是 X 的 p 网且 $\mathscr{A}$ 的每一元素是 X 的开子集. $\mathscr{A}$ 称为 X 的 p 亚基 [50] (在 [19] 中, p 亚基记为 X 的条件 (1.5)), 对不同的点 $x, y \in X$ 存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{A}^{<\omega}$ 使得 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset X - \{y\}$. $\mathscr{A}$ 称为 X 的 p-k 网 [50] (在 [37] 中, p-k 网记为条件 $(1.4)_p$), 若对 X 每一紧子集 $K \subset X \setminus \{y\}$ 存在 $\mathscr{F} \in \mathscr{A}^{<\omega}$ 使得 $K \subset \cup\mathscr{F} \subset X \setminus \{y\}$.

设 $\mathscr{P}$ 是 X 的子集族且 $A \subset X$. 集族 $\mathscr{P}$ 称为 A 的邻域覆盖, 若 $A \subset (\cup\mathscr{P})^\circ$. A 的邻域覆盖 $\mathscr{P}$ 称为极小邻域覆盖, 若对每一 $P \in \mathscr{P}$ 有 $\mathscr{P} \setminus \{P\}$ 不是 A 的邻域覆盖.

引理 4.1.4 *设 X 具有点可数 p 亚基. 那么 X 每一可数紧的子集是 X 中紧的、度量化的 G_δ 子集.*

证明 设 $\mathcal{U}$ 是 X 的点可数的 p 亚基且设 K 是 X 的可数紧子集. 由 [19], K 是紧的. 由 [87, 引理 6], 存在由 $\mathcal{U}$ 的有限个元素组成的可数个极小的邻域覆盖, 这可数个记为 $\{\mathcal{V}(n) : n \in \mathbb{N}\}$. 设 $V(n) = \cup\mathcal{V}(n)$. 那么 $K \subset \cap\{V(n) : n \in \mathbb{N}\}$. 设 $x \in X\setminus K$. 对每一点 $y \in K$, 存在 $\mathcal{F}_y \in \mathcal{U}^{<\omega}$ 使得 $y \in (\cup\mathcal{F}_y)^\circ \subset \cup\mathcal{F}_y \subset X-\{x\}$. 因为 K 是紧的, 所以存在 $\cup\{\mathcal{F}_y : y \in K\}$ 的某子族是 K 的极小的有限邻域覆盖. 从而, 我们得到族 $\mathcal{V}(n)$ 使得 $K \subset V(n) = \cup\mathcal{V}(n) \subset X - \{x\}$.

引理 4.1.5 *设 X 是具有局部点可数 p 亚基的 Lindelöf 空间, 那么 X 具有点可数 p 亚基.*

证明 对每一点 $x \in X$, 存在点 x 的开邻域 $U(x)$ 使得 $U(x)$ 具有点可数 p 亚基 $\mathcal{F}_x$. 设 $\mathcal{U} = \{U(x) : x \in X\}$. 因为 X 是 Lindelöf, 所以存在可数子族 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ 使得 $X = \cup\mathcal{U}'$. 记 $\mathcal{U}'$ 为 $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$. 显然, $\mathcal{F} = \bigcup_i \mathcal{F}_{x_i}$ 是 X 的点可数 p 亚基.

定理 4.1.6 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 具有局部点可数 p 亚基. 若 Y 的 π 特征是可数的, 那么 G 和 bG 是可分和度量化的.*

证明 由引理 4.1.3 和 4.1.4, G 是局部可分和度量化的. 因此 G 是 p 空间, 从而由 Henriksen 和 Isbell 定理知 Y 是 Lindelöf. 又由引理 4.1.5, $Y = bG \setminus G$ 具有点可数 p 亚基.

论断: 空间 Y 具有 G_δ 对角线.

置 $G = \oplus_{\alpha\in\wedge}G_\alpha$, 其中对每一 $\alpha \in \wedge$, G_α 是可分和度量的. 设 $\zeta = \{G_\alpha : \alpha \in \wedge\}$ 且设 F 是 bG 的点在 ζ 不是局部有限的点集合. 因为 ζ 在 G 中是离散的, 所以 $F \subset bG \setminus G$. 易知 F 是紧的. 因此, 由引理 4.1.4 知 F 是可分和度量化的, 从而 F 具有可数网.

设 $M = Y\setminus F$. 对每一点 $y \in M$, 存在 bG 中开邻域 O_y 使得 $\overline{O_y}\cap F = \emptyset$. 因为 ζ 是离散的, 所以 $\overline{O_y}$ 至多只与有限个 G_α 相交. 设 $L = \cup\{G_\alpha : G_\alpha\cap\overline{O_y} \neq \emptyset\}$. 那么 L 是可分与度量的. 由引理 4.1.2, $\overline{L}\setminus L$ 是 Lindelöf p 空间. 显然, $\overline{L}\setminus L \subset Y$. 因此, $\overline{L} \setminus L$ 具有点可数 p 亚基. 因此, 由 [37] 知 $\overline{L} \setminus L$ 是可分和度量化的, 这蕴含 $\overline{L}$ 具有可数网. 那么 $\overline{L}$ 是可分与度量化的. 显然, $O_y \subset \overline{L}$ 和 $O_y \cap M$ 是可分与度量化的. 因此, M 是局部可分与度量化的. 由引理 4.1.4, Y 中每一个紧子集是 Y 中的 G_δ 子集. 因为 F 是紧的且 Y 是 Lindelöf, 所以 M 是 Lindelöf. 因此, M 是可分的. 那么 M 具有可数网. 因此 Y 有可数网, 这蕴含 Y 具有 G_δ 对角线. 从而, 论断得证.

由 [7, 定理 5], G 和 bG 是可分与度量化的.

推论 4.1.7 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 具有点可数的 p 基. 若 Y 具有可数的 π 特征, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

推论 4.1.8 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 是具有局部点可数 p-k 网的局部 k 空间. 若 Y 具有可数的 π 特征, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 注意到若对一个 k 空间 X 具有点可数 p-k 网 $\mathcal{P}$, 那么由 [37] 知 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 p 亚基.

显然, 若 X 具有点可数的 k 网, 那么 X 具有点可数 p-k 网. 因此, 我们有如下的定理 4.1.9, 这蕴含 [47, 定理 4].

定理 4.1.9 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 是具有局部点可数 k 网的局部 k 空间. 若 Y 具有可数的 π 特征, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

推论 4.1.10 *[7] 设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 是具有点可数基, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

下面, 我们考虑拓扑群的余具有局部 $\delta\theta$ 基.

设 $\mathcal{B} = \cup_n \mathcal{B}_n$ 是空间 X 的开子集族, $\mathcal{B}$ 称为 X 的 $\delta\theta$ 基 [38], 若对任意点 $x \in X$ 和点 x 的开邻域 U 存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $B \in \mathcal{B}$ 使得

(i) $1 \leq \mathrm{ord}(x, \mathcal{B}_n) \leq \omega$;

(ii) $x \in B \subset U$.

引理 4.1.11 *设 X 是具有局部 $\delta\theta$ 基的 Lindelöf 空间, 那么 X 具有 $\delta\theta$ 基.*

证明 对每一点 $x \in X$, 存在点 x 的开邻域 $U(x)$ 使得 $U(x)$ 具有 $\delta\theta$ 基 $\mathcal{B}_x = \bigcup_n \mathcal{B}_{n,x}$. 设 $\mathcal{U} = \{U(x) : x \in X\}$. 因为 X 是 Lindelöf, 所以存在可数子族 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ 使得 $X = \cup \mathcal{U}'$. 记 $\mathcal{U}'$ 为 $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$. 显然, $\mathcal{B} = \bigcup_{i,n} \mathcal{B}_{n,x_i}$ 是 X 的 $\delta\theta$ 基.

定理 4.1.12 *设 G 是非局部紧的拓扑群. 若 $Y = bG \setminus G$ 具有局部 $\delta\theta$ 基, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 显然, Y 是第一可数的. 由 [24, 命题 2.1], Y 的每一个可数紧的子集是 Y 中紧的、度量化 G_δ 子集. 又由引理 4.1.3, G 是局部可分与度量化的. 那么 G 是 p 空间. 因此由 Henriksen 和 Isbell 定理知 Y 是 Lindelöf. 由引理 4.1.11, $Y = bG \setminus G$ 具有 $\delta\theta$ 基.

与定理 4.1.6 的相同记号, 由 [24, 命题 2.1] 和定理 4.1.6 的证明, 易知 $F \subset bG \setminus G$ 是紧度量化的. 又由 [38, 推论 8.3] 和引理 4.1.2, $\overline{L} \setminus L$ 是可分与度量化的. 从定理 4.1.6 的证明和 [24, 命题 2.1], G 和 bG 是可分与度量化.

推论 4.1.13 *[47] 设 G 是非局部紧的拓扑群. 若 $Y = bG \setminus G$ 是局部拟可展空间, 那么 G 和 bG 是可分与度量化.*

最后, 我们考虑拓扑群的余是局部 c 半层空间空间.

设 X 是拓扑空间. X 称为 c 半层空间 (CSS) [55], 若对 X 每一紧子集 K 和每一 $n \in \mathbb{N}$, 那么存在 X 中开集 $G(n, K)$ 使得:

(i) $\cap\{G(n, K) : n \in \mathbb{N}\} = K$;

(ii) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $G(n + 1, K) \subset G(n, K)$ 且

(iii) 对 X 中任意紧子集 K, L 满足 $K \subset L$, 那么对每一 $n \in \mathbb{N}$ 有 $G(n, K) \subset G(n, L)$.

定理 4.1.14 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 是局部 CSS 空间. 若 Y 具有可数的 π 特征, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 由[24, 命题 3.8(c)] 和 CSS 空间的定义, 易知 Y 中的每一个可数紧子集是 Y 中紧的、度量化 G_δ 子集. 由引理 4.1.3, G 是局部可分与度量化. 那么 G 是 p 空间. 因此 Y 是 Lindelöf. 由定理 4.1.11, 由 [24, 命题 3.5] 知 $Y = bG \setminus G$ 是 CSS 空间.

与定理 4.1.6 的相同记号, 由 [24, 命题 3.8] 和定理 4.1.6 的证明, 易知 $F \subset bG \setminus G$ 是紧度量化的. 由 [24, 命题 3.8], $\overline{L} \setminus L$ 是可分与度量化的. 由定理 4.1.6 的证明, 易知 G 和 bG 是可分与度量化的.

空间 X 称为 $\sigma^\sharp$ 空间 [55], 若 X 具有 σ 闭包保持闭 p 网.

推论 4.1.15 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 是局部 $\sigma^\sharp$ 空间. 若 Y 具有可数的 π 特征, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 由[24, 引理 3.1], 每一个 $\sigma^\sharp$ 空间是 CSS 空间. 因此由定理 4.1.14 知 G 和 bG 是可分与度量化的.

问题 4.1.16 *设 G 是非局部紧的拓扑群. 若 $Y = bG \setminus G$ 满足下列条件 (1) 和 (2), G 和 bG 是可分与度量化的吗?*

1. *对每一点 $y \in Y$, 存在点 y 的开邻域 $U(y)$ 使得 $U(y)$ 的每一可数紧子集是 $U(y)$ 的度量化的 G_δ 子集;*
2. *Y 具有可数的 π 特征.*

§4.1.2 拓扑群的余是局部拟 G_δ 对角线或对角线的并

在本小节中, 我们先研究拓扑群的余具有局部拟 G_δ 对角线, 这推广了刘川教授的结果; 然后我们讨论拓扑群的余是对角线的并.

称空间 X 是 *Ohio* 完全 [6], 若对 X 的每一紧化 bX, 存在 bX 中的 G_δ 子集 Z 使得 $X \subset Z$ 且对每一点 $y \in Z \setminus X$ 存在包含点 y 的 G_δ 子集 Z 使得 $X \cap Z = \emptyset$.

引理 4.1.17 *设 X 是 p 空间且对 $bX \setminus X$ 每一紧子集是可度量化的, 那么存在 bX 的 G_δ 子集 Y 使得 $X \subset Y$ 且也满足下列条件:*

1. *bX 在每一点 $y \in Y \setminus X$ 具有可数的局部基;*
2. *若 X 是拓扑群且 $\overline{Y \setminus X} \cap X \neq \emptyset$, 那么 X 是可度量化的.*

证明 因为 X 是 p 空间, 所以由[6, 推论 3.7] 知 X 是 Ohio 完全. 那么存在 bX 的 G_δ 子集 Y 使得 $X \subset Y$ 且 $y \in Y \setminus X$ 的每一点存在包含点 y 的 G_δ 子集 Z 使得 $X \cap Z = \emptyset$. 现在证 Y 满足下列条件 (1) 和 (2).

(1) 由 Y 的取法, 易证得对每一点 $y \in Y \setminus X$ 存在 bX 的 G_δ 子集 C 使得 $y \in C \subset Y \setminus X \subset bX \setminus X$. 因为 C 是紧的, 所以紧子集 C 是可度量化. 因此, y 是 bX 的 G_δ 点, 从而 bX 在点 y 具有可数基.

(2) 取点 $a \in \overline{Y \setminus X} \cap X$. 因为 X 是 p 空间, 所以存在 X 紧子集 F 使得 $a \in F$ 且 F 在 X 中具有可数邻域基. 因为 X 是 bX 的稠子集, 所以 F 在 bX 中具有可数开邻域基 $\phi = \{U_n : n \in \omega\}$. 又因为 $a \in \overline{Y \setminus X}$, 所以对每一 $n \in \omega$

可取定 $b_n \in U_n \cap (Y \setminus X)$. 显然, 存在序列 $\{b_n\}$ 的极限点 $c \in F$. 由 (1), 对每一 $n \in \omega$, bX 在点 b_n 具有可数局部基, 取定 bX 在点 b_n 的可数局部基 η_n. 那么 $\cup\{\eta_n : n \in \omega\}$ 是 bX 在点 c 的可数 π 基. 因为 $c \in X$ 且 X 是 bX 的稠子集, 所以 X 在点 c 具有可数 π 基. 又因为 X 是拓扑群, 所以 X 是可度量化.

定理 4.1.18 *设 G 是非局部紧的拓扑群. 若 $Y = bG \setminus G$ 具有拟 G_δ 对角线, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 显然, Y 具有可数特征. 由 [8, 定理 5.1], G 是仿紧 p 空间或 Y 是第一可数的.

情况 1: 空间 Y 是第一可数的.

由 [24, 命题 2.3], Y 的每一可数紧的子集是紧的、度量化的 G_δ 子集. 因为具有拟 G_δ 对角线的 Lindelöf p 空间是可度量化的 [44, 推论 3.6], 所以由定理 4.1.6 的证明易知 G 和 bG 是可分与度量化的.

情况 2: 空间 G 是仿紧 p 空间.

由[6, 推论 3.7], G 是 Ohio 完全的. 因此, 存在 bG 的 G_δ 子集 X 使得 $G \subset X$ 且每一点 $x \in X \setminus G$ 能用 X 的 G_δ 子集分离 G. 设 $M = X \setminus G$. 那么由引理 4.1.17, bG 在每一点 $y \in M$ 具有可数局部基.

子情况 1: $\overline{M} \cap G = \emptyset$. 那么 $X \setminus \overline{M} = G$. 因此 G 是 bG 的 G_δ 子集. 从而 Y 是 σ 紧的. 因为 Y 具有局部拟 G_δ 对角线, 所以由 [24, 命题 2.3] 知 Y 的每一紧子空间是可分与度量化的. 因此 Y 是可分的. 因为 Y 和 G 是 bG 的稠子集, 所以 G 的 souslin 数是可数的. 又因为 G 是仿紧的, 所以空间 G 是 Lindelöf. 因此, G 是 Lindelöf p 空间, 那么由引理 4.1.2 知 Y 是 Lindelöf p 空间. 因为 Y 具有拟 G_δ 对角线, 所以由 [44, 推论 3.6] 知 Y 是度量化的. 从而 Y 具有 G_δ 对角线. 因此, 由 [7, 定理 5] 知 G 和 bG 是可分与度量化的.

子情况 2: $\overline{M} \cap G \neq \emptyset$. 由引理 4.1.17, G 是可度量化的.

子情况 2(a): G 是局部可分的. 由 [24, 命题 2.3] 和定理 4.1.6 的证明, G 和 bG 是可分与度量化的.

子情况 2(b): G 是无处局部可分的. 取定 G 的一个基 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得每一 $\mathcal{U}_n$ 在 G 中是离散的. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 设 F_n 是 $\mathcal{U}_n$ 在 bG 中的所有聚点. 置 $Z = \cup\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$. 那么 Z 是 Y 的稠子集且由 [7, 命题 4] 知 Z 是 σ 紧的. 因为具有拟 G_δ 对角线的紧空间是可分与度量化 [24, 命题 2.3], 所以 Z 具

有可数网. 又因为 G 是无处局部紧的, 所以 Y 是 bG 的稠子集, 从而 Z 是 bG 的稠子集. 因此, bG 是可分的, 这蕴含 G 的 Souslin 数是可数的. 因为 G 是可度量化的, 所以 G 是可分的. 由引理 4.1.2, Y 是 Lindelöf p 空间. 因此, Y 是可度量化的 [44, 推论 3.6]. 那么 Y 是可分与度量化的, 这蕴含 G 和 bG 可分与度量化的.

引理 4.1.19 *设 X 是具有局部拟 G_δ 对角线的 Lindelöf 空间, 那么 X 具有拟 G_δ 对角线.*

证明 对每一点 $x \in X$,存在点 x 的开邻域 $U(x)$ 使得 $U(x)$ 具有拟 G_δ 对角线. 那么 $\mathcal{U} = \{U(x) : x \in X\}$ 是 X 的开覆盖. 因为 X 是 Lindelöf 空间, 所以存在可数子族 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ 使得 $X = \cup\mathcal{V}$. 记 $\mathcal{V}$ 为 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 设 $\{\mathcal{U}_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 U_n 的拟 G_δ 对角线序列. 设 $\mathcal{F} = \{\mathcal{U}_{nk}\}_{n,k\in\mathbb{N}}$. 那么 $\mathcal{F}$ 是 X 的拟 G_δ 对角线序列.

事实上, 对不同点 $x, y \in X$, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in U_n$.

如果 $y \notin U_n$, 那么 $x \in U_n \subset X - \{y\}$. 因为 $\{\mathcal{U}_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 U_n 的拟 G_δ 对角线序列, 所以存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in \cup\mathcal{U}_{nk}$. 因此, $x \in \mathrm{st}(x, \mathcal{U}_{nk}) \subset \cup\mathcal{U}_{nk} \subset U_n \subset X - \{y\}$.

如果 $y \in U_n$, 那么 $x \in U_n - \{y\} \subset X - \{y\}$. 因为 $\{\mathcal{U}_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 U_n 的拟 G_δ 对角线序列, 所以存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in \mathrm{st}(x, \mathcal{U}_{nk}) \subset U_n - \{y\} \subset X - \{y\}$.

因此, $\mathcal{F}$ 是 X 的拟 G_δ 对角线序列.

定理 4.1.20 *设 G 是非局部紧的拓扑群. 若 $Y = bG \setminus G$ 具有局部的拟 G_δ 对角线, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 由 [24, 命题 2.1 和 2.5] 和引理 4.1.3, G 是局部可分与度量化的, 那么 Y 是 Lindelöf 空间. 由引理 4.1.19, Y 具有拟 G_δ 对角线. 那么由定理 4.1.18 知 G 和 bG 是可分与度量化的.

空间 X 称为具有 W_δ 对角线, 若存在 X 的基序列 $(\mathcal{B}_n)$ 使得对任意 $x \in B_n \in \mathcal{B}_n$ 且 (B_n) 在包含关系下是递减的, 那么 $\{x\} = \cap\{B_n : n \in \omega\}$.

问题 4.1.21 *是否存在拓扑群 G 使得 $Y = bG \setminus G$ 具有 W_δ 对角线, 但 G 不是可分与度量化的?*

推论 4.1.22 *[47]* *设 G 是非局部紧的拓扑群. 若 $Y = bG \setminus G$ 具有局部 G_δ 对角线, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

下面, 我们研究拓扑群的余是 G_δ 对角线的并.

引理 4.1.23 *设 G 是非局部紧的拓扑群. 若存在点 $a \in Y = bG \setminus G$ 使得 $\{a\}$ 是 Y 的 G_δ 子集, 那么下列至少一个成立:*

1. G 是仿紧的 p 空间;

2. Y 在某一点具有可数局部基.

证明 设点 a 不是 Y 第一可数点. 因为 a 是 Y 的 G_δ 点, 所以 bG 中存在紧子集 F 使得 F 在 bG 中具有可数邻域基使得 $\{a\} = F \cap (bG \setminus G)$. 又因为 Y 在点 a 不是第一可数点, 所以 $F \setminus \{a\} \neq \emptyset$. 因此, bG 中存在非空紧子集 $B \subset F$ 使得 B 在 bG 中具有可数邻域基. 显然, $B \subset G$. 从而, G 是可数型 [70]. 因此, G 是仿紧的 p 空间 [70].

引理 4.1.24 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G = Y_1 \cup Y_2$, 其中 Y_1 和 Y_2 具有可数伪特征. 若 Y_1 和 Y_2 至多一个是 bG 的稠子集, 那么下列至少一个成立:*

1. G 是仿紧 p 空间;

2. Y 在某一点具有可数局部基.

证明 不失一般性, 不妨设 $\overline{Y_1} \neq bG$. 设 $U = bG \setminus \overline{Y_1}$. 那么 $V = U \cap Y = U \cap Y_2 \neq \emptyset$. 那么 V 是 Y 的开子集且 V 中每一点是 G_δ 点. 由引理 4.1.23, 证明完成.

定理 4.1.25 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G = Y_1 \cup Y_2$, 其中 Y_1 和 Y_2 具有可数伪特征. 若 Y_1 和 Y_2 是 Ohio 完全的, 那么下列至少一个成立:*

1. G 是仿紧 p 空间;

2. Y 在某一点具有可数局部基.

证明 情况 1: $\overline{Y_1} \neq bG$ 或 $\overline{Y_2} \neq bG$.

由引理 4.1.24, 易证得.

情况 2: $\overline{Y_1} = bG$ 且 $\overline{Y_2} = bG$.

显然, bG 是 Y_1 和 Y_2 的 Hausdorff 紧化. 因为 Y_1 和 Y_2 是 Ohio 完全的, 所以存在 G_δ 子集 X_1 和 X_2 各自满足 Ohio 完全的定义.

情况 2(a): $Y_1 = X_1$ 且 $Y_2 = X_2$.

那么 Y 具有可数伪特征. 由 [8, 定理 5.1], 证明完成.

情况 2(b): $Y_1 \neq X_1$ 或 $Y_2 \neq X_2$.

不失一般性, 不妨设 $Y_1 \neq X_1$. 若 $(X_1 \setminus Y_1) \cap Y_2 \neq \emptyset$, 那么对每一 $y \in (X_1 \setminus Y_1) \cap Y_2$ 存在紧子集 C 使得 $y \in C$ 且 $C \cap Y_1 = \emptyset$. 显然, y 是 Y 的 G_δ 点. 由引理 4.1.23, 证明完成. 若 $(X_1 \setminus Y_1) \cap Y_2 = \emptyset$, 那么 bG 中存在具有可数邻域基的紧子集 $C \subset G$. 从而 G 是可数型 [70]. 因此, G 是仿紧 p 空间 [70].

具有 G_δ 对角线的空间是 Ohio 完全 [5]. 因此, 由定理 4.1.25, 我们有下列的结果.

定理 4.1.26 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G = Y_1 \cup Y_2$, 其中 Y_1 和 Y_2 具有 G_δ 对角线. 那么下列至少一个成立:*

1. *G 是仿紧 p 空间;*

2. *Y 在某一点具有可数局部基.*

问题 4.1.27 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G = \bigcup_{i=1}^{i=n} Y_i$, 其中每一 Y_i 具有 G_δ 对角线. 那么 G 是仿紧 p 空间或 Y 在某一点具有可数局部基吗?*

问题 4.1.28 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G = Y_1 \cup Y_2$, 其中 Y_1 和 Y_2 具有拟 G_δ 对角线. 那么 G 是仿紧 p 空间或 Y 在某一点具有可数局部基吗?*

§4.1.3　拓扑群的余是局部 BCO 和局部遗传的 D 空间

空间 X 具有可数序的基 (BCO) [38], 若存在 X 的基序列 $\{\mathcal{B}_n\}$ 使得对任意 $x \in b_n \in \mathcal{B}_n$ 且 (b_n) 是递减的, 那么 $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是点 x 的局部基.

空间 X 称为 *ω-bounded*, 若 X 的每一可数子集的闭包是紧的.

首先, 我们研究刘川教授在 [47] 提出的下列问题.

问题 4.1.29 *[47] 设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 具有 BCO, G 和 bG 是可分与度量化吗?*

下面我们给问题 4.1.29 的一个部分回答.

定理 4.1.30 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 具有 BCO. 若 Y 是 Ohio 完全的, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 因为 Y 是 Ohio 完全的, 所以 G 是仿紧 p 空间或 σ 紧空间 [6, 定理 4.3].

情况 1: 空间 G 是仿紧 p 空间.

因为 G 是 p 空间, 所以 Y 是 Lindelöf. 因此, Y 是可展的 [38, 定理 6.6]. 那么由定理 4.1.20 知 G 和 bG 是可分与度量化的.

情况 2: 空间 G 是 σ 紧空间.

我们称 G 是可度量化的. 设 G 是不可度量化的. 那么 Y 是 ω-bounded [8, 定理 3.12]. 因为 G 是 σ 紧的拓扑群, 所以由 [81, 推论 2] 知 G 的 Souslin 数 $c(G)$ 是可数的. 因此, $c(bG) \leq \omega$. 因为 G 是非局部紧的, 所以 Y 是 bG 的稠子集. 那么 $c(Y) \leq \omega$. 又因为 Y 是 Čech 完全的, 所以存在稠子空间 $Z \subset Y$ 使得 Z 是仿紧的且是 Y 的 Čech 完全子空间 [73]. 那么 Z 是具有 BCO 的仿紧空间. 因此, Z 是可度量化的 [38, 定理 1.2 和 6.6]. 因为 $c(Y) \leq \omega$ 和 Z 是 Y 的稠子集, 所以 $c(Z) \leq \omega$. 从而, Z 是可分的. 由于 Y 是 ω-bounded, 从而是紧的. 因此, G 是局部紧的, 矛盾. 那么 G 是可度量化的. 那么由情况 1 知 G 和 bG 是可分与度量化的.

定理 4.1.31 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 具有 BCO. 若 G 是 Σ 空间, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 由 [15, 定理 2.8], Y 的每一个紧子空间在 Y 具有可数特征. 因为 G 是非局部紧, 所以 Y 也是 bG 的稠子空间. 因此, G 是 Lindelöf 空间. 若 G 是 σ 紧空间, 那么由定理 4.1.30 的证明中的情况 2 知 G 和 bG 是可分与度量化的. 因此, 设 G 是非 σ 紧的. 因为 G 是 Lindelöf Σ 空间, 所以由 [8, 定理 4.2] 的证明知 G 是 Lindelöf p 空间. 那么由定理 4.1.30 的证明中的情况 1 知 G 和 bG 是可分与度量化的.

最后, 我们研究拓扑群的余是局部遗传的 D 空间.

定理 4.1.32 *设 G 是拓扑群. 若对每一 $y \in Y = bG \setminus G$, 存在点 y 的开邻域 $U(y)$ 使得 $U(y)$ 中每一 ω-bounded 子集是紧的, 那么下列至少一个成立:*

1. *G 是可度量化的;*

2. *bG 能连续满映入 Tychonoff 方体 I^{ω_1}.*

证明　情况 1: 空间 G 是局部紧的.

若 G 是不可度量化的, 那么 G 包含一个拷贝 D^{ω_1}, 其中D 是两点的离散空间. 因为 G 是正规的, 所以 G 能连续满映入 Tychonoff 方体 I^{ω_1}.

情况 2: 空间 G 不是局部紧的.

显然, G 和 Y 是 bG 的稠子集. 设条件 (2) 不成立. 设 A 是 bG 中的所有点 $x \in bG$ 使得点 x 的 π 特征在 bG 中是可数的, 那么由 Šapirovskiĭ 在 [74] 的结果知 A 是 bG 的稠子集. 因为 G 是 bG 的稠子集, 所以每一点 $A \cap G$ 在 G 中的 π 特征是可数的.

子情况 2(a): $A \cap G \neq \emptyset$.

因为 G 是拓扑群, 所以 G 是第一可数的, 这蕴含 G 是可度量化的.

子情况 2(b): $A \cap G = \emptyset$.

显然, $A \subset Y$. 对每一 $y \in Y$, 存在点 y 在 Y 中的开邻域 $U(y)$ 使得 $U(y)$ 中每一 ω-bounded 子集是紧的. 显然, $A \cap U(y)$ 是 $U(y)$ 中的稠子集. 此外, 易知 $A \cap U(y)$ 是 $U(y)$ 的 ω-bounded 子集. 因此, $A \cap U(y)$ 是紧的. 因为 $A \cap U(y)$ 是 $U(y)$ 中的稠子集, $A \cap U(y) = U(y)$. 从而 Y 是局部紧的, 矛盾.

空间 X 的*邻域分配* 是一个从 X 到 $\tau(X)$ 的函数 φ 满足对每一 $x \in X$ 有 $x \in \varphi(x)$. 空间 X 称为 D *空间* [29], 若对任意一个邻域分配 φ, 存在 X 一个闭的离散子集 D 使得 $X = \bigcup_{d \in D} \varphi(d)$.

易知每一个可数紧的 D 空间是紧的. 因此, 由定理 4.1.32 有下列结果.

定理 4.1.33 *设 G 是拓扑群. 若 $Y = bG \setminus G$ 是局部遗传的 D 空间, 那么下列至少一个成立:*

1. *G 是可度量化的;*

2. *bG 能连续满映入 Tychonoff 方体 I^{ω_1}.*

§4.2 仿拓扑群的 Hausdorff 紧化的余

在本节中, 我们主要讨论仿拓扑群的 Hausdorff 紧化的余, 得到了仿拓扑群的 Hausdorff 紧化的余的二岐性定理, 并且肯定第回答了刘川和林寿关于拓扑群的 Hausdorff 紧化的余的两个问题, 见 [47, 48].

§4.2.1 仿拓扑群的 Hausdorff 紧化的余的二岐性

空间 X 称为 *Baire*, 若 X 的可数个开的稠子集的交也是稠的. 此外, 空间 X 称为 *meager*, 若 X 能表示成可数个无处稠子集的并.

定理 4.2.1 *[9] 若 G 是拓扑群, 那么 G 的紧化的余或者是伪紧的或者是 Lindelöf.*

定理 4.2.2 *[12] 设 G 是非局部紧的拓扑群. 那么 G 的每一个紧化的余或者具有 Baire 性质, 或者是 σ 紧的.*

此外, D. Basile 和 A. Bella 证明了下面关于齐性空间的二岐定理:

定理 4.2.3 *[18] 齐性空间的紧化的余或者具有 Baire 或者是 meager 且 realcompact.*

在 [18] 中, D. Basile 和 A. Bella 提出了如下问题.

问题 4.2.4 *[18] 设 X 是齐性空间且 bX 是 X 的紧化, 那么 $bX \setminus X$ 或者是伪紧或者是 realcompact 和 meager 吗?*

在 [18], D. Basile 和 A. Bella 证明了 Arhangel'skiĭ 的二岐定理不能推广到齐性空间. 在 [13], Arhangel'skiĭ 给出例子说明定理 4.2.1不能推广到仿拓扑群. 自然地, 我们有下列两问题:

问题 4.2.5 *仿拓扑群的紧化的余具有什么样的二岐性?*

问题 4.2.6 *定理 4.2.2 的二岐性能推广到仿拓扑群吗?*

下面我们将证明每一个仿拓扑群 G 的紧化的余或者是具有 Baire 性质或者是 meager 且 Lindelöf, 这是对问题 4.2.5 的一个回答. 此外, 我们对问题 4.2.6 给出一个部分回答. 最后, 我们将对问题 4.2.4 给出否定回答.

首先, 我们给出一个引理.

引理 4.2.7 *[13] 设 G 是仿拓扑群. 若 G 存在非空具有可数特征的紧子集, 那么 G 是可数型的.*

现在, 我们给仿拓扑群的紧化的余的一个二岐定理.

定理 4.2.8 *设 G 是非局部紧的仿拓扑群, 那么 G 的每一个余或具有 Baire 性质或是 meager 和 Lindelöf.*

证明 设 bG 是 G 的紧化使得其余$Y = bG \setminus G$ 不具有 Baire 性质. 下面, 我们将证 Y 是 Lindelöf 和 meager.

因为 Y 不具有 Baire 性质, 所以存在 Y 中可数开子集族 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得 $\cap\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 不是 Y 的稠子集. 又因为 G 是无处局部紧的, 所以 Y 是 bG 中的稠子集. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 存在 bG 中的开子集 V_n 使得 $U_n = V_n \cap Y$. 设 $\gamma = \{V_n : n \in \mathbb{N}\}$. 因此, 存在 bG 中的非空的开子集 U 使得 $(\cap\gamma) \cap (U \cap Y) = \emptyset$. 由 [32, 定理 3.9.6], $Z = (\cap\gamma) \cap (U \cap G) = (\cap\gamma) \cap U$ 是 $U \cap G$ 中 Čech 完全子空间. 众所周知, 每一个 Čech 完全空间是可数型的. 因为 Z 是 Čech 完全的, 所以 Z 中存在具有可数特征的非空紧子集 F. 又 Z 是开子空间 $U \cap G$ 的稠子集, 所以 F 在 $U \cap G$ 中具有可数特征 [10]. 因为 $U \cap G$ 是 G 中的开集, 所以 F 在 G 中具有可数特征. 显然, F 是 G 中的紧子集. 因此, 由引理 4.2.7 知 G 是可数型的. 因此, Y 是 Lindelöf. 此外, 由定理 4.2.3 知 Y 是 meager. 证明完成.

注记 一个非局部紧的仿拓扑群 G 的紧化的余 Y 不可能同时具有 Baire 性质又是 Lindelöf 和 meager. 事实上, 易知一个空间不具有 Baire 性质当且仅当存在某非空开 meager 子集. 因此, 我们有下列两推论.

推论 4.2.9 *设空间 X 不具有 Baire 性质和 meager 性质, 那么 X 不是任意仿拓扑群的紧化的余.*

推论 4.2.10 *设 X 不具有 Baire 性质也不是 Lindelöf 空间, 那么 X 不是任意仿拓扑群的紧化的余.*

注记 D. Basile 和 A. Bella 证明了存在一个齐性空间使得其某 Hausdorff 紧化的余不具有 Baire 性质的非 Lindelöf 空间, 见 [18, 例3.3]. 因此, 定理 4.2.8 不能推广到齐性空间. 然而, 我们有下列问题.

问题 4.2.11 *设 X 是非局部紧的半拓扑群或拟拓扑群且 bX 是 X 的紧化. 那么 $bX \setminus X$ 具有 Baire 性质或者是 Lindelöf 且 meager 吗?*

由定理 4.2.8, 我们得到如下两个推论. 首先, 我们证明 Arhangel'skiĭ's 的二岐定理 4.2.2 能够推广到 k-gentle 仿拓扑群, 这给问题 4.2.6 一个部分回答.

空间 X 到 Y 的满射 f 称为 *k-gentle* [13], 若对 X 的每一紧集, 则 $f(F)$ 也是 Y 的紧集. 半拓扑群 G 称为 *k-gentle* [13], 若逆映射 $(x \mapsto x^{-1}, \forall x \in G)$ 是 k-gentle.

引理 4.2.12 *[13] 设 G 是 k-gentle 仿拓扑群且某紧化的余是 Lindelöf, 那么 G 是拓扑群.*

推论 4.2.13 *设 G 是非局部紧的 k-gentle 仿拓扑群, 那么 G 的紧化的余或者具有 Baire 性质或者是 σ 紧的.*

证明 设 bG 是 G 的紧化且置 $Y = bG \setminus G$. 由定理 4.2.8, Y 具有 Baire 性质或者具有 meager 性质的 Lindelöf 空间. 设 Y 不具有 Baire 性质. 那么 Y 是 Lindelöf, 因此由引理 4.2.12 知 G 是拓扑群. 由定理 4.2.2, Y 是 σ 紧的.

由 [9], 拓扑群的某紧化的余是亚紧的当且仅当余是 Lindelöf 当且仅当余是 realcompact. 因此, 我们有下列的问题.

问题 4.2.14 *设 G 是非局部紧的仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 则下列条件等价吗?*

1. *Y 是亚紧的;*
2. *Y 是 Lindelöf;*
3. *Y 是 realcompact.*

空间 X 称为亚紧的, 若对 X 每一开覆盖具有点有限的开加细的覆盖. 空间 X 称为 *ccc*, 若每一不相交的开集族是可数的.

引理 4.2.15 *[20] ccc 且 Baire 的空间中每一点有限的开集族是可数的.*

下列推论给问题 4.2.14 一个部分回答.

推论 4.2.16 *设 G 是非局部紧的仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 是具有 ccc 的亚紧空间, 那么 Y 是 Lindelöf.*

证明 由定理 4.2.8, Y 或者具有 Baire 性质或者具有 meager 性质的 Lindelöf 空间. 设 Y 具有 Baire 性质. 那么由引理 4.2.15 知 Y 是 Lindelöf. 因此, Y 是 Lindelöf 空间.

最后, 我们给问题 4.2.4 一个否定回答.

例 4.2.17 *存在仿拓扑群 X 使得某 Hausdorff 紧化 bX 的余不是伪紧的也不具有 meager 性质.*

证明 设 $Z = X \cup Y$ 是 P. S. Alexandroff 和 P. S. Urysohn 的双箭空间 [32, 练习 3.10. C], 其中 $X = \{(x, 0) : 0 < x \leq 1\}$ 和 $Y = \{(x, 1) : 0 \leq x < 1\}$. 空间 X 同胚于 Sorgenfrey line, 见 [32, 例1. 2. 2]. Z 是 Sorgenfrey line X 的 Hausdorff 紧化且余 Y 仍然是同胚于 Sorgenfrey line. 此外, Y 上存在一个交换群的自然结构使得乘法 $(u, v) \mapsto u \cdot v$ 是连续, 即, 空间 Y 允许一个仿拓扑群结构. 例如, 设 $u = (x, 1)$ 且 $v = (y, 1)$ 是 Y 中的两点, 若 $x + y < 1$, 那么 $u \cdot v = (x + y, 1)$; 若 $x + y \geq 1$, 那么 $u \cdot v = (x + y - 1, 1)$. 但是 Sorgenfrey line 不是伪紧空间; 否则, 因为 Sorgenfrey line 是 Lindelöf 空间, 从而是紧的, 矛盾. 此外, 因为 X 具有 Baire 性质 [16], 所以 X 不具有 meager 性质. 因此, Y 不是伪紧且也不具有 meager 性质.

注记 由例 4.2.17, 在问题 4.2.4 中若用“仿拓扑群” 取代“齐性空间”, 则问题 4.2.4 仍然是否定.

§4.2.2 k-gentle 仿拓扑群的 Hausdorff 紧化

本小节, 我们主要研究 k-gentle 仿拓扑群的紧化, 回答了刘川和林寿关于拓扑群的紧化的余的两个问题, 见 [47, 48].

引理 4.2.18 *[13] 设 G 是 k-gentle 仿拓扑群, 那么 G 的每一紧化的余或者是伪紧的或者是 Lindelöf.*

引理 4.2.19 *[13]* 设 G 是 *k-gentle* 仿拓扑群使得某 *Hausdorff* 紧化的余是 *Lindelöf*, 那么 G 是拓扑群.

定理 4.2.20 设 G 是仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 是 G 的余. 若 Y 具有可数伪特征, 那么下列至少一个成立:

1. 空间 G 是可数型;
2. 空间 Y 是第一可数的.

证明 设 Y 不是第一可数空间. 那么存在点 $y_0 \in Y$ 使得 Y 在点 y_0 不具有可数的局部基. 因为 Y 具有可数的伪特征, 所以 y_0 是 Y 的 G_δ 点. 因此存在 bG 中的紧子集 F 使得 F 在 bG 中具有可数的邻域基且 $F \cap (bG \setminus G) = \{y_0\}$. 又 Y 在点 y_0 不具有可数的局部基, 从而 $F \setminus \{y_0\} \neq \emptyset$. 那么存在非空的紧子集 $B \subset F$ 使得 B 在 bG 中具有可数的邻域基且 $y_0 \notin B$. 显然 $B \subset G$. 由 [13, 命题 4.1], G 是可数型的.

定理 4.2.21 设 G 是非局部紧的 *k-gentle* 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 是 G 的 *Hausdorff* 紧化的余. 若果 Y 具有局部正则的 G_δ 对角线, 那么 G 是一个拓扑群, 从而 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.

证明 显然, 因为 G 是非局部紧的, 所以 Y 是无处局部紧的. 由引理 4.2.18, Y 是伪紧的或者是 Lindelöf.

论断: 空间 Y 是 Lindelöf.

若不然, 设 Y 是伪紧的. 因为 Y 具有局部正则 G_δ 对角线, 所以对每一 $y \in Y$ 存在点 y 的开邻域 U_y 使得 $\overline{U_y}$ 具有正则 G_δ 对角线. 显然, 由 Y 是伪紧的, 那么 $\overline{U_y}$ 是伪紧的. 对每一 $y \in Y$, $\overline{U_y}$ 是可度量化的, 从而 $\overline{U_y}$ 是紧的. 那么 Y 是局部紧的, 矛盾.

由引理 4.2.19 和论断, G 是拓扑群. 因此, 由 [7] 知 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.

推论 4.2.22 设 G 是非局部紧的 *k-gentle* 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 具有正则 G_δ 对角线, 那么 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.

定理 4.2.23 *设 G 是非局部紧的 k-gentle 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 具有局部 σ 点有限基, 那么 G 是一个拓扑群; 因此, G, bG 和 Y 是可分与度量化的.*

证明 由引理 4.2.18, Y 是伪紧的 Lindelöf 空间.

设 Y 是伪紧的. 因为 Y 具有局部的 σ 点有限基, 所以对每一 $y \in Y$, 存在点 y 在 Y 中的开邻域 U_y 使得 $\overline{U_y}$ 具有 σ 点有限基. 显然, 由于 Y 是伪紧的, 从而 $\overline{U_y}$ 是伪紧的. 对每一点 $y \in Y$, $\overline{U_y}$ 是度量化的 [84]; 因此, $\overline{U_y}$ 是紧的. 那么 Y 是局部紧空间, 矛盾. 那么 Y 是 Lindelöf.

由引理 4.2.19, G 是拓扑群. 因此, 由定理 4.1.6 知 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.

推论 4.2.24 *设 G 是非局部紧的 k-gentle 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 具有局部一致基, 那么 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.*

问题 4.2.25 *设 G 是非局部紧的 k-gentle 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 具有点可数基, 那么 G, bG 和 Y 是可分与度量化的吗?*

问题 4.2.26 *设 G 是非局部紧的 k-gentle 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 具有 G_δ 对角线, 那么 G, bG 和 Y 是可分与度量化的吗?*

下面, 我们给问题 4.2.25 一个部分回答.

定理 4.2.27 *设 G 是非局部紧的 k-gentle 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 具有 G_δ 对角线和点可数基, 那么 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.*

证明 因为 Y 具有 G_δ 对角线, 所以 G 或者是 σ 紧的或者是可数型的 [13].

情况 1: 空间 G 是可数型的.

那么 Y 是 Lindelöf, 从而由引理 4.2.19 知 G 是拓扑群. 因此, G, bG 和 Y 是可分与度量化的 [7].

情况 2: 空间 G 是 σ 紧的.

显然, $c(G) \leq \omega$, 从而 $c(bG) \leq \omega$. 因为 Y 是 bG 的稠子集, 所以 $c(Y) \leq \omega$. 因为 Y 是 Čech 完全, 所以 Y 中存在仿紧的 Čech 完全的稠子集 Z. 又 Z 具有点可数基, 那么 Z 是可度量化的 [38, 推论 7.10]. 由于 Z 是 Y 的稠子集, 所以 $c(Z) \leq \omega$. 那么 Z 是可分的且 Y 也是可分的. 由于 Y 是具有点可数基的可分空间, 所以 Y 有可数基. 因此, Y 是 Lindelöf. 由引理 4.2.19, G 是拓扑群. 因此, G, bG 和 Y 是可分与度量化的 [7].

定理 4.2.28 *设 G 是非局部紧的 k-gentle 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 是局部正规和具有局部 G_δ 对角线, 那么 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.*

证明 由引理 4.2.18, Y 或者是伪紧的或者是 Lindelöf.

情况 1: 空间 Y 是伪紧的.

对每一点 $y \in Y$, 因为 Y 是局部正规和具有局部 G_δ 对角线, 所以存在点 y 的开邻域 U 使得 $\overline{U}$ 是具有 G_δ 对角线的正规空间. 那么 $\overline{U}$ 是伪紧的, 从而 $\overline{U}$ 是可数紧与度量化的. 因此, Y 是局部紧的. 由定理 4.2.27, G, bG 和 Y 是可分与度量化的.

情况 2: 空间 Y 是 Lindelöf.

由引理 4.2.19, G 是拓扑群. 因为 Y 具有局部的 G_δ 对角线, 所以 G, bG 和 Y 是可分与度量化的 [47].

定理 4.2.29 *设 G 是非局部紧的 k-gentle 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 是具有 sharp 基的 c.c.c 空间, 那么 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.*

证明 由引理 4.2.18, Y 或者是伪紧的或者是 Lindelöf.

情况 1: 空间 Y 是伪紧的.

因为一个具有 sharp 基的伪紧且 c.c.c 的空间是可度量化的 [4], 那么由定理 4.2.27 知 G, bG 和 Y 是可分与度量化的.

情况 2: 空间 Y 是 Lindelöf.

由引理 4.2.19, G 是拓扑群. 因为 Y 具有 sharp 基, 所以 Y 具有点可数基 [4]. 因此, G, bG 和 Y 是可分与度量化的 [7].

下面我们考虑 [47] 和 [48] 中的两个问题, 并给予肯定的回答.

问题 4.2.30 *[47, 问题 6] 设 G 是非局部紧的拓扑群, 若 $Y = bG\backslash G$ 是度量空间的商 s 映象, 那么 G 和 bG 是可分与度量化吗?*

问题 4.2.31 *[48, 问题 5.2] 设 G 是非局部紧的拓扑群, 若 $Y = bG\backslash G$ 具有点可数弱基, 那么 G 和 bG 是可分与度量化吗?*

首先, 我们给出一些技术引理.

引理 4.2.32 设 G 是 *k-gentle* 仿拓扑群. 那么 G 是 *Lindelöf* 空间当且仅当存在 G 的紧化 bG 使得对 $Y = bG \setminus G$ 中的任意紧子集 F 存在紧子集 L 使得 $F \subset L$ 且 L 是 Y 的 G_δ 子集.

证明 若 G 是 Lindelöf, 那么由定理 4.1.1 知 Y 是可数型的. 因此, 我们只需证明充分性. 由引理 4.2.18, Y 或者是伪紧的或者是 Lindelöf.

情况 1: 空间 Y 是 Lindelöf.

由引理 4.2.19, G 是拓扑群且 G 是仿紧的 p 空间. 因此, 由 [11, 引理 2.3] 知 G 是 Lindelöf.

情况 2: 空间 Y 是伪紧的.

对 Y 中每一紧子集 F, 存在紧子集 L 使得 $F \subset L$ 且 L 是 Y 的 G_δ 子集. 因为 Y 是伪紧的, 所以 Y 中紧子集 L 具有可数开邻域基, 从而 Y 是可数型的. 由定理 4.1.1, G 是 Lindelöf.

空间 X 是子可数型的 [11], 若对 X 的每一紧子集 F, 那么 X 中存在紧 G_δ 子集 K 使得 $F \subseteq K$.

定理 4.2.33 设 G 是非局部紧的 *k-gentle* 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 那么下列条件等价:

1. 空间 Y 是子可数型的;
2. 空间 Y 是可数型的.

证明 由引理 4.2.32 和定理 4.1.1, 知道定理成立.

空间 X 称为 κ 完备的 [11], 若 X 的每一紧子空间 F 是 G_δ 集.

定理 4.2.34 设 G 是非局部紧的 *k-gentle* 仿拓扑群且 $Y = bG \setminus G$. 若 Y 是 κ 完备的, 那么 Y 是第一可数的.

证明 由定理 4.2.33, Y 是可数型的. 因为 Y 中每一点是 G_δ 点, 所以 Y 是第一可数的.

引理 4.2.35 设 X 是具有点可数 k 网的 k 空间, 那么 X 的每一可数紧子集是紧的、度量化的 G_δ 子集.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的点可数 k 网且 K 是 X 的可数紧子集. 由 [19], 那么 K 是紧的. 由 [37], 对不同点 $x, y \in X$, 存在有限子族 $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$ 使得 $x \in (\cup\mathscr{F})^\circ \subset \cup\mathscr{F} \subset X - \{y\}$. 根据 [87, 引理 6], 由 $\mathscr{U}$ 的有限个元素组成 K 的极小的邻域覆盖是可数的, 这可数个极小邻域覆盖记为 $\{\mathscr{V}(n) : n \in \mathbb{N}\}$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 设 $V(n) = \cup\mathscr{V}(n)$. 那么 $K \subset \cap\{V(n) : n \in \mathbb{N}\}$. 设 $x \in X \setminus K$. 对每一点 $y \in K$, 存在 $\mathscr{F}_y \in \mathscr{U}^{<\omega}$ 使得 $y \in (\cup\mathscr{F}_y)^\circ \subset \cup\mathscr{F}_y \subset X - \{x\}$. 因为 K 是紧的, 所以存在 $\cup\{\mathscr{F}_y : y \in K\}$ 的子族使得该子族是 K 的极小的有限的邻域覆盖. 因此, 我们得到某一子族 $\mathscr{V}(n)$ 使得 $K \subset V(n) = \cup\mathscr{V}(n) \subset X - \{x\}$.

如果空间 X 是度量空间的商 s 映象或者具有点可数弱基, 那么 X 是具有点可数 k 网的 k 空间, 分别见 [37] 和 [52]. 因此, 下列定理给问题 4.2.30 和 4.2.31 的一个肯定回答.

定理 4.2.36 *设 G 是非局部紧的拓扑群且 $Y = bG \setminus G$ 是具有局部点可数 k 网的局部 k 空间, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

证明 论断: 空间 Y 是 κ 完备的.

设 F 是 Y 的紧子集. 对每一 $y \in Y$, 存在点 y 的开邻域 U_y 使得 U_y 是具有点可数 k 网的 k 空间. 因为 F 是紧的, 所以存在有限子集 $A \subset F$ 使得 $F \subset \bigcup_{y\in A} U_y$. 不失一般性, 记 $\{U_y : y \in A\}$ 为 $\{U_{y_1}, \cdots, U_{y_m}\}$. 那么 $\{U_{y_i} \cap F : i = 1, \cdots, m\}$ 是 F 的相对开覆盖. 对每一 $1 \leq i \leq m$, 存在闭子集 F_i 使得 $F_i \subset U_{y_i}$ 且 $F = \bigcup_{i=1}^{i=m} F_i$. 对每一 $1 \leq i \leq m$, 由引理 4.2.35 知 F_i 是 G_δ 集, 因此存在 U_{y_i} 中的开子集序列 $\{V_{in}\}$ 使得 $F_i = \bigcap_{n=1}^{n=\infty} V_{in}$. 置 $W_n = \bigcup_{i=1}^{i=m} V_{in}$. 那么 $F = \bigcap_{n=1}^\infty W_n$. 事实上, 显然 $F \subset \bigcap_{n=1}^\infty W_n$. 我们只需证 $\bigcap_{n=1}^\infty W_n \subset F$. 若不然, 设 $x \in \bigcap_{n=1}^\infty W_n \setminus F$. 对每一 $1 \leq i \leq m$, 因为 $x \notin F_i$, 所以存在 $k_i \in \mathbb{N}$ 使得 $x \notin V_{ik_i}$. 设 $l = \max\{k_i : 1 \leq i \leq m\}$, 那么 $x \notin \bigcup_{i=1}^m V_{il} = W_l$, 这与 $x \in W_l$ 矛盾.

由论断和定理 4.2.34, Y 是第一可数的. 因此, 由定理 4.1.9 知 G 和 bG 是可分与度量化的.

§4.3 rectifiable 空间的 Hausdorff 紧化的余

拓扑学家 A.V. Arhangel'skiĭ 和 M.M. Choban 对 rectifiable 空间的紧化的余的研究, 取得了与拓扑群相同的二岐性定理, 这引起我们对 rectifiable 空

间的紧化的余研究的兴趣. 事实上, rectifiable 空间的紧化的余具有许多与拓扑群相同的结果, 见本小节的结果. 但研究 rectifiable 空间的紧化的余的难点在于 rectifiable 空间所具有的代数结构比较差, 所以有时候往往要采取一些新的方法.

因为具有可数 π 特征的 rectifiable 空间是可度量化的 [35], 所以用与 [47, 引理 2] 类似的证明我们有下列结果.

引理 4.3.1 *设 G 是非局部紧的 rectifiable 空间. 若果对每一 $y \in Y = bG \setminus G$, 存在点 y 的开邻域 $U(y)$ 使得 $U(y)$ 中每一可数紧子集是可度量化的且 $\pi\chi(U(y)) \leq \omega$, 那么 G 是可度量化和局部可分的.*

空间 X 称为*弱 HN 完全的*, 若 X 的 Čech-Stone 紧化 βX 的余 Z 是点可数型的.

空间 X 称为具有性质 (*): 若果 X 的基数是 *Ulam non-measure*, 那么 X 是*弱 HN- 完全的*. 因为具有 Ulam non-measurable 的基数的仿紧空间是 HN 完全的 [14, 32], 所以仿紧空间具有 (*), 从而是弱 HN 完全的.

命题 4.3.2 *设 G 具有性质 (*) 的非局部紧的 rectifiable 空间. 对每一点 $y \in Y = bG \setminus G$, 存在点 y 的开邻域 $U(y)$ 使得 (i) $U(y)$ 中每一紧子集是 $U(y)$ 的 G_δ 子集; (ii) $U(y)$ 中每一可数紧或 Lindelöf p 子空间是可度量化的, 那么 G, bG 是可分与度量化的.*

证明 由条件 (ii), 易知 Y 不是局部可数紧的, 否则 G 是 bG 中的闭子集, 从而是紧的.

由 [13, 定理 3.1], Y 是伪紧的或者 Lindelöf.

情况 1. 空间 Y 是伪紧的. 因为 Y 中每一点是 Y 中 G_δ 点, 所以 Y 是第一可数的. 因为 Y 不是局部可数紧的, 所以由引理 4.3.1 知 rectifiable 空间 G 是局部可分与度量化的. 又 G 是可数型, 那么由定理 4.1.1 知 Y 是 Lindelöf. 因此, Y 是紧的, 从而 G 是局部紧的, 矛盾.

情况 2. 空间 Y 是 Lindelöf. 因为 Y 具有可数伪特征, 所以 Y 的基数是 Ulam non-measurable [14]. 又 G 是非局部紧的且是齐性的, 那么 G 是无处局部紧的, 从而 G 是 Y 的余, 那么 G 的基数也是 Ulam non-measurable [14]. 那么 G 是弱 HN 完全的. 由 [11, 定理 4], Y 的每一 G_δ 点是双序列点, 从而 $\pi\chi(Y) \leq \omega$. 因此, 由引理 4.3.1 知 G 是局部可分与度量化的. 记 $G = \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha$, 其中每一

G_α 是可分度量化的子集. 设 $\eta = \{G_\alpha : \alpha \in A\}$ 和设 F 是 bG 中的点在族 η 不是局部有限的所有点的集合. 因为 η 在 X 中离散的, 那么 $F \subset bG \setminus G$. 显然 F 是紧的, 那么我们能找到满足条件 (ii) 的有限个闭邻域覆盖 F, 因此 F 是可分与度量化的, 从而 F 具有可数网. 置 $M = Y \setminus F$. 对每一点 $y \in M$, 在 bG 中存在点 y 满足条件 (ii) 的开邻域 O_y 使得 $\overline{O_y} \cap F = \emptyset$. 因为 η 是离散的, 所以 $\overline{O_y}$ 至多与 G_α 中的有限个元素相交. 设 $L = \cup\{G_\alpha : G_\alpha \cap \overline{O_y} \neq \emptyset\}$. 那么 L 是可分度量化的, 从而 $\overline{L} \setminus L$ 是 L 的余, 那么由 [6, 定理 2.1] 知它是 Lindelöf p 空间. 因为 $Cl_Y(O_y) \subset \overline{L} \setminus L$, 所以 $Cl_Y(O_y)$ 是 Lindelöf p 空间, 从而 $Cl_Y(O_y)$ 是可分与度量化的且 $Y \setminus F$ 是局部可分度量化的. 因为 F 是紧的, 所以存在满足条件 (i) 的有限的元素 $\{U(y_i) : i \leq k\}$ 覆盖 F. 此外, 因为 $U(y_i)(i \leq k)$ 的每一紧子集是 G_δ 集, 所以 F 在 $\cup\{U(y_i) : i \leq k\}$ 中是一个 G_δ 集. 记 $F = \cap V_n$, 其中每一 V_n 是 Y 中的开集且 $Cl_Y(V_{n+1}) \subset V_n$. 设 $K_1 = Y \setminus V_1, K_n = Cl(V_{n-1}) \setminus V_n(n > 1)$. 因为 Y 是 Lindelöf 且每一 K_n 是 Y 中的闭集, 所以每一 K_n 是 Lindelöf 且局部可分度量化的. 因此, 每一 K_n 具有可数基. 因为 $Y = F \cup (\cup\{K_n : n \in \mathbb{N}\})$, 所以 Y 具有可数网. 那么 $c(Y) \leq \omega$, 从而 $c(G) \leq \omega$. 因为 G 是具有可数 Souslin 度量化空间, 所以 G 是可分与度量化的. 由于 G 和 Y 具有可数网, 从而 bG 是可分与度量化的.

定理 4.3.3 *设 G 是非局部紧的仿紧的 rectifiable 空间且 $Y = bG \setminus G$ 具有局部拟 G_δ 对角线, 那么 G, bG 是可分与度量化的.*

证明 由 [24, 命题 2.3], 所以对每一 $y \in Y$, 存在点 y 的开邻域 $U(y)$ 使得 $U(y)$ 的每一紧子集是 G_δ 集且 $U(y)$ 的每一可数紧子集是可度量化的. 此外, 由 [44, 推论 3.6] 知 $U(y)$ 中每一 Lindelöf p 子空间是可度量化的. 由命题 4.3.2, G, bG 是可分与度量化的.

推论 4.3.4 *[13] 设 G 是非局部紧的仿紧的 rectifiable 空间且 $Y = bG \setminus G$ 具有 G_δ 对角线, 那么 G, bG 是可分与度量化的.*

命题 4.3.5 *设 G 是非局部紧的 rectifiable 空间. 如果对每一点 $y \in Y = bG \setminus G$, 那么存在点 y 的开邻域 $U(y)$ 使得 (i) $\pi\chi(U(y)) \leq \omega$; (ii) $U(y)$ 中每一可数紧的或 Lindelöf p 子空间是可度量化的; (iii) $U(y)$ 中每一紧子集是 $U(y)$ 中的 G_δ 集, 那么 G, bG 是可分与度量化的.*

证明　由引理 4.3.1, G 是度量化与局部可分的. 类似命题 4.3.2 的证明, G 和 bG 是可分与度量化的.

空间具有点可数基满足命题 4.3.5 中的 (i), (ii) [38, 推论 7.11(ii)] 和 (iii).

推论 4.3.6 *设 G 是非局部紧的 rectifiable 空间且 $Y = bG \setminus G$ 具有局部点可数基, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

由 [24, 命题 2.1] 和 [38, 推论 8.3(ii)], 具有 $\delta\theta$ 基的空间满足命题 4.3.5 中 (i), (ii) 和 (iii).

推论 4.3.7 *设 G 是非局部紧的 rectifiable 空间且 $Y = bG \setminus G$ 具有局部的 $\delta\theta$ 基, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

由 [38, 推论 10.7(ii) 和定理 10.6], γ 空间满足命题 4.3.5 的 (i), (ii) 和 (iii).

推论 4.3.8 *设 G 是非局部紧的 rectifiable 空间且 $Y = bG \setminus G$ 是局部 γ 空间, 那么 G 和 bG 是可分与度量化的.*

定理 4.3.9 *设 G 是 rectifiable 空间且 $Y = bG \setminus G$. 如果 Y 具有可数伪特征, 那么下列至少一个成立:*

1. *空间 G 是强 p 空间;*
2. *空间 Y 是第一可数的.*

证明　类似定理 4.2.20, G 是可数型或 Y 是第一可数的. 由 [13, 推论 2.8], G 是强 p 空间或 Y 是第一可数空间.

下列问题仍然是一个公开问题.

问题 4.3.10 *设 G 是拓扑群的. 若 G 的某 Hausdorff 紧化的余是第一可数的, 那么 G 是可度量化吗?*

易知存在非度量化的仿拓扑群且具有第一可数余.事实上, Alexandorff 的双箭空间是 Sorgenfrey line 的 Hausdorff 紧化, 但它的余同胚于 Sorgenfrey line. 然而, 我们有如下问题.

问题 4.3.11 *设 G 是 rectifiable 空间. 若 G 具有第一可数的 Hausdorff 紧化的余, 那么 G 是可度量化的?*

现在, 我们给这问题一个部分回答.

下列两定理的证明分别类似于 [8] 中定理 2.1 和定理 2.2.

定理 4.3.12 *设 G 是非局部紧的 rectifiable 空间且 G^{ω} 具有第一可数的 Hausdorff 紧化的余, 那么 G 是可度量化的.*

定理 4.3.13 *设 G 是 rectifiable 空间. 若存在非局部紧的度量空间(或第一可数的空间) M 使得 $G \times M$ 具有第一可数的 Hausdorff 紧化的余, 那么 G 是可度量化的.*

第五章 自由仿拓扑群

1941年, A.A. Markov 为了构造拓扑群在 [54] 引入了自由拓扑群的定义. 至今, 自由拓扑群成为在拓扑群理论研究的定理证明和提供例子的重要且强有力的工具, 具体可见 [10]. 类似于自由拓扑群, S. Romaguera, M. Sanchis 和 M.G. Thackenko 引入了自由仿拓扑群的定义 [68], 这引起我们对自由仿拓扑群的兴趣和研究.

本章主要讨论自由仿拓扑群的特征和拓扑嵌入问题, 证明了对 Tychonoff 空间 X 有 $\chi(AP(X)) = D(\mathscr{P}_X, \leq) = d({}^{\omega}\mathscr{U}_X, \leq)$, 见定理 5.1.16 和 5.1.18; 另外, 证明了若 X 是 Tychonoff 空间 Y 的任意子空间, 那么自然映射 $\hat{e}_{X,Y}: AP(X) \to AP(Y)$ 是拓扑单同态 (拓扑嵌入) 当且仅当 X 是拟 P* 嵌入 Y, 见定理 5.2.7.

§5.1 自由仿拓扑群的特征

本节中, 我们主要讨论自由仿拓扑群的特征问题, 这对于研究自由仿拓扑群有着重要的意义. 首先, 我们先给出一些定义.

一个*拟一致空间* $(X, \mathscr{U})$ 指的是在一致空间的定义去掉对称假设的条件. 对每一拟一致 $\mathscr{U}$, 由逆关系 $U^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in U\} (U \in \mathscr{U})$ 组成的滤子称为 $\mathscr{U}$ 的*共轭拟一致*. 仿拓扑群 G 上的*左拟一致* $\mathscr{G}_G$ 是由集

$$W_U^l = \{(x, y) \in G \times G : x^{-1}y \in U\}$$

组成的标准基, 其中 U 是 G 中单位元的开邻域. 若 X 是 G 的子空间, 那么由集

$$W_U^r \cap (X \times X) = \{(x, y) \in X \times X : x^{-1}y \in U\}$$

组成的集族称为 G 诱导在 X 上左拟一致 $\mathscr{G}_X = \mathscr{G}_G \mid X$. 类似地, 可定义 G 诱导在 X 上的*右拟一致*.

设 X 是拓扑空间. 我们称 X 上诱导 X 的拓扑的最细拟一致 $\mathscr{U}_X$ 为 X 的*完全拟一致*. 在本论文中, 若 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的拟一致, 那么 $\mathscr{U}^*$ 表示包含 $\mathscr{U}$ 的最粗的一致且 $\tau(\mathscr{U})$ 表示由 $\mathscr{U}$ 在 X 的拓扑. 拟一致空 $(X, \mathscr{U})$ 称为*双完全的*, 若 $(X, \mathscr{U}^*)$ 是完全的.

定义 5.1.1 设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 分别是空间 X 和 Y 的拟一致. 函数 $f:(X,\mathscr{U})\to(Y,\mathscr{V})$ 称为拟一致连续, 若对每一 $V\in\mathscr{V}$ 存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得对任意 $(x,y)\in U$ 有 $(f(x),f(y))\in V$.

定义 5.1.2 X 上的拟伪度量 d 是指从 $X\times X$ 到 $\mathbb{R}^+$ 的函数且满足对任意 $x,y,z\in X$: (a) $d(x,x)=0$ 和 (b) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$. 若 d 又满足条件 (c) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$, 那么 d 称为 X 上的拟度量.

X 上的每一拟伪度量 d 产生一个拓扑 $\mathscr{T}(d)$, 其中 $\mathscr{T}(d)$ 具有由 d 球 $\{B_d(x;r):x\in X,r>0\}$ 组成的基, 其中 $B_d(x;r)=\{y\in X:d(x,y)<r\}$.

拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 称为拟*(伪)*度量, 若存在 X 上的一个拟(伪)度量 d 诱导拓扑 $\mathscr{T}$, 即 $\mathscr{T}=\mathscr{T}(d)$.

记 $\mathscr{U}^\star$ 为 $\mathbb{R}$ 上由集

$$U_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:y<x+r\}$$

组成的集族为标准基的上确界拟一致, 其中 r 是任意正实数.

§5.1.1　自由仿拓扑群上的拟伪度量

在本小节中, 我们讨论自由仿拓扑群上的拟伪度量, 证明了拟伪度量族 $\{\hat{\rho}_A:\rho\in\mathscr{P}_X\}$ 产生自由交换仿拓扑群 $AP(X)$ 的拓扑, 其中 $\mathscr{P}_X$ 是所有从 $(X\times X,\mathscr{U}_X^{-1}\times\mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R},\mathscr{U}^\star)$ 的连续拟伪度量的集合.

引理 5.1.3 *[68] 如果 g 是 $F_a(X)$ 中不同于点 e 不可约的字, 那么在 $\tilde{X}$ 中存在一个长度为 $2n\ge 2$ 的几乎不可约的字 $\mathcal{X}_g=x_1x_2\cdots x_n$ 和置换 $\varphi_g\in\mathcal{S}_n$ 满足下列条件:*

1. *对每一 $i=1,2,\cdots,2n$, 或者 x_i 是 e 或者 x_i 是 g 的字母;*
2. *$[\mathcal{X}_g]=g$ 且 $n\le\ell(g)$; 和*
3. *$N_\rho(g)=\Gamma_\rho(\mathcal{X}_g,\varphi_g)$.*

引理 5.1.4 *[68] 集族 $\mathcal{N}=\{U_g(\varepsilon):\varepsilon>0\}$ 是 $F_a(X)$ 的仿拓扑群 $\mathscr{T}_\rho$ 在点 e 的基, 其中 $U_g(\varepsilon)=\{g\in F_a(X):N_\rho(g)<\varepsilon\}$. 那么 $\mathscr{T}_\rho|_X$ 与 X 由 ρ 产生的拓扑是一致的.*

引理 5.1.5 *[33]* 集 X 的拟一致 $\mathscr{U}$ 中序列 $V_0, V_1, \cdots$, 若满足对每一 $i \in \mathbb{N}$ 有

$$V_0 = X \times X \text{ 且 } V_{i+1} \circ V_{i+1} \circ V_{i+1} \subset V_i,$$

其中 '$\circ$' 是拟一致空间 $(X, \mathscr{U})$ 中的 *entourages* 的拟一致乘法, 那么存在集 X 中的拟伪度量 ρ 使得对每一 $i \in \mathbb{N}$ 有,

$$V_i \subset \{(x,y) : \rho(x,y) \leq \frac{1}{2^i}\} \subset V_{i-1}.$$

引理 5.1.6 设 $\mathscr{V}$ 是集 X 上的拟一致, 那么对每一 $V \in \mathscr{V}$, 存在集 X 上的拟伪度量 ρ 使得 ρ 是关于 $\mathscr{V}$ 的拟一致且满足

$$\{(x,y) : \rho(x,y) \leq 1\} \subset V.$$

证明 由集 X 上的拟一致 $\mathscr{U}$ 的定义, 可取 $\mathscr{U}$ 的序列 $V_0, V_1, \cdots, V_n, \cdots$ 使得 $V_1 = V$ 且每一 $V_{i+1} \circ V_{i+1} \circ V_{i+1} \subset V_i$. 设 $\rho = 4\rho_0$, 其中 ρ_0 是满足引理 5.1.5 的拟伪度量. 因此, ρ 是满足定理需求的拟伪度量.

引理 5.1.7 设 ρ 是集 X 上拟伪度量且 $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n$ 是 $F_a(X) \setminus \{e\}$ 中长度为 $l = \sum_{i=1}^n |m_i|$ 的标准形式的元素 h, 那么存在表示

$h = (-u_1 + v_1) + \cdots + (-u_k + v_k)$, ... *(1)*

其中, 若 l 是偶数, 那么 $2k = l$; 若 l 是奇数, 那么 $2k = l+1$; $u_1, v_1, \cdots, u_k, v_k \in \{\pm x_1, \cdots, \pm x_n\}$ *(*但 $v_k = e$, 若 l 是奇数*)* 且使得

$\hat{\rho}_A(e,h) = \sum_{i=1}^k \rho^*(u_i, v_i)$. .... *(2)*

此外, 若 $\hat{\rho}_A(e,h) < 1$, 那么 $l = 2k$, 从而可取 $y_1, z_1, \cdots, y_k, z_k \in \{x_1, \cdots, x_n\}$ 使得

$h = (-y_1 + z_1) + \cdots + (-y_k + z_k)$ .... *(3)*

且

$\hat{\rho}_A(e,h) = \sum_{i=1}^k \rho^*(y_i, z_i)$. .... *(4)*.

证明 显然, 我们有 $h = h_1 + \cdots + h_l$, 其中对每一 $1 \leq i \leq l$ 有 $h_i \in \{\pm x_1, \cdots, \pm x_n\}$. 易知存在整数 k 使得 $2k - 1 \leq l \leq 2k$. 不失一般性, 不妨设 l 是偶数. 事实上, 若 $l = 2k - 1$, 只需令 $h_{2k} = e$. 由引理 5.1.3, 在 $\{1, 2, \cdots, 2k\}$ 上存在一个阿贝尔置换 φ 使得

$\hat{\rho}_A(e,h)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2k}\rho^*(-h_i,h_{\varphi(i)})$. .... (5)

因为 $F_a(X)$ 是交换群, 不妨设对每一 $1\le i\le k$ 有 $\varphi(2i-1)=2i$. 对每一 $1\le i\le k$, 显然有 $\varphi(2i)=2i-1$. 因此, 我们有

$h=(h_1+h_2)\cdots+(h_{2k-1}+h_{2k})$. .... (6)

对每一 $1\le i\le k$, 置 $u_i=-h_{2i-1}$ 和 $v_i=h_{2i}$. 由 (5) 和 (6), (1) 和 (2) 分别成立.

最后, 设 $\hat{\rho}_A(e,h)<1$. 因为 $\rho(x,e)\ge 1$ 和 $\rho(e,x)\ge 1$, 所以 $\rho^*(x,e)\ge 1$, $\rho^*(e,x)\ge 1$, $\rho^*(-x,y)\ge 1$ 且对任意 $x,y\in X$ 有 $\rho^*(x,-y)\ge 1$. 然而, 由 (5), 对每一 $1\le i\le k$ 有 $\rho^*(-h_{2i-1},h_{2i})<1$, 因此, h_{2i-1},h_{2i} 中一个元素在 X 中而另外一个在 $-X$ 中. 从而对每一 $1\le i\le k$, 我们有 $h_{2i-1}+h_{2i}=-y_i+z_i$, 其中 $y_i,z_i\in X$. 对每一 $1\le i\le k$, 有 $y_i,z_i\in\{x_1,\cdots,x_n\}$. 那么我们只需在 (5) 和 (6) 中分别用 $\pm y_i$ 和 $\pm z_i$ 相应取代 h_{2i-1} 和 h_{2i}. 因此 (3) 和 (4) 成立.

引理 5.1.8 *若 d 是集 X 的拟伪度量且关于 $\mathscr{U}_X$ 是拟一致, 那么 d 是从 $(X\times X,\mathscr{U}_X^{-1}\times\mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R},\mathscr{U}^\star)$ 的连续函数.*

证明 取任意点 $(x_0,y_0)\in X\times X$. 只需证 d 在点 (x_0,y_0) 是连续. 对每一 $\varepsilon>0$, 因为 d 是关于 $\mathscr{U}_X$ 是拟一致, 所以存在 $U\in\mathscr{U}_X$ 使得对每一 $(x,y)\in U$ 有 $d(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}$. 设 $U_1=\{x\in X:(x,x_0)\in U\}$ 且 $U_2=\{y\in X:d(y_0,y)<\frac{\varepsilon}{2}\}$. 那么 U_1,U_2 分别是点 x_0 和 y_0 在空间 $(X,\mathscr{U}_X^{-1})$ 和 $(X,\mathscr{U}_X)$ 的邻域. 置 $V=U_1\times U_2$. 那么 V 是点 (x_0,y_0) 在空间 $(X\times X,\mathscr{U}_X^{-1}\times\mathscr{U}_X)$ 中的邻域. 对每一 $(x,y)\in V$, 有

$$\begin{aligned}
d(x,y)-d(x_0,y_0) &\le d(x,x_0)+d(x_0,y_0)+d(y_0,y)-d(x_0,y_0)\\
&= d(x,x_0)+d(y_0,y)\\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此, 拟伪度量 d 在点 (x_0,y_0) 连续.

引理 5.1.9 *[59] 设 $\{V_i:i\in\mathbb{N}\}$ 是具有单位元 e 的群 G 的子集序列且满足对每一 $i\in\mathbb{N}$ 有 $e\in V_i$ 和 $V_{i+1}^3\subset V_i$. 若 $k_1,\cdots,k_n,r\in\mathbb{N}$ 且 $\sum_{i=1}^n 2^{-k_i}\le 2^{-r}$, 那么 $V_{k_1}\cdots V_{k_n}\subset V_r$.*

下列定理 5.1.10 证明了一族拟伪度量 $\{\hat{\rho}_A : \rho \in \mathscr{P}_X\}$ 诱导了自由交换仿拓扑群 $AP(X)$, 其中 $\mathscr{P}_X$ 是从 $(X \times X, \mathscr{U}_X^{-1} \times \mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的所有的连续拟伪度量的集合.

定理 5.1.10 设 X 是 *Tychonoff* 空间且 $\mathscr{P}_X$ 是从 $(X \times X, \mathscr{U}_X^{-1} \times \mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的所有的连续拟伪度量的集合, 那么

$$V_\rho = \{g \in AP(X) : \hat{\rho}_A(e, g) < 1\}$$

使得 $\rho \in \mathscr{P}_X$ 是 $AP(X)$ 在点 e 的局部基.

证明 设 V 是点 e 在 $AP(X)$ 中的开邻域. 因为 $AP(X)$ 是仿拓扑群, 所以存在 e 在 $AP(X)$ 中的开邻域序列 $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得 $V_1 \subset V$ 且每一 $V_{i+1}+V_{i+1}+V_{i+1} \subset V_i$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$U_n = \{(x, y) \in X \times X : -x + y \in V_n\}.$$

那么每一 U_n 是 $\mathscr{U}_X$ 中的一个元素且 $U_{n+1} \circ U_{n+1} \circ U_{n+1} \subset U_n$. 因此, 由引理 5.1.5 和 5.1.8, 存在连续的拟伪度量 $\rho_1 \in \mathscr{P}_X$ 使得对每一 $n \in \mathbb{N}$, 有

$$\{(x, y) \in X \times X : \rho_1(x, y) < 2^{-n}\} \subset U_n.$$

置 $\rho = 4\rho_1$.

论断: $V_\rho \subset V$.

事实上, 设 $h \in V_\rho$. 由引理 5.1.7, h 能写成如下形式

$$h = (-x_1 + y_1) + \cdots + (-x_m + y_m), \text{ 其中对每一 } 1 \le i \le m \text{ 有 } x_i, y_i \in X,$$

使得

$$\hat{\rho}_A(e, h) = \rho(x_1, y_1) + \cdots + \rho(x_m, y_m).$$

因为 $\rho = 4\rho_1$, 所以 $\hat{\rho} = 4\hat{\rho}_1$. 因此, 我们有

$$\hat{\rho}_1(e, h) = \rho_1(x_1, y_1) + \cdots + \rho_1(x_m, y_m) < \frac{1}{4}.$$

对每一 $1 \le i \le m$, 若 $\rho_1(x_i, y_i) > 0$, 那么可取 $k_i \in \mathbb{N}$ 使得

$$2^{-k_i - 1} \le \rho_1(x_i, y_i) < 2^{-k_i}.$$

然后, 对每一 $1 \leq i \leq m$, 若 $\rho_1(x_i, y_i) = 0$, 那么可取足够大的 $k_i \in \mathbb{N}$ 使得 $\sum_{i=1}^{m} 2^{-k_i} < \frac{1}{2}$. 对每一 $1 \leq i \leq m$, 因为 $-x_i + y_i \in V_{k_i}$, 所以由引理 5.1.9 有

$$h = (-x_1 + y_1) + \cdots + (-x_m + y_m) \in V_{k_1} + \cdots + V_{k_m} \subset V_1 \subset V.$$

因此, 我们有 $V_\rho \subset V$.

引理 5.1.11 设 $m_1x_1 + \cdots + m_nx_n$ 是元素 $g \in A_a(X) \setminus \{e\}$ 的标准表示且 d 是 X 上的拟伪度量. 若 $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$, 那么存在 g 的可约的表示为

$$g = (-z_1 + t_1) + \cdots (-z_k + t_k)$$

使得对每一 $j \leq k$ 有 $2k = \sum_{i=1}^{n} |m_i|$, $z_j, t_j \in \{x_1, \cdots, x_n\}$ 且 $\hat{d}_A(e, g) = \sum_{j=1}^{k} d(z_j, t_j)$.

证明 由 $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$, $m = \sum_{i=1}^{n} |m_i|$ 是偶数. 设 $m = 2k$, 其中 $k \in \mathbb{N}$. 由引理 5.1.7, g 具有可约表示 φ 且具有形式

$$g = (-u_1 + v_1) + \cdots + (-u_k + v_k)$$

使得

$$\hat{d}_A(e, g) = \Gamma(\varphi) = \sum_{j=1}^{k} d^*(u_j, v_j),$$

其中对每一 $j \leq k$ 有 $u_j, v_j \in \{\pm x_1, \cdots, \pm x_n\}$. 显然, 每一 $-u_j + v_j$ 具有下列形式之一: $a - b, -a + b, a + b, -a - b$, 其中 $a, b \in X$.

设 $-u_1 + v_1$ 具有第三种形式. 那么我们有 $-u_1 = a \in X$ 和 $v_1 \in X$, 因此 $-u_1 + v_1 = a + v_1$. 因为 $\sum_{i=1}^{n} m_i = 0$, 所以存在 $2 \leq j \leq k$ 使得 $-u_j + v_j$ 具有第四种形式. 不失一般性, 不妨设 $j = 2$. 那么 $u_2 \in X$ 且存在 $b \in X$ 使得 $v_2 = -b$. 因此, 由 $X \cup \{e\} \cup (-X)$ 上的拟伪度量 d^* 的定义, $\Gamma(\varphi)$ 包含相应的部分 $-u_1 + v_1$ 和 $(-u_2 + v_2)$

$$\begin{aligned} d^*(u_1, v_1) + d^*(u_2, v_2) &= d^*(-a, v_1) + d^*(u_2, -b) \\ &= d(e, a) + d(e, v_1) + d(u_2, e) + d(b, e) \\ &\geq d^*(b, a) + d^*(u_2, v_1) \end{aligned}$$

在可约表示 φ 用 $(-u_2+v_1)+(-b+a)$ 取代 $(-u_1+v_1)+(-u_2+v_2)$. 因此, 我们给 g 另外一种可约表示 φ' 且具有形式

$$g=(-u_2+v_1)+(-b+a)+(-u_3+v_3)+\cdots+(-u_k+v_k).$$

由上面的不等式有 $\Gamma(\varphi')\leq\Gamma(\varphi)$. 因为 k 是有限的, 所以由归纳我们能给出 g 的另外一种可约表示 φ'' 且具有形式

$$g=(-z_1+t_1)+\cdots(-z_k+t_k),$$

其中对每一 $j\leq k$ 有 $z_j,t_j\in\{x_1,\cdots,x_n\}$. 此外, 易知 $\Gamma(\varphi'')\leq\Gamma(\varphi)$. 然而, 由 $\hat{d}_A(e,g)=\Gamma(\varphi)\leq\Gamma(\varphi'')$ 的定义, 从而 $\hat{d}_A(e,g)=\sum_{j=1}^k d(z_j,t_j)$.

定理 5.1.12 设 d 是 X 上的拟伪度量, 那么对任意 $x,y\in X$ 有 $\hat{d}_A(kx,ky)=kd(x,y)$ 且 $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

证明 若 $x=y$ 或者 $k=0$, 那么定理显然成立. 因此, 设 $x\neq y$ 且 $k\in\mathbb{N}$. 设 $g=-kx+ky$. 由引理 5.1.9, g 具有可约表示形式

$$g=(-z_1+t_1)+\cdots(-z_k+t_k),$$

其中对每一 $j\leq k$ 有 $z_j,t_j\in\{x,y\}$ 且 $\hat{d}_A(e,g)=\sum_{j=1}^k d(z_j,t_j)$. 因为上面 g 的表示是可约且 $k>0$, 所以每一 $-z_j+t_j$ 等于 $-x+y$. 因此, 我们有

$$\hat{d}_A(kx,ky)=\hat{d}_A(e,g)=\sum_{j=1}^k d(z_j,t_j)=\sum_{j=1}^k d(x,y)=kd(x,y).$$

§5.1.2 自由阿贝尔仿拓扑群的特征

本小节中, 我们主要利用上节的结果讨论自由仿拓扑群的特征. 下列的引理的证明是一个简单的练习.

引理 5.1.13 设 $k\in\omega,p,k_1,\cdots,k_p\in\mathbb{N}$ 且满足 $\sum_{i=1}^p 2^{-k_i}<2^{-k}$, 那么我们有

1. 若 $(X,\mathscr{U})$ 是拟一致空间且 $\{U_n:n\in\omega\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的可数子族使得每一 $n\in\omega$ 有 $U_{n+1}\circ U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n$, 那么 $U_{k_1}\circ\cdots\circ U_{k_p}\subset U_k$;

2. 若 $\{V_i : i \in \omega\}$ 是具有单位元 e 的群 G 的子集序列使得每一 $i \in \omega$ 有 $e \in V_i$ 且 $V_{i+1}^3 \subset V_i$, 那么我们有 $V_{k_1} \cdots V_{k_n} \subset V_r$.

设 $\mathscr{U}_X$ 是空间 X 的最细的拟一致. 置 $\mathscr{P} = \{P \subset \mathscr{U}_X : P$ 是可数的$\}$. 对每一 $P = \{U_1, U_2, \cdots\} \in \mathscr{P}$, 设

$W(P) = \{-x_1 + y_1 - \cdots - x_k + y_k : (x_i, y_i) \in U_i,$ 其中 $i = 1, 2, \cdots, k, k \in \mathbb{N}\}$, 且

$\mathscr{W} = \{W(P) : P \in \mathscr{P}\}$.

此外, 固定任意 $n \in \mathbb{N}$. 设

$\mathscr{Q}_n(P) = \{Q \subset P : |Q| = n\}$;

$W_n(P) = \{-x_1 + y_1 - \cdots - x_n + y_n : (x_j, y_j) \in U_{i_j},$ 其中 $i = 1, 2, \cdots, n,$ $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n}\} \in \mathscr{Q}_n(P)\}$, 且

$\mathscr{W}_n = \{W_n(P) : P \in \mathscr{P}\}$.

注记 在上面的定义中, 对每一 $P \in \mathscr{P}$, P 中也许有相同的元素. 特别地, 对每一 $U \in \mathscr{U}_X$, 我们有 $\{U, U, \cdots\}$ 也是 $\mathscr{P}$ 中的元素. 此外, $W(P)$ 和 $W_n(P)$ 中的元素的表示不一定是可约表示.

置 $\mathscr{R}_n(P) = \{Q \subset P : |Q| \leq n\}$. 易知

$W_n(P) = \{-x_1 + y_1 - \cdots - x_k + y_k : (x_j, y_j) \in U_{i_j},$ 其中 $i = 1, 2, \cdots, k,$ $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_k}\} \in \mathscr{R}_n(P)\}$.

定理 5.1.14 集族 $\mathscr{W}$ 是 $AP(X)$ 在点 e 的邻域基.

证明 易知 $\mathscr{W}$ 满足下列条件 (i)-(iv):
(i) 对每一 $W \in \mathscr{W}$, 存在 $V \in \mathscr{W}$ 使得 $V + V \subset W$;
(ii) 对每一 $W \in \mathscr{W}$ 且每一 $g \in V$, 存在 $V \in \mathscr{W}$ 使得 $g + V \subset W$;
(iii) 对每一 $U, V \in \mathscr{W}$, 存在 $W \in \mathscr{W}$ 使得 $W \subset U \cap V$;
(iv) $\{0\} = \cap \mathscr{W}$.

因此, 由 $\mathscr{W}$ 在集 $A_a(X)$ 产生的拓扑 $\mathscr{F}_1$ 使得 $A_a(X)$ 是仿拓扑群. 取 $P = \{U_1, U_2, \cdots\} \in \mathscr{P}$ 和 $x \in X$, 置 $W(x) = \{y \in X : (x, y) \in U_1\}$. 因为 $\mathscr{U}_X$ 与 X 上的原始拓扑是协调的, 所以 $W(x)$ 是 X 中的开集. 此外, 我们能证明 $x \in W(x) \subset (x + W(P)) \cap X$, 这蕴含 $\mathscr{F}_1|_X$ 是粗于 X 的原始拓扑.

论断: $\mathscr{F}_1$ 细于 $AP(X)$ 上的拓扑.

事实上, 设 V 是 $AP(X)$ 上点 e 的开邻域. 置 $V_0 = V$ 且取 $AP(X)$ 上点 e 的开邻域序列 $\{V_n : n \in \omega\}$ 使得 $V_n + V_n + V_n \subset V_{n-1}$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$U_n = \{(x, y) \in X \times X : -x + y \in V_n\},$$

那么 $U_n \in \mathscr{U}_X$. 因此 $P = \{U_1, U_2, \cdots\} \in \mathscr{P}$. 对每一点 $g \in W(P)$, 那么存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $g = -x_1 + y_1 - \cdots - x_n + y_n$, 其中 $(x_i, y_i) \in U_i$ 且 $i = 1, 2, \cdots, n$. 因此, 由引理 5.1.13 有 $g \in V_1 + V_2 + \cdots + V_n \subset V_0 = V$, 那么 $W(P) \subset V$.

由论断, $\mathscr{F}_1|_X$ 与 X 上的原始拓扑是协调的. 因此, $\mathscr{F}_1$ 粗于 $AP(X)$ 上的拓扑. 因此 $\mathscr{F}_1$ 与 $AP(X)$ 上的拓扑是协调的. 因此 $\mathscr{W}$ 是 $AP(X)$ 在点 e 的邻域基.

我们称 $(P, \leq)$ 是拟序集, 若 $\leq$ 是集 P 上的反自反和传递关系. 若 $(P, \leq)$ 又具有反对称性, 那么称 $(P, \leq)$ 是偏序集. 集 D 称为控制拟序集 $(P, \leq)$, 若对每一 $p \in P$ 存在 $q \in D$ 使得 $p \leq q$. 类似地, P 的子集 E 称为在 $(P, \leq)$ 中稠的, 若对每一 $p \in P$ 存在 $q \in E$ 使得 $q \leq p$. $(P, \leq)$ 中控制族的最小基数记为 $D(P, \leq)$, 而用 $d(P, \leq)$ 表示 $(P, \leq)$ 中稠子集的最小基数. 控制集与稠子集是对偶的: 若 S 是 $(P, \leq)$ 的稠子集, 那么它是 $(P, \geq)$ 中的控制集且反之也成立. 因此, $d(P, \leq) = D(P, \geq)$ 且 $d(P, \geq) = D(P, \leq)$. 注意到在任意齐性空间 G 有 $d(N(e), \subset) = \chi(G)$.

若 $(P; \leq)$ 和 $(Q; \ll)$ 是拟序集, 则映射 $f : P \to Q$ 称为序保持的, 若 $x \leq y$ 蕴含 $f(x) \ll f(y)$, 其中 $x, y \in P$. 类似地, f 是序逆保持的, 若 $x \leq y$ 蕴含 $f(x) \gg f(y)$.

引理 5.1.15 *[59] 设 $(P, \leq)$ 和 $(Q, \ll)$ 拟偏序且 $f : P \to Q$ 是序保持映射. 如果 $f(P)$ 是 Q 的控制集, 那么 $D(Q) \leq D(P)$.*

定理 5.1.16 *设 X 是 Tychonoff 空间, 那么 $\chi(AP(X)) = D(\mathscr{P}_X, \leq)$.*

证明 由定理 5.1.14, 那么存在从族 $\mathscr{P}_X$ 到 $AP(X)$ 在点 e 的某局部基的自然对应. 事实上, 存在从 $(\mathscr{P}_X, \leq)$ 到 $AP(X)$ 在点 e 的某局部基的偏序集 $(\mathcal{N}(e), \supseteq)$ 的对应 $d \mapsto V_d$, 即, $(\mathcal{N}(e), \supseteq)$ 上的控制集, 由引理 5.1.15 知 $\chi(AP(X)) \leq D(\mathscr{P}_X, \leq)$.

设 $Q \subset \mathscr{P}_X$ 且满足 $\{V_d : d \in Q\}$ 是 $AP(X)$ 在点 e 的某局部基.

论断: 对每一 $\rho \in \mathscr{P}_X$, 存在 $d \in Q$ 使得 $\rho \leq 2d$.

事实上, 取定 $\rho \in \mathscr{P}_X$, 因为 $\{V_d : d \in Q\}$ 是 $AP(X)$ 在点 e 的某局部基, 所以存在 $d \in Q$ 使得 $V_d \subset V_\rho$. 现在我们将证明 $\rho \leq 2d$. 设 $x, y \in X$. 若 $d(x,y) < 1$, 那么 $-x+y \in V_d \subset V_\rho$, 因此 $\rho(x,y) < 1$. 给定 $n \in \mathbb{N}$. 类似地, 若 $n \in \mathbb{N}$ 且 $d(x,y) < 2^{-n}$, 那么由定理 5.1.12, $\hat{d}_A(e, 2^n(-x+y)) = \hat{d}_A(2^n x, 2^n y) = 2^n d(x,y) < 1$. 因此, 我们有 $2^n(-x+y) \in V_d \subset V_\rho$, 从而 $\hat{\rho}_A(2^n x, 2^n y) = 2^n \rho(x,y) < 1$, 即, $\rho(x,y) < 2^{-n}$. 因此我们已经证明 $d(x,y) < 2^{-n}$, 这蕴含对每一 $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 有 $\rho(x,y) < 2^{-n}$. 因此, 易知若 $d(x,y) = 0$ 或 $d(x,y) = 1$, 那么 $\rho(x,y) \leq 2d(x,y)$. 若 $0 < d(x,y) < 1$, 那么存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $2^{-n-1} \leq d(x,y) < 2^{-n}$. 因此, $\rho(x,y) < 2^{-n}$, 这蕴含 $\rho(x,y) \leq 2d(x,y)$. 从而 $\rho \leq 2d$.

对每一 $d \in Q$, 设 $d^* = \min\{2d, 1\}$ 且置 $Q^* = \{d^* : d \in Q\}$. 显然, $Q^* \subset \mathscr{P}_X$. 由论断, Q^* 是 $\mathscr{P}_X$ 的控制族. 因此, $D(\mathscr{P}_X, \leq) \leq |Q^*| \leq |Q|$.

设 $\mathscr{B}$ 是 $AP(X)$ 在点 e 的局部基. 对每一 $B \in \mathscr{B}$, 由定理 5.1.10 知存在 $d_B \in \mathscr{P}_X$ 使得 $V_{d_B} \subset B$. 置 $\mathscr{A} = \{d_B : B \in \mathscr{B}\}$. 因此, $\{V_{d_B} : B \in \mathscr{B}\}$ 是 $AP(X)$ 在点 e 的局部基且满足 $|\mathscr{A}| \leq |\mathscr{B}|$, 从而 $D(\mathscr{P}_X, \leq) \leq |\mathscr{A}| \leq |\mathscr{B}|$. 因此 $D(\mathscr{P}_X, \leq) \leq \chi(AP(X))$.

那么我们有 $D(\mathscr{P}_X, \leq) = \chi(AP(X))$.

由定理 5.1.16 的证明, 我们容易证明下列定理.

定理 5.1.17 设 X 是 *Tychonoff* 空间且 $\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}_X$. 那么开集族

$$\{g \in AP(X) : \hat{d}_A(e, g) < \varepsilon\}, \text{ 其中 } d \in \mathscr{Q} \text{ 和 } \varepsilon > 0,$$

是自由交换仿拓扑群 $AP(X)$ 在点 e 的局部基当且仅当对每一 $\rho \in \mathscr{P}_X$ 存在 $d \in \mathscr{Q}$ 使得 $\rho \leq 2d$.

给定 ${}^\omega\mathscr{U}_X$ 中两个序列 $s = \langle U_n : n \in \omega\rangle$ 和 $t = \langle V_n : n \in \omega\rangle$. 若对每一 $n \in \omega$ 有 $U_n \subset V_n$, 记 $s \leq t$.

定理 5.1.18 $\chi(AP(X)) = d({}^\omega\mathscr{U}_X, \leq)$.

证明 由定理 5.1.14, $\chi(AP(X)) \leq d({}^\omega\mathscr{U}_X, \leq)$. 由定理 5.1.16, 只需证 $d({}^\omega\mathscr{U}_X, \leq) \leq D(\mathscr{P}_X, \leq)$.

事实上, 对每一 $d \in \mathscr{P}_X$ 和 $n \in \omega$, 设

$$U_n(d) = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) \leq 2^{-n}\}.$$

显然, $d \mapsto \langle U_n(d) : n \in \omega \rangle$ 是 $D(\mathscr{P}_X, \leq)$ 到 $({}^{\omega}\mathscr{U}_X, \leq)$ 序保持映射. 置 $\mathscr{A} = \{\langle U_n(d) : n \in \omega \rangle : d \in \mathscr{P}_X\}$. 那么 $\mathscr{A}$ 是 ${}^{\omega}\mathscr{U}_X$ 的稠子集. 事实上, 取序列 $\langle U_n : n \in \omega \rangle \in {}^{\omega}\mathscr{U}_X$, 那么存在 $\{V_n : n \in \omega\}$ 使得每一 $n \in \omega$ 有 $3V_{n+1} \subset V_n \subset U_n$. 由定理 5.1.10, 存在 $d \in \mathscr{P}_X$ 使得每一 $n \in \omega$ 有 $U_n(d) \subset V_n$. 因此, 我们有 $\langle V_n : n \in \omega \rangle \leq \langle U_n : n \in \omega \rangle$.

推论 5.1.19 $\omega(X, \mathscr{U}_X) \leq \chi(AP(X)) \leq \omega(X, \mathscr{U}_X)^{\aleph_0}$.

证明 显然,

$$\omega(X, \mathscr{U}_X) = d(\mathscr{U}_X, \subseteq) \leq d({}^{\omega}\mathscr{U}_X, \leq) \leq d(\mathscr{U}_X, \subseteq)^{\aleph_0} = \omega(X, \mathscr{U}_X)^{\aleph_0}.$$

因此, 由定理 5.1.18 知推论成立.

空间 X 称为拟一致 P 空间, 若 $\mathscr{U}_X$ 关于可数交运算封闭.

定理 5.1.20 *若 X 是拟一致 P 空间, 那么 $\chi(AP(X)) = \omega(X, \mathscr{U}_X)$.*

证明 $U \mapsto \langle U, U, \cdots \rangle$ 是从 $(\mathscr{U}_X, \subseteq)$ 到 $({}^{\omega}\mathscr{U}_X, \leq)$ 的序保持对应. 置 $\mathscr{A} = \{\langle U, U, \cdots \rangle : U \in \mathscr{U}_X\}$. 那么 $\mathscr{A}$ 是 ${}^{\omega}\mathscr{U}_X$ 的稠子集. 事实上, 因为 X 是拟一致 P 空间, 所以对任意 $\langle U_0, U_1, \cdots \rangle \in {}^{\omega}\mathscr{U}_X$ 有 $U = \bigcap_{n\in\omega} U_n \in \mathscr{U}_X$; 因此 $\langle U, U, \cdots \rangle \leq \langle U_0, U_1, \cdots \rangle$. 由定理 5.1.18, $\chi(AP(X)) = \omega(X, \mathscr{U}_X)$.

类似 [59, 引理 2.14] 的证明, 我们能证明下列的定理.

定理 5.1.21 *若 X 不是拟一致 P 空间, 那么 $\flat \leq \chi(AP(X))$.*

定理 5.1.22 *若 Tychonoff 空间 X 包含无限的紧子集, 那么 $\flat \leq \chi(AP(X))$.*

证明 设 K 是 X 的无限的紧子集. 因为一个无限紧集不可能是 P 空间, 所以 X 不是拟一致 P 空间, 那么由定理 5.1.21 有 $\flat \leq \chi(AP(X))$.

§5.2 自由仿拓扑群的拓扑嵌入

定义 5.2.1 *设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的子空间.*

1. *子空间 X 称为 P 嵌入 Y, 若 X 上的每一连续的伪度量允许连续延拓到 Y 上;*

2. *子空间 X 称为 P^* 嵌入, 若 X 上的每一连续的有界的伪度量允许连续延拓到 Y;*

3. *空间 X 称为拟 P 嵌入, 若 $(X\times X, \mathscr{U}_X^{-1}\times\mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续的拟伪度量允许连续延拓到从 $(Y\times Y, \mathscr{U}_Y^{-1}\times\mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$;*

4. *空间 X 称为拟 P^* 嵌入, 若 $(X\times X, \mathscr{U}_X^{-1}\times\mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续的有界的拟伪度量允许连续延拓到从 $(Y\times Y, \mathscr{U}_Y^{-1}\times\mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$.*

若 X 是 Tychonoff 空间 Y 的任意子空间, 那么设 $e_{X,Y}$ 是 X 到 Y 的自然嵌入. 下列两定理是自由拓扑群理论中的重要定理.

定理 5.2.2 *[57, 66, Nummela-Pestov] 设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的稠子空间,那么嵌入映射 $e_{X,Y}$ 能延拓成拓扑嵌入 (即, 拓扑单同态) $\hat{e}_{X,Y}: F(X)\to F(Y)$ 当且仅当 X 是 P 嵌入 Y.*

定理 5.2.3 *[83, M. Thackenko] 设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的任意子空间, 那么嵌入映射 $e_{X,Y}$ 能延拓成拓扑嵌入 (即, 拓扑单同态) $\hat{e}_{X,Y}: A(X)\to A(Y)$ 当且仅当 X 是 P^* 嵌入 Y.*

类似于自由拓扑群, 我们有下列两问题:

问题 5.2.4 *设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的稠子空间,那么嵌入映射 $e_{X,Y}$ 能延拓成拓扑嵌入 (即, 拓扑单同态) $\hat{e}_{X,Y}: FP(X)\to FP(Y)$ 当且仅当 X 是拟 P 嵌入 Y?*

问题 5.2.5 *设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的任意子空间, 那么嵌入映射 $e_{X,Y}$ 能延拓成拓扑嵌入 (即, 拓扑单同态) $\hat{e}_{X,Y}: AP(X)\to AP(Y)$ 当且仅当 X 是拟 P^* 嵌入 Y?*

在本节中, 我们将给问题 5.2.5 一个肯定回答. 然而对于问题 5.2.4 我们将给出一个部分回答.

引理 5.2.6 *设 $(X, \mathscr{U}_X)$ 是 Tychonoff 空间 $(Y, \mathscr{U}_Y)$ 的拟一致子空间, 那么 X 是拟 P^* 嵌入 Y.*

证明 设 d 是从 $(X \times X, \mathscr{U}_X^{-1} \times \mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的有界且连续的拟伪度量. 设 d 有上界 $\frac{1}{2}$. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 取 $V_i \in \mathscr{U}_Y$ 满足 $V_i \cap (X \times X) \subset \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \frac{1}{2^i}\}$, 因此由 [72, 第三章, 命题 2.4 和定理 2.5], 取从 $(Y \times Y, \mathscr{U}_Y^{-1} \times \mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续拟伪度量 d_i 使得 d_i 有上界 1 且 $\{(x, y) \in Y \times Y : d_i(x, y) < \frac{1}{4}\} \subset V_i$. 置

$$\rho(x, y) = 8 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} d_i(x, y).$$

显然, 易知 ρ 是从 $(Y \times Y, \mathscr{U}_Y^{-1} \times \mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续的拟伪度量. 此外, 易知 ρ 是关于 $\mathscr{U}_Y$ 的拟一致且满足对所有的 $x, y \in X$ 有 $d(x, y) \leq \rho(x, y)$. 置

$$\rho'(x, y) = \inf\{\rho(x, a) + d(a, b) + \rho(b, y) : a, b \in X\}, \text{ 其中 } x, y \in Y.$$

设

$$\tilde{d} = \min\{\rho(x, y), \rho'(x, y)\}.$$

显然, $\tilde{d}$ 是关于 $\mathscr{U}_Y$ 的拟一致. 由引理 5.1.8, $\tilde{d}$ 是从 $(Y \times Y, \mathscr{U}_Y^{-1} \times \mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续拟伪度量. 此外, $\tilde{d}|X \times X = d$. 因此, X 是拟 P^* 嵌入 Y.

定理 5.2.7 *设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的任意子空间, 那么自然映射 $\hat{e}_{X,Y} : AP(X) \to AP(Y)$ 是拓扑单同态 (拓扑嵌入) 当且仅当 X 是拟 P^* 嵌入 Y.*

证明 必要性. 设 d 是任意的从 $(X \times X, \mathscr{U}_X^{-1} \times \mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的有界连续拟伪度量. 那么 $U_d = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < 1\} \in \mathscr{U}_X$. 置 $V_d = \{g \in AP(X) : \hat{d}(e, g) < 1\}$, 那么 V_d 是 $AP(X)$ 的单位元的邻域. 因为 $AP(X) \subset AP(Y)$, 所以由定理 5.1.10 存在从 $(Y \times Y, \mathscr{U}_Y^{-1} \times \mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续拟伪度量且满足 $V_\rho \cap AP(X) \subset V_d$, 其中 $V_\rho = \{g \in AP(Y) : \hat{\rho}(e, g) < 1\}$. 注意到 $U_\rho = \{(x, y) \in Y \times Y : \rho(x, y) < 1\} \in \mathscr{U}_Y$ 和 $U_\rho \cap (X \times X) \subset U_d$, 因此 $(X, \mathscr{U}_X)$ 是 $(Y, \mathscr{U}_Y)$ 的拟一致子空间, 所以由引理 5.2.6 知 X 是拟 P^* 嵌入 Y.

充分性. 设 X 是拟 P^* 嵌入 Y. 记 $e_{X,Y}$ 是 X 到 Y 的嵌入映射. 显然, 单同态 $\hat{e}_{X,Y}$ 是连续. 下证同构 $\hat{e}_{X,Y}^{-1}: AP(X,Y) \to AP(X)$ 是连续. 设 U 是 $AP(X)$ 在单位元 e_X 的邻域. 由定理 5.1.10, 存在从 $(X \times X, \mathscr{U}_X^{-1} \times \mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续拟伪度量 ρ 使得 $V_\rho = \{g \in AP(X) : \hat{\rho}_A(e_X, g) < 1\} \subset U$. 不失一般性, 设 $\rho \leq 1$ (否则, 把 ρ 换为 $\rho' = \min\{\rho, 1\}$.). 因为 X 是拟 P^* 嵌入 Y, 所以拟伪度量 ρ 能延拓到从 $(Y \times Y, \mathscr{U}_Y^{-1} \times \mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续拟伪度量 d. 设 $\hat{d}_A$ 是 $AP(Y)$ 上的拟伪度量 d 的 Graev 延拓. 由定理 5.1.10, $V_d = \{g \in AP(Y) : \hat{d}_A(e_Y, g) < 1\}$ 是 $AP(Y)$ 中单位元 e_Y 的开邻域. 显然, 我们可以把 $F_a(X)$等同于由 $A_a(Y)$ 的子集 X 产生的子群 $\hat{e}_{X,Y}(F_a(X)) = A_a(X,Y)$. 因为 $d \mid X = \rho$, 所以由引理 5.1.7 知对每一 $h \in A_a(X,Y)$ 有 $\hat{d}_A(e_Y, h) = \hat{\rho}_A(e_Y, h)$. 因此, $A_a(X,Y) \cap V_d = V_\rho$, 即, $AP(X,Y) \cap V_d = \hat{e}_{X,Y}(V_\rho)$. 因此, $\hat{e}_{X,Y}^{-1}: AP(X,Y) \to AP(X)$ 是连续的.

引理 5.2.8 *设 X 是 Tychonoff 空间, 那么仿拓扑群 $PG(X)$ 上的左拟一致 $\mathscr{G}_{PG(X)}$ 限制在子空间 X 上的拟一致 $\mathscr{G}_X = \mathscr{G}_{PG(X)} \mid X$ 与 X 上的最细拟一致 $\mathscr{U}_X$ 是一致的.*

证明 因为 X 上由 $PG(X)$ 的左拟一致 $\mathscr{G}_{PG(X)}$产生的拓扑就是 X 上原来的拓扑, 所以 $\mathscr{G}_X \subset \mathscr{U}_X$. 下面我们只需证 $\mathscr{U}_X \subset \mathscr{G}_X$. 取任意 $U \in \mathscr{U}_X$. 由引理 5.1.6 和 5.1.8, 存在从 $(X \times X, \mathscr{U}_X^{-1} \times \mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续拟伪度量 ρ 使得 $\{(x,y) \in X \times X : \rho(x,y) < 1\} \subset U$. 由 [68, 定理 3.2], 设 $\hat{\rho}$ 是 ρ 从 $(PG(X) \times PG(X), \mathscr{U}_{PG(X)} \times \mathscr{U}_{PG(X)}^{-1})$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的 Graev 连续不变拟伪度量延拓. 由定理 5.1.10, $V = \{g \in PG(X) : \hat{\rho}(e, g) < 1\}$ 是 $PG(X)$ 中单位元 e 的开邻域. 若 $x, y \in X$ 且 $x^{-1}y \in V$, 那么

$$\rho(x,y) = \hat{\rho}(x,y) = \hat{\rho}(e, x^{-1}y) < 1,$$

这蕴含 $W_V^r = \{(g,h) \in G \times G : g^{-1}h \in V\}$ 是 $\mathscr{G}_{PG(X)}$ 中的一个元素且满足 $W_V^r \cap (X \times X) \subset U$. 因此, $\mathscr{U}_X \subset \mathscr{G}_X$.

引理 5.2.9 *[69] 每一拟伪度量空间上的最细的拟一致是双完全的.*

引理 5.2.10 *设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的子空间且 X 是 $(\tilde{Y}, \tilde{\mathscr{U}_Y})$ 的 $\tau(\tilde{\mathscr{U}_Y}^*)$ 稠子集, 其中 $(\tilde{Y}, \tilde{\mathscr{U}_Y})$ 是 $(Y, \mathscr{U}_Y)$ 的双完全的. 那么下列条件等价:*

1. *X 是拟 P^* 嵌入 Y;*

2. *X 是拟 P 嵌入 Y;*

3. *$\mathscr{U}_Y \mid X = \mathscr{U}_X$;*

4. *$X \subset Y \subset \tilde{X}$, 其中 $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}_X})$ 是 $(X, \mathscr{U}_X)$ 的双完全的.*

证明 显然, (2) $\Rightarrow$ (1). 因此, 我们只需证 (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 X 是拟 P* 嵌入 Y. 对每一 $U \in \mathscr{U}_X$, 由引理 5.1.6 和 5.1.8 知存在从 $(X \times X, \mathscr{U}_X^{-1} \times \mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的有界的连续的拟伪度量 ρ_X 使得

$$W_X = \{(x, x') \in X \times X : \rho_X(x, x') < 1\} \subset U.$$

因为 X 是拟 P* 嵌入 Y, 所以设 ρ_Y 是 ρ_X 的从$(Y \times Y, \mathscr{U}_Y^{-1} \times \mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续拟伪度量延拓. 置

$$W_Y = \{(y, y') \in Y \times Y : \rho_Y(y, y') < 1\}.$$

那么, $W_Y \in \mathscr{U}_Y$ 和 $W_Y \cap (X \times X) = W_X \subset U$. 因此, 拟一致 $\mathscr{U}_Y \mid X$ 比 $\mathscr{U}_X$ 细. 此外, 显然 $\mathscr{U}_Y \mid X \subset \mathscr{U}_X$. 因此 $\mathscr{U}_Y \mid X = \mathscr{U}_X$.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 $\mathscr{U}_Y \mid X = \mathscr{U}_X$且 $(\tilde{Y}, \tilde{\mathscr{U}_Y})$ 是拟一致空间 $(Y, \mathscr{U}_Y)$ 的双完全的. 因为 $\tilde{\mathscr{U}_Y} \mid Y = \mathscr{U}_Y$, 所以 $\tilde{\mathscr{U}_Y} \mid X = \mathscr{U}_X$. 此外, 因为 X 是 $\tau(\tilde{\mathscr{U}_Y}^*)$ 稠且 $X \subset Y$, 所以 $(\tilde{Y}, \tilde{\mathscr{U}_Y})$ 是拟一致空间 $(X, \mathscr{U}_X)$ 的双完全的. 因此 $X \subset Y \subset \tilde{X}$.

(4) $\Rightarrow$ (2). 设 $Y \subset \tilde{X}$. 考虑 $(X \times X, \mathscr{U}_X^{-1} \times \mathscr{U}_X)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连读拟伪度量 ρ. 设 $(\overline{X}, \overline{\rho})$ 为把 X 中按拟伪度量 ρ 距离为 0 的所有点等同于一点的拟度量空间. 设 $\pi : X \to \overline{X}$ 是自然商映射. 显然, 对所有的 $x, y \in X$ 有 $\rho(x, y) = \overline{\rho}(\pi(x), \pi(y))$. 设 $\mathscr{U}_{\overline{X}}$ 是 $\overline{X}$ 上的最细拟一致. 那么由 [22] 知 π 是从 $(X, \mathscr{U}_X)$ 到 $(\overline{X}, \mathscr{U}_{\overline{X}})$ 的拟一致连续. 此外, 由引理 5.2.9, $(\overline{X}, \mathscr{U}_{\overline{X}})$ 是双完全的. 因此, 由 [53, 定理 16] 知 π 允许一个拟一致连续延拓 $\overline{\pi} : (\tilde{X}, \tilde{\mathscr{U}_X}) \to (\overline{X}, \mathscr{U}_{\overline{X}})$. 因为 $Y \subset \tilde{X}$, 所以我们能定义从 $(Y \times Y, \mathscr{U}_Y^{-1} \times \mathscr{U}_Y)$ 到 $(\mathbb{R}, \mathscr{U}^\star)$ 的连续映射 d 为 $d(x, y) = \overline{\rho}(\overline{\pi}(x), \overline{\pi}(y))$, 其中 $x, y \in Y$. 显然, d 限制在 X 上与 ρ 是一致的. 因此, X 是拟 P 嵌入 Y.

定理 5.2.11 *设 X 是 Tychonoff 空 Y 的任意 $\tau(\tilde{\mathscr{U}_Y}^*)$ 稠子空间, 若自然映射 $\hat{e}_{X,Y} : FP(X) \to FP(Y)$ 是拓扑嵌入, 那么 X 是拟 P 嵌入 Y.*

证明 设延拓恒等映射 $e_{X,Y}: X \to Y$ 的单同态 $\hat{e}_{X,Y}: FP(X) \to FP(Y)$ 是拓扑嵌入. 因此, 易知我们能把群 $FP(X)$ 等同于由 $FP(Y)$ 的子集 X 产生的子群 $FP(X,Y)$. 记 $\mathscr{G}_X$ 和 $\mathscr{G}_Y$ 分别是 $FP(X)$ 和 $FP(Y)$ 的左拟一致. 因为 $FP(X)$ 是 $FP(Y)$ 的子群, 所以 $\mathscr{G}_Y \mid FP(X) = \mathscr{G}_X$. 此外, 由引理 5.2.8 有 $\mathscr{G}_X \mid X = \mathscr{U}_X$ 和 $\mathscr{G}_Y \mid Y = \mathscr{U}_Y$. 因此,

$$\mathscr{G}_Y \mid X = \mathscr{G}_Y \mid X = \mathscr{G}_X \mid X = \mathscr{U}_X.$$

那么由引理 5.2.10 知 X 是拟 P 嵌入 Y.

问题 5.2.12 *设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的任意 $\tau(\tilde{\mathscr{U}_Y}^*)$ 稠子空间. 若 X 是拟 P 嵌入 Y, 那么自然映射 $\hat{e}_{X,Y}: FP(X) \to FP(Y)$ 是拓扑嵌入?*

在 [79] 中, O.V. Sipacheva 证明了若 Y 是 Tychonoff 空间 X 的子空间, 那么 $G(X)$ 的子群 $G(Y,X)$ 与 $G(Y)$ 拓扑同构当且仅当 Y 是 P^* 嵌入 X. 因此, 我们有下列问题:

问题 5.2.13 *设 X 是 Tychonoff 空间 Y 的任意子空间. 那么 $PG(X)$ 的子群 $PG(Y,X)$ 拓扑同构于 $PG(Y)$ 当且仅当 Y 是拟 P^* 嵌入 X?*

参考文献

[1] A.V. Arhangel'skiĭ, *An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts* (in Russian), Dokl Akad Nauk SSSR, **126**(1959), 239–241.

[2] A.V. Arhangel'skiĭ, *Mappings and spaces*, Russian Math. Surveys, **21**(1966), 115–162.

[3] A.V. Arhangel'skiĭ, *On biradial topological spaces and groups*, Topology Appl., **36**(1990), 173–180.

[4] A.V. Arhangel'shiĭ, W. Just, E.A. Rezniczenko, P.J. Szeptycki, *Sharp bases and weakly uniform bases versus point-countable bases*, Topology Appl., **100**(2000), 39–46.

[5] A.V. Arhangel'skiĭ, *D-space and covering properties*, Topology Appl., **146-147**(2005), 437–449.

[6] A.V. Arhangel'skiĭ, *Remainders in compactification and generalized metrizability properties*, Topology Appl., **150**(2005), 79–90.

[7] A.V. Arhangel'skiĭ, *More on remainders close to metrizable spaces*, Topology Appl., **154**(2007), 1084–1088.

[8] A.V. Arhangel'skiĭ, *First countability, tightness and other cardinal invariants in remainders of topological groups*, Topology Appl., **154**(2007), 2950–2961.

[9] A.V. Arhangel'skiĭ, *Two types of remainders of topological groups*, Comment. Math. Univ. Carolin., **49**(2008), 119–126.

[10] A.V. Arhangel'skiĭ, M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press and World Sci., 2008.

[11] A.V. Arhangel'skiĭ, *A study of remainders of topological groups*, Fund. Math., **203**(2009), 165–178.

[12] A.V. Arhangel'skiĭ, *The Baire property in remainders of topological groups and other results*, Comment. Math. Univ. Carolin., **50(2)**(2009), 273–279.

[13] A.V. Arhangel'skiĭ, M.M. Choban, *On remainders of rectifiable spaces*, Topology Appl., **157**(2010), 789–799.

[14] A.V. Arhangel'skii, V. Ponomarev, *Fundamentals of General Topology in Problems and Exercises*, Reidel. Dordrecht, 1984 (translated from Russia).

[15] B. Alleche, A.V. Arhangel'skiĭ, J. Calbrix, *Weak developments and metrization*, Topology Appl., **100**(2000), 23–38.

[16] I. D. Arandjelović, *A note on the Sorgenfrey line*, Filomat, **15(4)**(2001), 211–214.

[17] A. Bouziad, *Continuity of separately continuous group actions on p-spaces*, Topology Appl., **71**(1996), 119–124.

[18] D. Basile, A. Bella, *About remainders in compactifications of homogeneous spaces*, Comment. Math. Univ. Carolin., **50(4)**(2009), 607–613.

[19] D.K. Burke, E.A. Michael, *On certain point-countable covers*, Pacific J. Math., **64**(1976), 79–92.

[20] D.K. Burke, *Covering properties*, K. Kunen, J. E. Vaughan eds., Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, (1984)406-407.

[21] G. Birkhoff, *A note on topological groups*, Comput. Math., **3**(1936), 427–430.

[22] G. Brümmer, *Natural extensions of the T_0-spaces, their idempotency, and the quasi-uniform biconplete*, Sum Topo 2001, Sixteenth Summer Conference on Topology and its Applications, July, 18–21, 2001.

[23] H. Bennett, *Quasi-developable spaces*, General Topology Appl., **1**(1971), 253–262.

[24] H. Bennett, R. Byerly, D. Lutzer, *Compact G_δ sets*, Topology Appl., **153**(2006), 2169–2181.

[25] R.H. Bing, *Metrization of topological spaces*, Canad J Math., **3**(1951), 175–186.

[26] T. Banakh, L. Zdomskyǐ, *The topological structure of (homogeneous) spaces and groups with countable cs^*-character*, Appl. Gen. Topology, **5(1)**(2004), 25–48.

[27] J. Ceder, *Some generalizations of metric spaces*, Pacific J Math., **11**(1961), 105–125.

[28] M.M. Čoban, *The structure of locally compact algebras*, Serdica, **18**(1992), 129–137.

[29] E.K. Douwen, W.F. Pfeffer, *Some properties of the Sorgenfrey line and related spaces*, Pacific J. Math., **81**(1979), 371–377.

[30] B.A. Efimov, *Mappings and imbeddings of dyadic spaces*, Math. USSR. Sbornik, **32**(1977), 45–57.

[31] R. Engelking, A. Pelczyński, *Remarks on dyadic spaces*, Coll. Math, **11**(1963), 55–63.

[32] R. Engelking, *General Topology* (revised and completed edition), Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[33] P. Fletcher, W.F. Lindgren, *Quasi-uniform spaces*, Marcel Dekker, New York, 1982.

[34] S.P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fund Math., **57**(1965), 107–115.

[35] A.S. Gul′ko, *Rectifiable spaces*, Topology Appl., **68**(1996), 107–112.

[36] D. Gale, *Compact sets of functions and function rings*, Proc Amer Math. Soc., **1**(1950), 303–308.

[37] G. Gruenhage, E. Michael, Y. Tanaka, *Spaces determined by point-countable covers*, Pacific J. Math., **113**(1984), 303–332.

[38] G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, In: K. Kunen, J. E. Vaughan(Eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1984, pp. 423–501.

[39] J. Gerlits, *On subspaces of dyadic compacta*, Studia Sci. Math. Hungarica, **11**(1976), 115–120.

[40] J. Guthrie, *A characterization of* $\aleph_0$*-spaces*, General Topology Appl., **1**(1971), 105–110.

[41] J. Guthrie, *Mapping spaces and cs-networks*, Pacific J Math, **47**(1973), 465–471.

[42] J. Hagler, *On the structure of* S *and* $C(S)$ *dyadic*, Trans. Amer. Math. Soc., **214**(1975), 415–428.

[43] M. Henriksen, J. Isbell, *Some properties of compactifications*, Duke Math. J., **25**(1958), 83–106.

[44] R.E. Hodel, *Metrizability of topological spaces*, Pacific J. Math., **55**(1974), 441–459.

[45] H.J. Junnila, Y.Z. Qiu, $\aleph$*-spaces and spaces with a* σ*-hereditarily closure-preverving* k*-network*, Topology Appl., **44**(1992), 209–215.

[46] S. Kakutani, *Über der Metrization der Topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **12**(1936), 82–84.

[47] C. Liu, *Remainders in compactification of topological groups*, Topology Appl., **156**(2009), 849–854.

[48] C. Liu, S. Lin, *Generalized metric spaces with algebraic structures*, Topology Appl., **157**(2010), 1966–1974.

[49] F.C. Lin, R.X. Shen, *On rectifiable spaces and paratopological groups*, Topology Appl., **158**(2011), 597–610..

[50] S. Lin, Generalized Metrizable Spaces and Mappings (2nd edition), China Science Press, Beijing, 2007 (in Chinese).

[51] S. Lin, *Point-countable Covers and Sequence-covering Mappings*(in Chinese): Science Press, Beijing, 2002.

[52] S. Lin, Y. Tanaka, *Point-countable k-networks, closed maps, and related results*, Topology Appl., **59**(1994), 79–86.

[53] W.F. Lindgren, P. Fletcher, *The construction of the pair completion of a quasi-uniform space*, Canad. Math. Bull., **21**(1978), 53–59.

[54] A.A. Markov, *On free topological groups*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **31**(1941), 299–301.

[55] H. Martin, *Metrizability of M-space*, Canad. J. Math., **4**(1973), 840–841.

[56] J. Novák, *On the cartesian product of two compact spaces*, Fund. Math., **40**(1953), 106–112.

[57] E. Nummela, *Uniform free topological groups and Samuel compactifications*, Topol. Appl., **13**(1982), 77–83.

[58] J. Nagata, *On a necessary and sufficient condition of metrizability*, J Inst Polyt Osaka City Univ, **1**(1950), 93–100.

[59] P. Nickolas, *Free topological groups and free products of topological groups*, PhD thesis (University of New South Wales, Australia), 1976.

[60] T. Nogura, D. Shakhmatov, *Amalgamation of convergent sequences in locally compact groups*, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie 1, **320**(1995), 1349–1354.

[61] N.M. Pyrch, *On isomorphisms of the free paratopological groups and free homogeneous spaces I*, Ser. Mech-Math., **63**(2005), 224–232.

[62] N.M. Pyrch, A.V. Ravsky, *On free paratopological groups*, Matematychni Studii, **25**(2006), 115–125.

[63] N.M. Pyrch, *Free products of paratopological groups and free paratopological groups*, in print.

[64] P. O′Meara, *A new class of topological spaces*, University of Alberta Dissertation, 1966.

[65] P. O′Meara, *On paracompactness in function spaces with the compact-open topology*, Proc. Amer. Math. Soc., **29**1971, 183–189.

[66] V. Pestov, *Some properties of free topological groups*, Moscow Univ. Math. Bull., **37**(1982), 46–49.

[67] D.A. Raĭkov, *On the Weil completion of topological groups*, Izv. Akad. Nauk. SSSR, **10**(1946), 513–528.

[68] S. Romaguera, M. Sanchis, M.G. Thackenko, *Free paratopological groups*, Topology Proceedings, **27**(2002), 1–28.

[69] S. Romaguera, S. Salbany, *Quasi-metrizable spaces with a bicomplete structure*, Extracta Mathematicae, **7**(1992), 99–102.

[70] W. Roelke, S. Dierolf, *Uniform Structures on Topological group and Their Quotients*, McGraw-Hill, New York, 1981.

[71] A. Shibakov, *Metrizablity of sequential toplogical groups with point-countable k-networks*, Proc. Amer. Math. Soc., **126**(1998), 943–947.

[72] A.R. Singal, *Remarks on separation axioms*, In: Stanley P. Franklin and Zdeněk Frolík and Václav Koutník (eds.): General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra, Proceedings of the Kanpur topological conference, 1968. Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Praha, (1971), 265–296.

[73] B. Šapirovskiĭ, *On separability and metirzability of spaces with Souslin's condition*, Soviet Math. Doke., **13**(1972), 1633–1638.

[74] B. Šapirovskiĭ, *On π-character and π-weight of compact Hausdorff spaces*, Soviet Math. Doke., **16**(1975), 999–1003.

[75] B. Šapirovskiĭ, *Maps onto Tykhonov cubes*, Uspekhi Matem. Nauk (in Russian), **35(3)**(1980), 122–130. In English: Russian Math. Surveys, **35(3)**(1980), 145–156.

[76] D. Shakhmatov, *A direct proof that every infinite compact group G contains $\{0,1\}^{\omega(G)}$*, Annals New York Academy of Sciences, **728**(1994), 276–283.

[77] F. Siwiec, *Sequence-covering and countably bi-quotient mappings*, General Topol. Appl., **1**(1971), 143–154.

[78] F. Siwiec, *On defining a space by a weak base*, Pacific J Math, **52**(1974), 233–245.

[79] O.V. Sipacheva, *Free topological groups of spaces and their subspaces*, Topol. Appl., **101**(2000), 181–212.

[80] Yu. Smirnov, *On metrization of topological spaces* (in Russian), Uspechi Mat Nauk, **6(6)**(1951), 100–111.

[81] M.G. Tkachenko, *On the Souslin property in free topological groups over compact Hausdorff spaces*, Mat. Notes, **34**(1983), 790–793.

[82] H. Terasaka, *On cartesian product of compact spaces*, Osaka Math. J., **4**(1952), 11–15.

[83] M.G. Thackenko, *On the completeness of free Abelian topological groups*, Soviet Math. Dokl., **27**(1983), 341–345.

[84] V.V. Uspenskij, *Pseudocompact spaces with a σ-point-finite base are metrizable*, Comments. Math. Univ. Carolin., **25**(1984), 261–264.

[85] V.V. Uspenskij, *The Mal′tsev operation on countably compact spaces*, Comments. Math. Univ. Carolin., **30**(1989), 395–402.

[86] V.V. Uspenskij, *Topological groups and Dugundji compacta*, Mat. Sb. **180**(1989), no. 8, 1092–1118 (Russian); English transl. in: Math. USSR-Sb. **67**(1990), no. 2, 555–580.

[87] P.F. Yan, S. Lin, *Point-countable k-network and α_4-space*, Topology Proc., **24**(1999), 345–354.

作者攻读博士学位期间的工作目录

1 . Fucai Lin, Rongxin Shen, *On rectifiable spaces and paratopological groups*, Topology Appl., **158** (2011), 597–610. (SCI 收录刊物)

2 . Fucai Lin, Shou Lin, *Some weak versions of the M_1-spaces*, Topology Appl., **158** (2011), 1019–1024. (SCI 收录刊物)

3 . Fucai Lin, Rongxin Shen, *A note on supercomplete spaces*, Acta Math. Hungar, **123(3)** (2009), 229–232. (SCI 收录刊物)

4 . Fucai Lin, Shou Lin, *pseudobounded or ω-pseudobounded paratopological groups*, Filomat, **25(3)** (2011), 93–103. (SCI 收录刊物)

5 . Fucai Lin, Shou Lin, *Uniform bases at non-isolated points and maps*, Houston J. Math., **37(2)** (2011), 677–688. (SCI 收录刊物)

6 . Fucai Lin, Shou Lin, *π-metrizable spaces and strongly π-metrizable spaces*, Houston J. Math., accepted. (SCI 收录刊物)

7 . Fucai Lin, Shou Lin, *Regular bases at non-isolated points and metrization theorems*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, accepted. (SCI 收录刊物)

8 . Fucai Lin, *Local properties on the remainders of the topological groups*, Kodai Mathematical Journal, accepted. (SCI 收录刊物)

9 . Fucai Lin, Shou Lin, *On sequence-covering boundary compact maps of metric space*, 数学进展, **39(1)** (2010), 71–78.

10 . Fucai Lin, Rongxin Shen, *Some notes on σ-point-discrete sn-networks*, 数学进展, **39(2)** (2010), 212–216.

11 . Fucai Lin, Shou Lin, *Uniform covers at non-isolated points*, Topology proceedings, **32** (2008), 259-275.

12 . Fucai Lin, Shou Lin, *Open uniform (G) at non-isolated points and maps*, Questions and Answers in General topology, **28** (2010), 147–156.

13 . Fucai Lin, Shou Lin, *Maps on submetrizable spaces*, Questions and Answers in General topology, **28** (2010), 203–217.

14 . 林福财, *LF* 拓扑空间中的序列连通性, 模糊系统与数学, **23(1)** (2009), 76–79.

15 . Fucai Lin, *σ-point-discrete cs^*-networks and wcs^*-networks*, Journal of Advanced Research in Pure Mathematics, **2(3)** (2010), 7–12.

16 . Fucai Lin, *wb-compact spaces and locally wb-compact spaces*, Advanced Research in Pure Mathematics., **3(1)** (2011), 96–103.

17 . Kedian Li, Fucai Lin, *quasi-pseudo-metrization and pairwise weak base g-functions*, Topology Proc., accepted.

18 . Fucai Lin, Shou Lin, *About remainders in compactifications of paratopological groups*, submitted.

19 . Fucai Lin, Shou Lin, *Sequence-covering maps on generalized metric spaces*, submitted.

20 . Fucai Lin, Shou Lin, *Some notes on closed sequence-covering maps*, submitted.

21 . Fucai Lin, Chuan Liu, Shou Lin, *A note on rectifiable spaces*, submitted.

22 . Fucai Lin, *Topological monomorphism between free paratopological groups*, submitted.

23 . Fucai Lin, Shou Lin, *The inductive limits and generalized metric properties of paratopological vector spaces*, submitted.

声　明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得四川大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

本学位论文成果是本人在四川大学读书期间在导师指导下取得的，论文成果归四川大学所有，特此声明。

导师＿＿＿＿＿＿＿＿

作者＿＿＿＿＿＿＿＿

二零一一年三月二十五日

致　谢

本文是在导师林寿教授的悉心指导下完成的. 三年来林老师在学习和生活等方面都给予了我很大的鼓励和支持, 作者在此表示真挚的感谢.

感谢四川大学数学学院刘应明院士、张树果教授、张德学教授对我的指导和关心!

感谢漳州师范学院李进金院长, 李克典教授对我在读博期间给予的帮助和指导!

感谢刘川教授对我论文指导和帮助!

感谢与沈荣鑫博士有益的探讨和四川大学同学的帮助与支持!

感谢漳州师范学院的领导和同事们对我在外求学期间的支持.

感谢我的家人特别是我的爱人王欢对我的支持!