目　　录

摘 要

本文主要研究度量空间的边界紧映象的空间. 证明了度量空间上的序列覆盖边界紧映射是 1 序列覆盖映射; 并对度量空间上的序列商或序列覆盖边界紧映射进行研究, 得到了具有点可数 sn 网的空间和 snf 可数空间的刻画. 本文还通过引进关于非孤立点一致基的概念, 得到空间 X 是度量空间的开边界紧映象当且仅当空间 X 具有关于非孤立点的一致基, 同时讨论具有关于非孤立点一致基空间与度量空间的伪开边界紧映象的空间、具有点可数基的空间以及一些广义度量空间的关系, 主要得到了 (1) 空间 X 具有关于非孤立点 σ 不相交基当且仅当 X 是度量空间的边界至多 1 的开映象; (2) 一致基空间的离散化是一致基空间的开紧且边界至多 1 映射的映象.

关键词: 序列覆盖映射; 度量空间; 关于非孤立点的一致基; 边界紧映射; 离散化空间; 点可数集族

Abstract

This paper mainly discuss the spaces under the boundary compact image of metric spaces. It is shown that each sequence-covering and boundary compact map on a metric space is 1-sequence-covering. It is also studied the image of sequentially quotient(sequence-covering), boundary compact image of a metric space, and obtain the characeters of space with a point countable sn-network and snf-countable space. The concept of space with an uniform base at non-isolated points is introduced. It is shown that X is an open, boundary-compact image of a metric space if and only if X has an uniform base at non-isolated points. Some relationships among the images of metric spaces under open boundary-compact maps, pseudo-open boundary-compact maps, open compact maps, spaces with point-countable base and some generalized spaces are discussed. The following results are obtained:(1) X has a base which is σ-disjoint at non-isolated points if and only if X is an open, at most boundary-one image of a metric space; (2) Each discretizable space of a space with an uniform base is an open compact and at most boundary-one image of a space with an uniform base.

Key Words: sequence-covering mappings; metric spaces; uniform bases at non-isolated points; boundary compact mappings; discretizable spaces; point countable families

第 1 章 引言

点可数覆盖是广义度量空间中引人注目的研究课题, 如: 对具有某种点可数覆盖的拓扑空间进行刻画, 特别是把这种空间刻画为度量空间在某种连续映射的映象. 在 20 世纪 50-60 年代, K. Nagami, I. Ponomarev, A. Okuyama, A. V. Arhangel′skii 等已发现, 覆盖系可以有效地用来构造把可度量空间映满具有这种覆盖系空间的一些自然映射. 特别是在 1960 年 Ponomarev 引进了 Ponomarev 方法 [1], 证明了第一可数空间是某一可度量化空间的开映象及空间 X 具有点可数基当且仅当空间 X 是可度量空间的开 s 映象之后, 拓扑学家们把 Ponomarev 方法一般化, 把空间的各种点可数覆盖刻画为度量空间的各种各样连续映射的映象, 其中对点可数覆盖所确定的广义度量空间理论较为系统地研究的三篇论文分别是 1976 年 D. K. Burke 和 E. A. Michael 的 “On certain point-countable covers”[2], 1984 年 G. Gruenhage, E. A. Michael 和 Y. Tanaka 的 “Spaces determined by point-countable covers”[3] 以及 1987 年 Y. Tanaka 的 “Point-countable covers and k-network”[4]. 1989 年 Y. Tanaka 的论文 [5] 是关于点可数覆盖与度量空间 s 映象的第一篇较为详细的综述报告.

把空间的具有某种点可数覆盖刻画为度量空间的某种连续映射和紧映射的映象方面的结果也不少, 详细请见 [6, 7]. 但是关于如何把空间的具有某种点可数覆盖刻画为度量空间的某种连续映射和边界紧（或边界有限）映射的映象这一方面的结果是比较少. 最近刘川在 [8] 得到了如下的定理 1.1 和 1.2:

定理 1.1 空间 X 是第一可数的 (具有点可数基) 当且仅当空间 X 是可度量空间的伪开边界紧或伪开边界至多为 1(伪开 s 且边界至多为 1 或伪开可数到一且边界至多为 1) 映射的映象.

定理 1.2 空间 X 是弱第一可数的 (具有点可数弱基) 当且仅当空间 X 是可度量空间的商边界紧或商边界至多为 1(商 s 边界至多为 1 或商可数到一且边界至多为 1) 映射的映象.

空间 X 具有一致基 $\Rightarrow$ 空间 X 具有 sharp 基 [9] $\Leftrightarrow$ 空间 X 具有点可数 sharp 基 [10] $\Rightarrow$ 空间 X 具有点可数基 $\Rightarrow$ 空间 X 具有点可数弱基 $\Rightarrow$ 空间 X 具有点可数 sn 网.

这使我们注意到如何用度量空间的某种连续映射和边界紧（边界有限）映射来刻画 sharp 基、点可数基、点可数弱基、点可数 sn 网？空间 X 若是度量空间某种连续映射和边界紧 (边界有限) 映射的映象，则该空间具有什么性质？特别是度量空间的开边界紧或边界有限的映象具有什么样的性质？关于这方面的一些相关结果如下.

定理 1.3[11] 空间 X 具有一致基当且仅当空间 X 是度量空间的开紧映象.

定理 1.4 对于空间 X 下列等价：

(1) 空间 X 具有点可数基;

(2)X 是度量空间的开 s 映象 [1];

(3)X 是度量空间的可数双商 s 映象 [12];

(4)X 是度量空间的紧覆盖开 s 映象 [13];

(5)X 是度量空间的开、可数到一映象 [14];

(6)X 是度量空间的伪开、 s 且边界至多为 1 的映射的映象 [8];

(7)X 是度量空间的伪开、可数到一且边界至多为 1 的映射的映象 [8].

定理 1.5 对于空间 X 下列等价：

(1) 空间 X 具有点可数弱基;

(2)X 是度量空间的 1 序列覆盖商 s 映象 [15];

(3)X 是度量空间的商、边界至多为 1 的 s 映象 [8];

(4)X 是度量空间的商、边界至多为 1 的可数到一映象 [8].

定理 1.6 对于空间 X 下列等价：

(1) 空间 X 具有点可数 sn 网;

(2)X 是度量空间的 1 序列覆盖 s 映象 [15].

关于度量空间上的某种紧映射的研究也不少, 如林寿在文 [16] 和 [17] 中分别证明了：度量空间上的序列覆盖紧映射是 1 序列覆盖映射和度量空间上的序列商紧映射是伪序列覆盖映射. 一个自然的问题是上面的结果中的 “紧映射” 能否减为 “边界紧映射”？本文将给出肯定的答案.

本文的主要结果如下：

定理 1.7 设 $f: X \to Y$ 是边界紧映射, 其中 X 是度量空间. 那么 f 是序列商映射当且仅当 f 是伪序列覆盖映射.

定理 1.8 度量空间的序列覆盖边界紧映射是 1 序列覆盖映射.

定理 1.9 对空间 X, 下列等价:

(1)X 是 snf 可数;

(2)X 是度量空间的序列商、边界至多为 1 的映象;

(3)X 是度量空间的序列商、边界紧的映象;

(4)X 是度量空间的伪序列覆盖、边界紧的映象.

定理 1.10 对空间 X, 下列等价:

(1) X 有点可数 sn 网;

(2) X 是度量空间的 1 序列覆盖、可数到一且边界至多为 1 的映象;

(3) X 是度量空间的序列商、边界至多为 1 的 s 映象.

定理 1.11 对空间 X, 下列等价:

(1)X 是度量空间的开、边界紧映象;

(2)X 具有关于非孤立点的一致基;

(3)X 具有关于非孤立点的点正则基;

(4)X 具有关于非孤立点的点有限的展开.

定理 1.12 设 X 具有关于非孤立点一致基的空间. 那么

(1) X 具有拟展开;

(2) X 具有 ortho 基和 σ-Q 基.

定理 1.13 空间 X 具有关于非孤立点 σ 不相交基当且仅当 X 是度量空间的开、边界至多为 1 的映象.

定理 1.14 一致基空间的离散化是一致基空间的开紧且至多边界 1 映射的映象.

定理 1.15 对空间 X, 下述等价:

(1)X 具有点可数基;

(2)X 是度量空间的可数双商 s 映象;

(3)X 是度量空间的伪开、边界紧的 s 映象;

(4)X 是度量空间的双商、边界至多 1 的可数到一映象.

本文所论空间均是 T_2 的拓扑空间, 映射是连续满映射. 文中未定义的术语与记号见文 [6] 或 [18].

第 2 章 度量空间的序列覆盖边界紧映象

拓扑学家得到了许多关于某种点可数覆盖的有趣刻画. 最近刘川在 [8] 中得到弱第一可数空间和点可数弱基分别是度量空间的某种边界的商映象和度量空间的商边界至多为 1 的 s 映象，这给出了林寿在 [6] 的问题 2.3.18 的肯定回答. 这引起我们对序列覆盖或序列商的边界紧映射的讨论.

2.1 定义与引理

设 P 是拓扑空间 X 的子集. P 称为 X 中点 x 的 *序列邻域*[6], 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 是终留于 P 的. P 称为 X 中的 *序列开集*, 若 P 是 P 中每一点的序列邻域. 空间 X 称为 *序列空间*[19], 若 X 中的每一个序列开集是 X 中的开集. X 称为 $Fréchet$ 空间 [19], 若对于 $x \in \overline{P} \subset X$, P 中存在序列收敛于 X 中的点 x.

定义 2.1.1 设 $\mathcal{P} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{P}_x$ 是空间 X 的覆盖且满足：对于任意 $x \in X$ 有 (a) 若 $U, V \in \mathcal{P}_x$, 则存在 $W \in \mathcal{P}_x$ 使 $W \subset U \cap V$; (b) $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网，即若 $x \in \cap\mathcal{P}_x$, 且 $x \in U \in \tau(X)$, 存在 $P \in \mathcal{P}_x$ 使 $x \in P \subset U$.

(1)$\mathcal{P}$ 称为 X 的 sn 网 [15], 若每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域. X 称为 snf 可数 [6], 若每一 $\mathcal{P}_x$ 是可数的.

(2)$\mathcal{P}$ 称为 X 的 *弱基*[20], 若 $G \subset X$ 使得对于 $x \in G$ 存在 $P \in \mathcal{P}_x$, 有 $P \subset G$, 那么 G 是 X 中的开子集. X 称为 gf 可数 [21], 若每一 $\mathcal{P}_x$ 是可数的.

定义 2.1.2 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网 [22], 若对于 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛 X 中的点 x 且 $x \in U \in \tau(X)$, 存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P \subset U$.

由 [6] 易知对于空间 X 有

(1)gf 可数 $\Leftrightarrow$$snf$ 可数 + 序列空间;

(2) 弱基 $\Rightarrow$$sn$ 网 $\Rightarrow$$cs$ 网;

(3)sn 网 + 序列空间 $\Rightarrow$ 弱基.

定义 2.1.3 设 $f : X \to Y$ 是一映射.

(1)f 是 *紧映射* (*s 映射*), 若对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 中的紧 (可分) 子集;

(2)f 是*边界紧映射 (边界有限映射、至多边界 1 映射)*, 若对每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 中的紧 (有限、至多一点的) 子集;

(3)f 是*商映射*, 若对 Y 中的每一开集 U 有 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的开集;

(4)f 是*伪开映射*, 若 $f^{-1}(y) \subset U \in \tau(X)$, 那么 $y \in \operatorname{Int}(f(U))$;

(5)f 是*序列覆盖映射*[23], 若对 Y 中的收敛序列 $\{y_n\}$, 存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 使得对 $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in f^{-1}(y_n)$;

(6)f 是*序列商映射*[24], 若对 Y 中的收敛序列 $\{y_n\}$, 存在 X 中的收敛序列 $\{x_k\}$ 使得对 $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in f^{-1}(y_{n_k})$;

(7)f 是 *1 序列覆盖映射*[15], 若对每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 使得对 Y 中的收敛序列 $\{y_n\}$, 存在 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且对 $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in f^{-1}(y_n)$;

(8)f 是*伪序列覆盖映射*[3], 若对 Y 中的收敛序列 L, 存在 X 中的紧子集 K 使得 $f(K) = \overline{L}$.

注 上述定义的序列覆盖映射与文 [3] 中定义的序列覆盖映射是不同的，在本文中文 [3] 的序列覆盖映射称为伪序列覆盖映射.

显然，几种覆盖映射有如下的关系：

$$\begin{tikzcd} & & \text{伪序列覆盖映射} \\ \text{1 序列覆盖映射} \arrow[r] & \text{序列覆盖映射} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \text{序列商映射.} \end{tikzcd}$$

引理 2.1.4[24] 设 $f: X \to Y$ 是一映射. 那么

(1) 若 X 是序列空间，则 f 是商映射当且仅当 f 是序列商映射且 Y 是序列空间.

(2) 若 X 是 $Fréchet$ 空间，则 f 是伪开映射当且仅当 f 是序列商映射且 Y 是 $Fréchet$ 空间.

下面的引理给出文 [6] 的问题 3.4.8 的肯定回答且对文 [17] 的定理 2.2 的条件给于实质上的减弱.

引理 2.1.5 设 $f: X \to Y$ 是边界紧映射，其中 X 是度量空间. 那么 f 是序列商映射当且仅当 f 是伪序列覆盖映射.

证明 必要性. 设 f 是序列商映射. 若 $\{y_n\}$ 是收敛于 Y 中点 y_0 的非平凡序

列，则令 $S_1=\{y_0\}\cup\{y_n:n\in\mathbb{N}\}$, $X_1=f^{-1}(S_1)$ 和 $g=f|_{X_1}$. 那么 g 是序列商边界紧映射，从而由引理 2.1.4 的 (2) 知 g 是伪开映射. 设 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\partial g^{-1}(y_0)$ 在 X_1 中递减的邻域基. 则 $\{U_n\cup\mathrm{Int}(g^{-1}(y_0))\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $g^{-1}(y_0)$ 在 X_1 中递减的邻域基. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $V_n=U_n\cup\mathrm{Int}(g^{-1}(y_0))$. 因 $y_0\in\mathrm{Int}(g(V_n))$, 所以存在 $i_n\in\mathbb{N}$ 使得对任意 $i\geq i_n$ 有 $y_i\in g(V_n)$, 从而有 $g^{-1}(y_i)\cap V_n\neq\emptyset$. 不妨设 $1<i_n<i_{n+1}$. 对任意 $j\in\mathbb{N}$, 若 $j<i_1$, 取 $x_j\in f^{-1}(y_j)$; 若 $i_n\leq j<i_{n+1}$, 取 $x_j\in f^{-1}(y_j)\cap V_n$. 令 $K=\partial g^{-1}(y_0)\cup\{x_j:j\in\mathbb{N}\}$. 那么 K 是 X_1 中的紧集且 $g(K)=S_1$. 因此 f 是伪序列覆盖映射.

充分性. 设 f 是伪序列覆盖映射. 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列，则存在 X 中的紧集 K 使得 $f(K)=\overline{\{y_n\}}$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 取 $x_n\in f^{-1}(y_n)$. 显然序列 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$. 所以 f 是序列商映射. □

引理 2.1.6[15] 设 $f:X\to Y$ 是一映射. 设 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中点 x 的递减的网且每一 $f(B_n)$ 是 Y 中 $f(x)$ 的序列邻域. 若 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 $f(x)$, 存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 使得对 $n\in\mathbb{N}$, $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

引理 2.1.7 设 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 是边界有限映射. 则 $g\circ f:X\to Z$ 也是边界有限映射.

证明 对每一 $z\in Z$, $(g\circ f)^{-1}(z)=f^{-1}(g^{-1}(z))=f^{-1}(\partial g^{-1}(z)\cup\mathrm{Int}(g^{-1}(z)))$. 因 $f^{-1}(\mathrm{Int}(g^{-1}(z)))$ 是 X 中的开集且 $\partial g^{-1}(z)$ 是有限集，所以 $\partial(g\circ f)^{-1}(z)\subset\cup\{\partial f^{-1}(y):y\in\partial g^{-1}(z)\}$ 是有限集. □

引理 2.1.8[8] 设 $f:M\to X$ 是 1 序列覆盖 s 映射，其中 M 是度量空间. 若对 X 中每一非孤立点 x 有 $\partial f^{-1}(x)\subset\overline{\mathrm{Int}(f^{-1}(x))}$, 存在 M 的子空间 M_1 使得 $g=f|_{M_1}:M_1\to X$ 是 1 序列覆盖、可数到一且边界至多为 1 的映射.

引理 2.1.9[6] (1)snf 可数空间被 1 序列覆盖映射保持;

(2)gf 可数空间被 1 序列覆盖商映射保持.

引理 2.1.10[25] 空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 具有点可数 cs 网的 gf 可数空间.

2.2 主要结果

在文 [16] 的定理 4.4 证明了：度量空间上的序列覆盖紧映射是 1 序列覆盖映

射. 我们将证明更进一步的结果.

定理 2.2.1 度量空间上的序列覆盖边界紧映射是 1 序列覆盖映射.

证明 设 $f: X \to Y$ 是序列覆盖边界紧映射，其中 X 是度量空间. 对任意 $t_0 \in Y$, 不妨设 t_0 是 Y 中某一非平凡收敛序列 $\{t_k\}$ 的极限点.

因 X 是度量空间，由 [18] 知 X 有基 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ 满足下列条件 (a)-(c):

(a) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_n$ 是 X 的局部有限开覆盖;

(b) 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{B}_n$;

(c)$\{\mathcal{B}_n\}$ 是 X 的一个展开.

设 $\mathcal{P}_n = \{f(B) : B \in \mathcal{B}_n, B\cap\partial f^{-1}(t_0) \neq \emptyset 且\{t_k\}终留于f(B)\} = \{P_\alpha : \alpha \in \Gamma_n\}$.

(d)$\mathcal{P}_n$ 是非空的有限集.

因为 f 是序列覆盖，所以易知 $\mathcal{P}_n$ 是非空的. 又 $\mathcal{B}_n$ 是局部有限的且 $\partial f^{-1}(t_0)$ 是紧集，从而 $\mathcal{P}_n$ 是有限集.

(e) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $f(B) \in \mathcal{P}_n$ 使得 $f(B)$ 是 t_0 的序列邻域且对 $f(B)$ 中每一收敛于 t_0 的序列 K, 存在 B 中的收敛序列 L 使得 $f(L) = K$.

事实上, 对任意 $\alpha \in \Gamma_n$, P_α 或者是 t_0 的序列邻域, 或者不是 t_0 的序列邻域. 设 (e) 不成立，则存在收敛序列 $K_\alpha \to t_0$ 使得 $(K_\alpha \setminus \{t_0\}) \cap P_\alpha = \emptyset$ 或者 $K_\alpha \subset P_\alpha$ 且对 $\mathcal{B}_n$ 中每一元 B 满足 $f(B) = P_\alpha$, 则不存在 B 中收敛序列 L_α 使得 $f(L_\alpha) = K_\alpha$. 令 $K_n = (\bigcup_{\alpha\in\Gamma_n} K_\alpha) \cup \{t_k : k \in \mathbb{N}\}$. 因 Γ_n 是有限集，K_n 收敛于 Y 中的点 t_0. 又 f 是序列覆盖映射，所以存在 X 中收敛序列 L_n 使得 $f(L_n) = K_n$. 从而存在 $B \in \mathcal{B}_n$ 使得 L_n 是终留于 B, 则 $\{t_k\}$ 终留于 $f(B)$ 且 $B \cap \partial f^{-1}(t_0) \neq \emptyset$. 即有 $\alpha \in \Gamma_n$ 使得 $f(B) = P_\alpha$. 所以 $(K_\alpha \setminus \{t_0\}) \cap P_\alpha \neq \emptyset$ 且 B 中存在收敛序列 L 使得 $f(L) = K_\alpha$. 这与假设矛盾.

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 令 $U_n = \{x \in X : 对B \in (\mathcal{B}_n)_x, f(B)不是Y中点t_0的序列邻域\}$

(f) 若 $x \in U_n$, 则 $\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x \subset U_{n+1}$.

若不然，则存在 $p \in \cap(\mathcal{B}_{n+1})_x \setminus U_{n+1}$. 由 U_{n+1} 的定义知存在 $B \in (\mathcal{B}_{n+1})_p$ 使得 $f(B)$ 是 Y 中 t_0 的序列邻域. 取 $B_1 \in (\mathcal{B}_{n+1})_x$, 则 $p \in B \cap B_1$. 又由 (b) 知存在 $B_2 \in \mathcal{B}_n$ 使得 $B \cup B_1 \subset B_2$. 从而 $B_2 \in (\mathcal{B}_n)_x$ 且 $f(B_2)$ 是 Y 中 t_0 的序列邻域. 则 $x \notin U_n$, 矛盾.

(g)$\partial f^{-1}(t_0) \not\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

由 (f) 有 $U_n \subset \bigcup\{\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x : x \in U_n\} \subset U_{n+1}$. 若 $\partial f^{-1}(t_0) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, 那么由 $\partial f^{-1}(t_0)$ 是 X 中的紧集且 $\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x$ 是 X 中的开集，则存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\partial f^{-1}(t_0) \subset U_m$. 由 (e) 知，存在 $\mathcal{B}_m$ 中的元 B 使得 $f(B)$ 是 Y 中 t_0 的序列邻域且 $\partial f^{-1}(t_0) \cap B \neq \emptyset$. 从而 $\emptyset \neq \partial f^{-1}(t_0) \cap B \subset X \setminus U$, 矛盾.

固定点 $x_0 \in \partial f^{-1}(t_0) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 则有

(h) 若 $\{y_i\}$ 是 Y 中收敛于 t_0 的序列，则存在 X 中收敛于 x_0 的序列 $\{x_i\}$ 且对每一 $i \in \mathbb{N}$, 有 $x_i \in f^{-1}(y_i)$.

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 由于 $x_0 \notin U_n$, 存在 $B_n \in (\mathcal{B}_n)$ 使得 $f(B_n)$ 是 Y 中 t_0 的序列邻域. 从而 $\{\mathrm{st}(x_0, \mathcal{B}_n)\}$ 是 X 中 x_0 的递减的局部基且每一 $f(\mathrm{st}(x_0, \mathcal{B}_n))$ 是 Y 中 t_0 的序列邻域. 由引理 2.1.6 知存在 X 中的序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x_0 且对每一 $i \in \mathbb{N}$, 有 $x_i \in f^{-1}(y_i)$.

由上所证知 f 是 1 序列覆盖映射. $\square$

下面我们将给出度量空间上的序列商 (序列覆盖) 边界紧映象的刻画.

定理 2.2.2 对空间 X, 下列等价：

(1)X 是 snf 可数；

(2)X 是度量空间的序列商、边界至多为 1 的映象；

(3)X 是度量空间的序列商、边界紧的映象；

(4)X 是度量空间的伪序列覆盖、边界紧的映象.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 见 [6, 推论 2.3.17]. (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然. 又由引理 2.1.5 知 (3) $\Leftrightarrow$ (4).

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 $f : M \to X$ 是序列商边界紧映射，其中 (M, ρ) 是度量空间. 令 $\mathbf{I}$ 表示空间 X 中的全体孤立点. 对每一 $x \in X \setminus \mathbf{I}$ 和 $n \in \mathbb{N}$, 设 $V_n(x) = \{y \in M : \rho(\partial f^{-1}(x), y) < 1/n\}$. 那么 $\{V_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 M 中 $\partial f^{-1}(x)$ 的邻域基. 令 $\mathcal{B}_x = \{f(\{V_n(x))\}_{n\in\mathbb{N}}$.

设 $\mathcal{B} = \cup\{\mathcal{B}_x : x \in X \setminus \mathbf{I}\} \bigcup \{\{\mathbf{x}\} : \mathbf{x} \in \mathbf{I}\}$. 那么 $\mathcal{B}$ 是空间 X 的 sn 网. 若不然，存在 $x \in X \setminus \mathbf{I}$ 和 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $f(V_m(x))$ 不是 X 中点 x 的序列邻域. 则存在 $X \setminus f(V_m(x))$ 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x. 由 f 是序列商映射，存在 M 中序列 L 收敛于 $\partial f^{-1}(x)$ 中某一点使得 $f(L)$ 是 $\{x_n\}$ 的子序列. 因 L 是终留于 $V_m(x)$, 所以 $f(L)$ 是终留于 $f(V_m(x))$, 矛盾. 即 $\mathcal{B}$ 是 X 的 sn 网，且 X 是 snf 可数. $\square$

由定理 2.2.2, 引理 2.1.4 和引理 2.1.7 我们又可得下述推论.

推论 2.2.3 (1) 每一 snf 可数空间被序列商边界紧映射保持;

(2) 每一 gf 可数空间被商边界有限映射保持.

推论 2.2.4[8] 对空间 X, 下列等价:

(1) X 是 gf 可数;

(2) X 是度量空间的商、边界至多为 1 的映象;

(3) X 是度量空间的商、边界紧的映象.

定理 2.2.5 对空间 X, 下列等价:

(1) X 有点可数 sn 网;

(2) X 是度量空间的 1 序列覆盖、可数到一且边界至多为 1 的映象;

(3) X 是度量空间的序列商、边界至多为 1 的 s 映象.

证明 (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (1) 设 $f: M \to X$ 是序列商的 s 映射且对任意 $x \in X$ 有 $|\partial f^{-1}(x)| \leqslant 1$, 其中 M 是度量空间. 设 $\mathcal{B}$ 是 M 的点可数基且令

$$\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B} : 存在x \in X使得B \cap \partial f^{-1}(x) \neq \emptyset\};$$

$$\mathcal{P} = \{f(B) : B \in \mathcal{B}'\} \bigcup \{\{x\} : x是X中的孤立点\}.$$

因 f 是 s 映射, $\mathcal{P}$ 点可数. 若 x 是 X 的孤立点, 设 $\mathcal{P}_x = \{x\}$; 若 x 是非孤立点, 设 $\mathcal{P}_x = \{f(B) : B \cap \partial f^{-1}(x) \neq \emptyset, B \in \mathcal{B}\}$. 那么 $\mathcal{P} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x$. 为了证明 $\mathcal{P}$ 是 X 的 sn 网, 只必须证对任意 $f(B) \in \mathcal{P}_x$, $f(B)$ 是 X 中非孤立点 x 的序列邻域. 事实上, 由 $\{B \in \mathcal{B} : B \cap \partial f^{-1}(x) \neq \emptyset\}$ 是 M 中单点集 $\partial f^{-1}(x)$ 的局部基且 f 是序列商映射, $f(B)$ 是 X 中点 x 的序列邻域.

(1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\mathcal{P} = \mathcal{F} \cup \{\{x\} : x是X中的非孤立点\}$, 其中 $\mathcal{F}$ 是 X 的点可数 sn 网. 记 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha \in I\}$. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 赋予 $I_i = I$ 离散拓扑且置

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} I_i : \{P_{\alpha_i}\}是X中某点x_\alpha的网\}.$$

定义 $f: M \to X$, 其中 $f((\alpha_i)) = x_\alpha$. 则 M 是度量空间且由文 [6] 的引理 1.3.8 知 f 是 s 映射. 现证 f 是 1 序列覆盖映射. 对任意 $x \in X$, 存在 X 中点 x 的网 $\{P_{\alpha_i}\} \subset \mathcal{F}$ 使得每一 P_{α_i} 是 x 的序列邻域. 置 $\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} I_i$. 那么 $\beta \in f^{-1}(x)$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 设 $B_n = \{(\gamma_i) \in M : 对每一i \leqslant n, \gamma_i = \alpha_i\}$. 那么 $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 M

中点 β 的递减的局部基且 $f(B_n)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 事实上，设 $\gamma=(\gamma_i)\in B_n$, 那么 $f(\gamma)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\gamma_i}\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 则 $f(B_n)\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 另一方面，设 $z\in\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$, 取 X 中点 z 的网 $\{P_{\delta_i}\}$ 使得 $\delta_i=\alpha_i$ 当 $i\leqslant n$. 设 $\delta=(\delta_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}I_i$. 那么 $z=f(\delta)\in f(B_n)$, 因此 $\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}\subset f(B_n)$. 所以 $f(B_n)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$ 是 X 中点 x 的序列邻域. 由引理 2.1.8, f 是 1 序列覆盖映射.

对每一 $n\in\mathbb{N}$, 设 $\pi_n:\prod_{i\in\mathbb{N}}I_i\to I_n$ 是投影映射. 对每一非孤立点 $x\in X$, 置 $V_n=\pi_n^{-1}(\beta_n)\cap M$, 其中 $P_{\beta_n}=\{x\}$. 那么 V_n 是 M 中的开集且 $V_n\subset f^{-1}(x)$. 若 $(\alpha_i)\in\partial f^{-1}(x)$, 那么 $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\alpha_i}=\{x\}$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 定义 $\alpha_i(n)\in I_i$ 如下：若 $i<n,\alpha_i(n)=\alpha_i$; 若 $i\geqslant n,\alpha_i(n)=\beta_i$. 那么对每一 $n\in\mathbb{N}$, $(\alpha_i(n))\in V_n\subset\mathrm{Int}(f^{-1}(x))$, 且在 M 中有 $\lim_{n\to\infty}(\alpha_i(n))=(\alpha_i)$. 因此 $\partial f^{-1}(x)\subset\overline{\mathrm{Int}(f^{-1}(x))}$. 由引理 2.1.8, 存在 M 的子空间 M_1 使得 $g=f|_{M_1}:M_1\to X$ 是 1 序列覆盖，可数到一且 $|\partial f^{-1}(x)|\leqslant 1$ 的映射. □

推论 2.2.6 设 $f:X\to Y$ 是序列商、可数到一且边界至多 1 的映射. 若 X 有点可数 sn 网，则 Y 也有点可数 sn 网.

推论 2.2.7[8] 对空间 X, 下列等价：

(1) X 有点可数弱基;

(2) X 是度量空间的商，可数到一且边界至多为 1 的映象;

(3) X 是度量空间的商，边界至多为 1 的 s 映象.

推论 2.2.8 对空间 X, 下列等价：

(1) X 有点可数 sn 网;

(2) X 是度量空间的 1 序列覆盖 s 映象;

(3) X 是度量空间的序列覆盖、边界紧的 s 映象;

(4) X 是度量空间的 1 序列覆盖、边界紧的 s 映象.

证明 由定理 2.2.5 知 (1) $\Rightarrow$ (4). (4) $\Rightarrow$ (3) 是显然. 由定理 2.2.1 知 (3) $\Rightarrow$ (2). (1) $\Leftrightarrow$ (2) 见 [15, 定理 2.3]. □

推论 2.2.9 对空间 X, 下列等价：

(1) X 有点可数弱基;

(2) X 是度量空间的 1 序列覆盖商 s 映象;

(3) X 是度量空间的序列覆盖边界紧的商 s 映象;

(4) X 是度量空间的 1 序列覆盖边界紧的商 s 映象.

推论 2.2.10 具有点可数 sn 网的空间被 1 序列覆盖可数到一映射保持.

证明 设 $f: X \to Y$ 是 1 序列覆盖，可数到一映射，其中 X 具有点可数 sn 网. 由定理 2.2.5(2), 存在度量空间 M 和 1 序列覆盖，可数到一映射 $g: M \to X$ 使得对每一 $x \in X$ 有 $|\partial g^{-1}(x)| \leqslant 1$. 那么 $h = f \circ g: M \to Y$ 是 1 序列覆盖， s 映射. 由推论 2.2.8, Y 具有点可数 sn 网. □

推论 2.2.11 设 $f: X \to Y$ 是 1 序列覆盖，可数到一映射，其中 Y 是序列空间. 若 X 有点可数弱基，那么 Y 也有点可数弱基.

证明 由引理 2.1.9 和推论 2.2.8, Y 是具有点可数 sn 网的 gf 可数空间. 那么由引理 2.1.10, Y 具有点可数弱基. □

2.3 例子及问题

例 2.3.1 存在空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖，边界紧的商 s 映象. 但 X 不是度量空间的序列覆盖紧映象.

事实上，设 X 为实数集 $\mathbb{R}$ 且赋予点无理扩张拓扑 [26, 例 69]. 那么 X 具有可数基的非亚紧空间. 由推论 2.2.9, X 是度量空间的 1 序列覆盖，边界紧的商 s 映象. 但 X 不是度量空间的序列覆盖紧映象. 若不然，由引理 2.1.4, X 是度量空间的伪开的紧映象. 那么 X 是亚紧空间，矛盾. □

例 2.3.2 存在度量空间 M 和商有限到一映射 $f: M \to X$ 满足如下条件：

(1) X 不具有点可数 cs 网；

(2) X 不是度量空间的序列覆盖 s 映象；

(3) f 不是序列覆盖映射.

满足条件的空间 X 可见 [25, 注 14(2)], 该空间是度量空间 M 的商有限到一映射 f 的映象，但不具有点可数 cs 网. 由 [27, 定理 1.1] 知度量空间的序列覆盖 s 映象的空间具有点可数 cs 网，所以 X 不是度量空间的序列覆盖 s 映象. 从而 f 不是序列覆盖映射. 该例也说明在定理 2.2.5(3) 和推论 2.2.6 中的条件 “边界至多 1” 不能被 “边界有限” 替代. □

例 2.3.3 具有点可数弱基的空间不被 1 序列覆盖的一到一映射所保持.

设 Y 为 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{N}$. 空间 X 代表集 $\beta\mathbb{N}$ 且赋予离散拓扑. 那么 X 是度量空间且由 [18, 推论 3.6.15] 知 Y 不含非平凡的收敛序列. 置 $f = \mathrm{id}_X : X \to Y$ 为恒等映射. 那么 f 是 1 序列覆盖的一到一映射, 但 Y 不具有点可数弱基. □

在本节最后我们提出如下一些问题:

问题 2.3.4 具有点可数 sn 网的空间是否被序列商且至多边界 1 的 s 映射所保持?

问题 2.3.5 具有点可数 sn 网的空间是否被 1 序列覆盖的 s 映射所保持?

问题 2.3.6 设 $f : X \to Y$ 是序列覆盖边界紧映射. 若 X 具有点可数基或是可展空间, 那么 f 是否是 1 序列覆盖映射?

问题 2.3.7 设 X 是度量空间的序列商的 s 映象的 snf 可数的空间. 那么 X 是否是度量空间的序列商边界紧的 s 映象?

问题 2.3.8 度量空间的商紧映象是否是度量空间的商可数到一映象?

第 3 章 关于非孤立点的一致基

本章主要分析拓扑空间的基在非孤立点的性质，引进了关于非孤立点的一致基的概念，并用来刻画度量空间的开边界紧映象．此外，还讨论度量空间的开边界紧映象的空间、度量空间的伪开边界紧映象的空间和具有点可数基的空间的关系．对空间 X, 设 $I(X)=\{x:x\text{是}X\text{的孤立点}\}$ 和 $\mathcal{I}(X)=\{\{x\}:x\in I(X)\}$.

3.1 定义与引理

设 X 为拓扑空间． X 称为亚紧 (仿紧, 亚 *Lindelöf*) 空间 [6], 若 X 的每一开覆盖有点有限的 (局部有限的，点可数的) 开加细覆盖． X 称为具有 G_δ对角线[6], 若 $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ 是 $X\times X$ 中的 G_δ 集． X 称为完备空间[6], 若 X 的每一开子集是 X 中的 F_σ 集.

定义 3.1.1 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的一个基.

(1)$\mathcal{P}$ 称为 X 的一致基[28](关于非孤立点的一致基), 若对任意 (非孤立点)$x\in X$ 和 $(\mathcal{P})_x$ 的可数子集 $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}'$ 是点 x 的邻域基.

(2)$\mathcal{P}$ 称为 X 的点正则基[28](关于非孤立点的点正则基), 若对任意 (非孤立点)$x\in X$ 和 $x\in U\in\tau(X)$, $\{P\in(\mathcal{P})_x:P\not\subset U\}$ 是有限的.

注 在定义中，“关于非孤立点” 表示 “对 X 的每一非孤立点”. 显然, 一致基 (点正则基)⇒ 关于非孤立点的一致基 (关于非孤立点的点正则基), 但反之未必成立，见例 3.3.1.

定义 3.1.2 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的开子集族序列.

(1) $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的拟展开[29], 若对任意 $x\in U\in\tau(X)$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in\mathrm{st}(x,\mathcal{P}_n)\subset U$.

(2) $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的展开[6] (关于非孤立点的展开), 若对每一 (非孤立点)$x\in X$, $\{\mathrm{st}(x,\mathcal{P}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的邻域基.

(3) X 称为 X 的拟可展的 (可展的, 关于非孤立点可展开的), 若 X 具有拟展开 (展开，关于非孤立点的展开).

显然，空间 X 的每一展开是关于非孤立点的展开，但反之不然，见例 3.3.2.

定义 3.1.3 设 $f:X\to Y$ 是映射.

(1) f 是 开映射[6], 若对 X 的任意开集 U, 则 $f(U)$ 是 Y 的开集;

(2) f 是 双商映射 (可数双商映射)[7], 若对任意 $y \in Y$ 和 X 的任意 (可数) 开集族 $\mathcal{U}$ 满足 $f^{-1}(y) \subset \cup\mathcal{U}$, 则存在有限子集 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ 使得 $y \in \mathrm{Int} f(\cup\mathcal{U}')$;

由定义容易看到：开映射 $\Rightarrow$ 双商映射 $\Rightarrow$ 可数双商映射 $\Rightarrow$ 伪开映射 $\Rightarrow$ 商映射.

定义 3.1.4 设 X 为拓扑空间.

(1) 设 $\mathcal{U}$ 是 X 的子集族. $\mathcal{U}$ 称为 X 的 Q(即，内核保持)[30], 若对每一 $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ 有 $\mathrm{Int}(\cap\mathcal{W}) = \cap\{\mathrm{Int}W : W \in \mathcal{W}\}$.

(2) 空间 X 的基 $\mathcal{B}$ 称为 X 的 *ortho* 基[31], 若对每一 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, 则或者 $\cap\mathcal{A}$ 是 X 的开集，或者 $\cap\mathcal{A}$ 是 X 的非孤立的单点集 $\{x\}$, 且 $\mathcal{A}$ 是 x 在 X 中的邻域基. X 是 *proto* 可度量空间[32], 若 X 是具有 ortho 基的仿紧空间.

(3) 空间 X 的基 $\mathcal{B}$ 称为 X 的 *sharp* 基[9], 如果 $\{B_n\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的由互不相同组成的无限集列且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$, 则 $\{\bigcap_{n\leqslant i} B_n : i \in \mathbb{N}\}$ 是点 x 在 X 的局部基.

(4) 空间 X 的基 $\mathcal{B}$ 称为 X 的 BCO(即, 可数序基)[9], 若对任意 $x \in X$, $\{B_i\} \subset \mathcal{B}$ 是严格递减序列，那么 $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的邻域基.

由文 [9, 10, 34] 知

空间 X 具有一致基 $\Rightarrow$ σ 点有限基 $\Rightarrow$ σ-Q 基;

空间 X 的一致基 $\Rightarrow$ sharp 基，可展空间 $\Rightarrow$BCO, G_δ 对角线;

空间具有 Sharp 基 $\Rightarrow$ 具有点可数基.

下面我们看一些引理.

引理 3.1.5 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的基，则下列等价：

(1)$\mathcal{P}$ 是 X 关于非孤立点的一致基;

(2)$\mathcal{P}$ 是 X 关于非孤立点的点正则基.

证明 (2) $\Rightarrow$ (1) 是显然的. 只须证 (1) $\Rightarrow$ (2).

设 $\mathcal{P}$ 是 X 关于非孤立点的一致基. 若存在非孤立点 $x \in X$ 和 X 中包含 x 的开子集 U 使得 $\{P \in (\mathcal{P})_x : P \not\subset U\}$ 是无限的. 取 $\{P_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{P \in (\mathcal{P})_x : P \not\subset U\}$ 且对每一 $n \in \mathbb{N}$, 取 $x_n \in P_n \setminus U$. 那么 $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的邻域基，所以序列 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中的点 x. 从而，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $x_m \in U$, 矛盾. 因此， $\mathcal{P}$ 是 X 关于非孤立点的点正则基. □

引理 3.1.6 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 关于非孤立点的展开. 对任意 $n\in\mathbb{N}$, 如果 $\mathcal{P}_n$ 是 X 中关于非孤立点是点有限的且 $\mathcal{P}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}_n$, 那么 $\mathcal{P}=\mathcal{I}(X)\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n)$ 是 X 关于非孤立点的一致基.

证明 设 x 是 X 的非孤立点且 $\{P_m:m\in\mathbb{N}\}$ 是 $(\mathcal{P})_x$ 的无限子集. 由每一 $\mathcal{P}_n$ 关于非孤立点是点有限的，对每一 $k\in\mathbb{N}$, 存在 $P_{m_k}\in\mathcal{P}_{n_k}$ 使得 $m_k<m_{k+1}$ 且 $n_k<n_{k+1}$. 因 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 关于非孤立点的展开， $\{P_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 X 中点 x 的邻域基，从而 $\{P_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是点 x 的邻域基. 所以 $\mathcal{P}$ 是 X 关于非孤立点的一致基. □

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为*关于非孤立点是点有限的* (*关于非孤立点是点可数的*, *关于非孤立点是不相交的*), 若对 X 中的每一非孤立点 x, x 至多属于 $\mathcal{P}$ 中的有限个元 (可数个元，一个元). 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的展开 (关于非孤立点的展开). $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的*点有限展开*(*关于非孤立点的点有限展开*), 若每一 $\mathcal{P}_n$ 关于 X 中的点是点有限的 (关于 X 的非孤立点是点有限的).

引理 3.1.7 空间 X 具有关于非孤立点的一致基当且仅当 X 具有关于非孤立点的点有限展开.

证明 充分性. 由引理 3.1.6 可得.

必要性. 设 $\mathcal{P}$ 是 X 关于非孤立点的一致基. 由引理 3.1.5, $\mathcal{P}$ 是 X 关于非孤立点的点正则基. 不妨设，若 $P\in\mathcal{P}$ 且 $P\subset I(X)$, 则 P 是单点集.

(a)$\mathcal{P}$ 是 X 中关于非孤立点是点可数的.

若不然, 存在非孤立点 $x\in X$ 使得 $(\mathcal{P})_x$ 是不可数的. 因 $\mathcal{P}$ 是 X 关于非孤立点的点正则基，所以对任意 $y\neq x$ 有 $\{P\in(\mathcal{P})_x:y\in P\}$ 是有限的. 对任意 $n\in\mathbb{N}$，存在 $(\mathcal{P})_x$ 的无限子集 $\{P_n:n\in\mathbb{N}\}$, $x_n\in P_n\setminus\{x\}$ 且 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\operatorname{ord}(x_n,(\mathcal{P})_x)=k$. 由引理 3.1.5, $\{x_n\}$ 收敛于 x. 因 $(\mathcal{P})_x$ 是 X 中点 x 的邻域基，对每一 $i\in\mathbb{N}$, 存在 $F_i\in(\mathcal{P})_x$ 和 $n_i\in\mathbb{N}$ 使得 $\{x_j:j\geqslant n_i\}\subset F_i\subset X\setminus\{x_j:j<n_i\}$. 从而对每一 $i\in\mathbb{N}$ 有 $\operatorname{ord}(x_{n_i},(\mathcal{P})_x)\geqslant i$, 矛盾. 所以 $\mathcal{P}$ 是 X 中关于非孤立点是点可数的.

X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为具有性质 ($\sharp$), 若对任意 $F\in\mathcal{F}\setminus\mathcal{I}(X)$, 那么 $\{H\in\mathcal{F}:F\subset H\}$ 是有限集.

(b) $\mathcal{P}$ 具有 ($\sharp$).

若不然，存在 $F\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{I}(X)$ 和无限子集 $\{P_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{P}\setminus\{F\}$ 使得对每一 $n\in\mathbb{N}$ 有 $F\subset P_n$. 取非孤立点 $x\in F$ 且对每一 $n\in\mathbb{N}$, 取 $x_n\in P_n\setminus F$. 由引理

3.1.5, 显然 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 这与 F 是开集相矛盾.

置

$$\mathcal{P}^m = \{H \in \mathcal{P} : \text{若 } H \subset P \in \mathcal{P}, \text{那么 } P = H\} \bigcup \mathcal{I}(X),$$
$$\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^m) \bigcup \mathcal{I}(X).$$

(c) $\mathcal{P}^m$ 是 X 的开覆盖且关于 X 的非孤立点是点有限的.

由 (b), 对每一 $P \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{I}(X)$, 存在 $H_P \in \mathcal{P}^m$ 使得 $P \subset H_P$. 从而 $\mathcal{P}^m$ 是 X 的开覆盖. 若 $\mathcal{P}^m$ 在 X 的某一非孤立点 x 不是点有限的，那么存在 $(\mathcal{P}^m)_x$ 的无限子集 $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 因 $H_n \not\subset H_1$, 存在 $x_n \in H_{n+1} \setminus H_1$. 从而 $x_n \to x \in H_1$, 矛盾.

(d) $\mathcal{P}'$ 是 X 关于非孤立点的点正则基.

设 $x \in U \setminus I(X)$, 其中 U 是 X 的开集. 那么存在 $V, W \in \mathcal{P}$ 和 $y \in V \setminus \{x\}$ 使得 $x \in W \subset V \setminus \{y\} \subset V \subset U$. 因此， $W \in \mathcal{P}'$. 那么 $\mathcal{P}'$ 是 X 的一个基且是关于非孤立点是正则的.

置 $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^m$ 和对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $\mathcal{P}_{n+1} = [(\mathcal{P} \setminus \bigcup_{i \leqslant n} \mathcal{P}_i) \bigcup \mathcal{I}(X)]^m$. 由 (b), $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$.

(e) $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 关于非孤立点的点有限的展开.

由 (c) 和 (d), 每一 $\mathcal{P}_n$ 在 X 的非孤立点是点有限. 若 $x \in U \setminus I(X)$ 且 U 是 X 中的开集，那么 $\{P \in (\mathcal{P})_x : P \not\subset U\}$ 是有限的，从而存在 $n \in \mathbb{N}$ 使对任意 $x \in P \in \mathcal{P}_n$ 有 $P \subset U$, 即 $\mathrm{st}(x, \mathcal{P}_n) \subset U$. 因此， $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 关于非孤立点的点有限的展开. □

引理 3.1.8[11, 35, 18] 对空间 X, 下列等价：

(1)X 是度量空间的开紧映象；

(2) X 是度量空间的伪开紧映象；

(3) X 具有一致基；

(4) X 具有点正则基；

(5) X 是亚紧的可展空间；

(6) X 具有点有限的展开.

引理 3.1.9 每一伪开边界紧映射是双商映射.

证明 设 $f : X \to Y$ 是伪开边界紧映射. 对每一 $y \in Y$ 和 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$

的开子集族 $\mathcal{U}$, 存在 $\mathcal{U}$ 的有限子集 $\mathcal{U}'$ 使 $\partial f^{-1}(y) \subset \cup\mathcal{U}'$. 不妨设存在 $U \in \mathcal{U}'$ 使得 $U \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$. 因此 $y \in f(U)$. 设 $V = (\cup\mathcal{U}') \cup \mathrm{Int}(f^{-1}(y))$. 那么 $f^{-1}(y) \subset V$. 因 f 是伪开映射， $y \in \mathrm{Int}(f(V)) \subset f((\cup\mathcal{U}') \cup f^{-1}(y)) = f(\cup\mathcal{U}') \cup \{y\} = f(\cup\mathcal{U}')$. 从而 $f(\cup\mathcal{U}')$ 是 Y 中点 y 的邻域. 所以 f 是双商映射. □

3.2 主要结果

在本节将证明具有关于非孤立点一致基的空间可刻画为度量空间的开边界紧映象，并讨论一些相关性质.

定理 3.2.1 对空间 X, 下列等价：

(1)X 是度量空间的开边界紧映象；

(2)X 具有关于非孤立点的一致基；

(3)X 具有关于非孤立点的点正则基；

(4)X 具有关于非孤立点的点有限的展开.

证明 由引理 3.1.5 和引理 3.1.7 可得 (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (4). 设 $f: M \to X$ 是开边界紧映射，其中 M 是度量空间. 由 [18, 5.4.E], 对 M 的每一紧子集 K, 我们可取 M 的开覆盖序列 $\{\mathcal{B}_i\}$ 使得 $\{\mathrm{st}(K, \mathcal{B}_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 M 中的邻域基. 对每一 $i \in \mathbb{N}$, 不妨设 $\mathcal{B}_{i+1}$ 是 $\mathcal{B}_i$ 的局部有限的开加细且令 $\mathcal{P}_i = f(\mathcal{B}_i) \cup \mathcal{I}(X)$. 那么对每一 $i \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_i$ 是 X 的开覆盖. 若 x 是 X 的聚点，则 $\mathrm{Int} f^{-1}(x) = \emptyset$, 从而 $f^{-1}(y) = \partial f^{-1}(x)$ 是 M 中的紧集. 因此由 $\mathcal{B}_i$ 的局部有限性，有 $\{B \in \mathcal{B}_i : B \cap f^{-1}(x) \neq \emptyset\}$ 是有限的，即： $(\mathcal{P}_i)_x$ 是有限的. 这证明了 $\mathcal{P}_i$ 关于非孤立点是点有限的. 下面我们将证 $\{\mathcal{P}_i\}$ 是 X 关于非孤立点的展开. 设 $x \in U \setminus I(X)$, 其中 U 是 X 中的开集. 因 $f^{-1}(x)$ 是紧的，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{st}(f^{-1}(x), \mathcal{B}_m) \subset f^{-1}(U)$. 因此 $\mathrm{st}(x, \mathcal{P}_m) = \mathrm{st}(x, f(\mathcal{B}_m)) \subset U$. 所以 $\{\mathcal{P}_i\}$ 是 X 的关于非孤立点的点有限的展开.

(4) $\Rightarrow$ (1). 首先，定义一个度量空间 M 和函数 $f: M \to X$ 如下：设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 关于非孤立点的点有限的展开. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 不妨设 $\mathcal{I}(X) \subset \mathcal{P}_n$, 置 $\mathcal{P}_n = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda_n\}$ 且赋予 Λ_n 离散拓扑. 置

$$M = \{\alpha = (\alpha_n) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n : \{P_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}\text{是}X\text{中某点}x_\alpha\text{的邻域基}\}.$$

那么 M 是乘积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$ 的子空间, 所以 M 是度量空间. 定义函数 $f:M\to X$, $f((\alpha_n))=x_\alpha$. 那么 $f((\alpha_n))=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}P_{\alpha_n}$, 即 f 的定义是合理的. $(f,M,X,\mathcal{P}_n)$ 称为 Ponomarev 系. 下面我们将证 f 是开边界紧映射.

(a) f 是一映射.

设 $\alpha=(\alpha_n)\in M$ 且 $f(\alpha)=x\in U$, 其中 U 是 X 中的开集. 那么存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $P_{\alpha_m}\subset U$. 置 $V_m=\{\beta\in M:\beta$ 的第 m 个坐标分量是 $\alpha_m\}$. 那么 V_m 是 M 中的开集, $\alpha\in V_m$ 和 $f(V_m)\subset P_{\alpha_m}\subset U$. 因此 f 是连续的. 对任意 $x\in X,n\in\mathbb{N}$, 存在 $\alpha_n\in\Lambda_n$ 使得 $x\in P_{\alpha_n}$ 和 $P_{\alpha_n}=\{x\}$ 当 $x\in I(X)$. 那么 $\{P_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 的邻域基. 设 $\alpha=(\alpha_n)$. 那么 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 所以 f 是满射.

(b) f 是开映射.

对任意 $\alpha=(\alpha_n)\in M,n\in\mathbb{N}$, 置

$$B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\{(\beta_i)\in M:\beta_i=\alpha_i \text{ 当 } i\leqslant n\}.$$

那么 $f(B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 事实上，若 $\beta=(\beta_i)\in B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, 那么 $f(\beta)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\beta_i}\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 因此 $f(B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 另一方面，设 $x\in\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 取 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\{P_{\beta_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得

(i) 对每一 $i\in\mathbb{N}$, $x\in P_{\beta_i}\in\mathcal{P}_i$,

(ii) $\beta_i=\alpha_i$ 当 $i\leqslant n$, 且

(iii) $P_{\beta_i}=\{x\}$ 当 $i>n$ 且 $x\in I(X)$.

令 $\beta=(\beta_i)$. 那么 $\beta\in B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 且 $f(\beta)=x$. 从而 $\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}\subset f(B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))$.

总之， $f(B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n))=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$. 因 $\{B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n):(\alpha_i)\in M,n\in\mathbb{N}\}$ 是 M 的一个基，所以 f 是开映射.

(c) f 是边界紧映射.

设 $x\in X$. 若 $x\in I(X)$, 那么 $\partial f^{-1}(x)=\emptyset$. 若 $x\notin I(X)$, 那么由 (b) 有 $\partial f^{-1}(x)=f^{-1}(x)$. 对每一 $i\in\mathbb{N}$, 设 $\Gamma_i=\{\alpha\in\Lambda_i:x\in P_\alpha\}$. 则 Γ_i 是有限的. 从而 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 是 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i$ 的紧子集. 我们只须证 $f^{-1}(x)=\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$. 事实上，若 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$, 那么 $\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 中点 x 的邻域基. 从而 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 所以 $\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\subset f^{-1}(x)$. 另一方面，若 $\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$, 那么 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\alpha_i}$ 且

$\alpha \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$. 所以 $f^{-1}(x) \subset \prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$. 因此 $\partial f^{-1}(x) = f^{-1}(x) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ 是紧的.
□

在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$ 中，对每一 $x \in X$ 有 $f^{-1}(x) \subset \prod_{i\in\mathbb{N}}\{\alpha \in \Lambda_i : x \in P_\alpha\}$. 所以有下述推论.

推论 3.2.2 空间 X 具有点可数基是关于非孤立点的一致基当且仅当 X 是度量空间的开边界紧的 s 映象.

推论 3.2.3 开边界有限的映射保持具有关于非孤立点一致基的空间.

证明 设 $f : X \to Y$ 是开且边界有限的映射，其中空间 X 具有关于非孤立点的一致基. 由定理 3.2.1, 存在度量空间 M 和开边界紧映射 $g : M \to X$. 因为 $\partial(f\circ g)^{-1}(y) \subset \cup\{\partial g^{-1}(x) : x \in \partial f^{-1}(y)\}$, 所以 $f \circ g : M \to Y$ 是开且边界紧映射. 从而空间 Y 具有关于非孤立点的一致基. □

定理 3.2.4 设 X 具有关于非孤立点一致基的空间. 那么

(1) X 具有拟展开;

(2) X 具有 ortho 基和 σ-Q 基.

证明 由定理 3.2.1, 设 $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 关于非孤立点的点有限的展开. 置 $\mathcal{P}_0 = \mathcal{I}(X)$. 易验证 $\{\mathcal{P}_n\}_{n\in\omega}$ 是 X 的拟展开.

设 $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$. 那么 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ-Q 基和 ortho 基.

首先，对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ 是内核保持的. 事实上，对每一 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_n$, 若 $x \in \cap\mathcal{A} - I(X)$, 那么 $(\mathcal{P}_n)_x$ 是有限的，从而 $\cap\mathcal{A}$ 是 X 中点 x 的邻域. 所以 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ-Q 基.

其次, 设 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$, 其中 $\cap\mathcal{A}$ 不是 X 中的开集. 那么存在 $x \in \cap\mathcal{A}$ 使得 $\cap\mathcal{A}$ 不是点 x 的邻域, 从而 x 是非孤立点且对每一 $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_n)_x$ 是有限的. 设 $x \in U \in \tau(X)$. 则存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in \mathrm{st}(x, \mathcal{P}_n) \subset U$. 取 $m \geqslant n$ 和 $A \in \mathcal{A}\cap\mathcal{P}_m$. 那么 $A \subset \mathrm{st}(x, \mathcal{P}_n) \subset U$, 从而 $\mathcal{A}$ 是 X 中点 x 的邻域基. 所以 $\cap\mathcal{A}$ 是一单点集. 因此 $\mathcal{P}$ 是 X 的 ortho 基.
□

推论 3.2.5 设 X 是具有关于非孤立点一致基的空间. 考虑下述条件:

(1)X 具有 sharp 基;

(2)X 是可展空间;

(3)$I(X)$ 是 X 中的 F_σ 集.

那么 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

证明 (1) $\Rightarrow$ (3) 的证明见 [29, 定理 3.1]. 因为可展开空间的开子集是 F_σ 集, 所以易得 (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (2). 由定理 3.2.1, 设 $\{\mathcal{B}_n\}$ 是 X 的关于非孤立点的点有限的展开. 因 $I(X)$ 是 F_σ 集, 存在 X 的开子集族序列 $\{G_n\}$ 使得 $X - I(X) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 设 $\mathcal{U}_n = \{G_n\} \bigcup \{\{x\}; x \in X - G_n\}$. 那么 $\{\mathcal{B}_n, \mathcal{U}_n\}$ 是 X 的展开. 因此 X 是可展空间. $\square$

由引理 3.1.8, 可得如下的推论.

推论 3.2.6 空间 X 是度量空间的开紧映象当且仅当 X 是度量空间的开边界紧映象的完备亚紧空间.

由上述推论, 可得到具有关于非孤立点一致基的空间的一些度量化定理. 例如, 设 X 具有关于非孤立点一致基, 那么 X 是可度量化的当且仅当 X 是完备的集态正规空间.

下面我们将考虑度量空间的开边界至多为 1 的映象.

定理 3.2.7 空间 X 具有关于非孤立点 σ 不相交基当且仅当 X 是度量空间的开边界至多为 1 的映象.

证明 充分性. 设 $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ 是 X 的基, 其中对每一 $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_n$ 是关于非孤立点不相交, 不失一般性, 不妨设 $\mathcal{I}(X) \subset \mathcal{B}_n$. 置 $\mathcal{P}_n = \mathcal{B}_n \cup \{X\}$ 和 $\mathcal{P}_n = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda_n\}$ 且赋予 Λ_n 离散拓扑. 一种特殊的 Ponomarev 系定义如下. 如果 $(\prod_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i) \times X$ 中序对 $((\alpha_i), x)$ 满足如下条件 (i) 和 (ii), 那么称 $((\alpha_i), x)$ 是良定义的.

(i) 若 $x \in I(X)$, 那么存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $P_{\alpha_n} = \{x\}$;

(ii) 若 $x \in X \setminus I(X)$, 那么对每一 $n \in \mathbb{N}$, 取

$$P_{\alpha_n} = \begin{cases} X, & \text{if } (\mathcal{B}_n)_x = \emptyset, \\ \cap(\mathcal{B}_n)_x, & \text{if } (\mathcal{B}_n)_x \neq \emptyset. \end{cases}$$

那么 $\{P_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中点 x 的邻域基且点 x 是唯一的. 置

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i : \text{某点} x_\alpha \in X \text{使}((\alpha_i), x_\alpha)\text{是良定义的}\}.$$

那么 M 赋予乘积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}} \Lambda_i$ 的子空间拓扑, 则 M 是度量空间. 定义函数 $f : M \to X$, $f((\alpha_i)) = x_\alpha$. 那么 f 是合理定义的. 下面我们将证 f 是开的边界至多为 1.

对每一 $\alpha=(\alpha_i)\in M$, 设 $f(\alpha)=x$, 那么由 $\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 X 中点 x 的邻域基, 所以 f 在点 x 是连续的. 另一方面, 对每一 $x\in X$, 由 $\mathcal{B}$ 是关于非孤立点 σ 不相交的, 所以存在 $(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Lambda_i$ 使得 $((\alpha_i),x)$ 是良定义的. 那么 $f((\alpha_i))=x$, 因此 f 是满射. 因此 f 是一映射.

f 是开映射的证明类似于定理 3.2.1(b), 故略去. 对每一非孤立点 $x\in X$, 只存在一个序列 $\{P_{\alpha_i}\}$ 使得 $((\alpha_i),x)$ 是良定义的, 因此 $|\partial f^{-1}(x)|=|f^{-1}(x)|=1$. 因此 f 是至多边界为 1 的映射.

必要性. 我们将证每一具有关于非孤立点 σ 不相交基的空间被开边界至多为 1 的映射所保持. 设 $f:M\to X$ 是开边界至多为 1 的映射, 其中 M 有基 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ 使得对每一 $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{B}_n$ 关于 M 中非孤立点不相交. 设 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}f(\mathcal{B}_n)$. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 若 x 是 X 中的非孤立点, 那么 $f^{-1}(x)$ 是一单点集且是 M 中非孤立点集, 因此 $|(f(\mathcal{B}_n))_x|\leqslant 1$. 从而 $\mathcal{P}$ 是 X 的基且关于非孤立点是 σ 不相交的. □

从定理 3.2.7 的必要性的证明可得如下的推论.

推论 3.2.8 具有关于非孤立点的 σ 不相交基的空间被开边界至多为 1 的映射保持.

推论 3.2.9 空间 X 具有点可数的关于非孤立点 σ 不相交基当且仅当 X 是度量空间的开边界至多为 1 的 s 映象.

接下来我们将讨论一种具有关于非孤立点一致基的特殊空间. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间, $A\subset X$. 集合 X 赋予下述拓扑称为关于 A 的离散化 [31]: X 的开集形如 $U\cup K$, 其中 $U\in\mathcal{T},K\subset A$. X 关于 A 的离散化的空间记为 X_A, X_A 也简称为空间 X 的离散化.

显然, 空间 X 的拓扑粗于 X 关于 A 的离散化的拓扑. 若空间 X 具有一致基, 则空间 X_A 既具有 G_δ 对角线, 又具有关于非孤立点的一致基, 而且还有 σ 点有限基. 度量空间的离散化等价于具有 G_δ 对角线的 proto 度量化空间 [32,定理 3.1].

定理 3.2.10 一致基空间的离散化是一致基空间的开紧且至多边界为 1 映射的映象.

证明 设 X 具有一致基. 由引理 3.1.8, 存在 X 中点有限的展开 $\{\mathcal{U}_m\}$, 其中对每一 $m\in\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{m+1}$ 加细 $\mathcal{U}_m$. 对每一 $A\subset X$, 置

$$H=(X\times\{0\})\cup(A\times\mathbb{N});$$

$$V(x,m)=\{x\}\times(\{0\}\cup\{n\in\mathbb{N}:n\geqslant m\}),x\in X,m\in\mathbb{N};$$

$$W(J,m)=((J\cap(X-A))\times\{0\})$$
$$\cup((J\cap A)\times\{n\in\mathbb{N}:n\geqslant m\}),J\subset X,m\in\mathbb{N}.$$

赋予 H 基如下：

$$V(x,m),\forall x\in A,m\in\mathbb{N};$$

$$W(J,m),\forall \text{ 开子集 } J\subset X,m\in\mathbb{N};$$

$$\{x\},x\in A\times\mathbb{N}.$$

那么 H 是 T_2- 空间.

对任意 $m\in\mathbb{N}$, 设

$$\mathcal{P}_m=\{V(x,m):x\in A\}\bigcup\{W(U,m):U\in\mathcal{U}_m\}$$
$$\bigcup\{\{h\}:h\in A\times\{1,2,\cdots,m-1\}\}.$$

那么 $\{\mathcal{P}_m\}_{m\geqslant 2}$ 是 H 的点有限的展开. 因此 H 具有一致基.

设 $\pi_1|_H:H\to X_A$ 是投影映射. 容易证明 $\pi_1|_H$ 是开紧且边界至多为 1 的映射. □

因此每一具有一致基空间的离散化是属于 MOBI 类 [33].

刘川在 [8] 中给出度量空间的商 (伪开) 边界紧映象的刻画. 下面是更进一步的结果.

定理 3.2.11 对空间 X, 下述等价:

(1)X 是第一可数;

(2)X 是度量空间的伪开至多边界为 1(边界紧) 的映象;

(3)X 是度量空间的双商至多边界为 1(边界紧) 的映象.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 见 [8, 推论 2.1]. 由引理 3.1.9 可得 (2) $\Leftrightarrow$ (3). □

定理 3.2.12 对空间 X, 下述等价:

(1)X 具有点可数基;

(2)X 是度量空间的可数双商 s 映象;

(3)X 是度量空间的伪开边界紧的 s 映象;

(4)X 是度量空间的双商边界至多 1, 可数到一映象.

证明 刘川在 [8] 证明了：空间具有点可数基当且仅当 X 是度量空间的伪开边界至多为 1, 可数到一映象. 因此由引理 3.1.9, (1) $\Leftrightarrow$ (4). (4) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. 由

引理 3.1.9, (3) $\Rightarrow$ (2). 由 [36] 可得 (2) $\Leftrightarrow$ (1). □

3.3 例子与问题

在这一节里我们将给出一些例子说明度量空间的边界紧映象的空间与一些广义度量空间之间的关系.

例 3.3.1 设 X 是单位闭区间 $\mathbb{I}=[0,1]$ 和 B 是 X 的伯恩斯坦集. 即: B 是 X 中不包含不可数闭子集的不可数子集. 离散化空间 X_B 称为 *Michael line*[37].

设 X^* 是 X_B 的拷贝且 $f: X_B \to X^*$ 是同胚映射. 置 $Z = X_B \bigoplus X^*$ 且设 Y 是对任意 $x \in X_B \setminus B$, 把 $\{x, f(x)\}$ 等同一点而从 Z 得到的商空间. 那么

(1) 因 X_B 是度量空间 $\mathbb{I}$ 的离散化, 所以是 proto 可度量空间且由定理 3.2.10 知是一致基空间的开紧且边界至多为 1 的映象.

(2) X_B 不是 BCO 空间, 因此不是度量空间的开紧映象;

(3) Y 是度量空间的开边界紧的 s 映象;

(4) 由 [38, 例 1], Y 不具有 G_δ 对角线.

由 X_B 是度量空间 $\mathbb{I}$ 的离散化, X_B 是仿紧空间. 若 X_B 是 BCO, 那么是可展空间, 则 B 是 X_B 中的 F_σ 集, 矛盾. 因此 X_B 不是 BCO 空间.

容易验证 Y 具有点可数基且该点可数基是 Y 的关于非孤立点的一致基. 因此由推论 3.2.2, Y 是度量空间的开边界紧的 s 映象. □

例 3.3.2 设 $\psi(D)$ 是 *Isbell-Mrówka* 空间 [39], 其中 $|D| \geqslant \aleph_0$. 那么

(1) $\psi(D)$ 是度量空间的开边界至多为 1 的映象;

(2) $\psi(D)$ 不是亚 Lindelöf 空间;

(3) 若 $|D| = \aleph_0$, 那么 $\psi(D)$ 是可展空间;

(4) 若 $|D| \geqslant \mathbf{c}$, 那么 $\psi(D)$ 不是完备空间.

D 的无限子集族 $\mathcal{C}$ 称为 *几乎不相交*, 若对任何 $A \neq B \in \mathcal{C}$, $A \cap B$ 是有限的. 设 $\mathcal{A}$ 是 D 的极大几乎不相交族. 那么 $|\mathcal{A}| \geqslant |D|^+$ [40]. $\psi(D)$ 是集 $\mathcal{A} \cup D$ 且赋予下述拓扑称为 Isbell-Mrówka 空间: D 的点取为 $\psi(D)$ 的孤立点; 对 $A \in \mathcal{A}$, A 在 $\psi(D)$ 的邻域基元形如 $\{A\} \cup (A - F)$, 其中 F 是 D 的有限子集合.

设 $X = \psi(D), \mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 和每一 $A_\alpha = \{x(\alpha, n) : n \in \mathbb{N}\}$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置

$$\mathcal{B}_n = \{\{A_\alpha\} \cup \{x(\alpha, m) : m \geqslant n\} : \alpha \in \Lambda\} \bigcup \{\{x\} : x \in D\}.$$

容易验证 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ 是 X 关于非孤立点 σ 不相交的基. 从而由定理 3.2.7 知 X 是度量空间的开边界至多为 1 的映象. 因 X 的开覆盖 $\{\{A_\alpha\}\cup D\}_{\alpha\in\Lambda}$ 没有点可数的开加细, 所以 X 不是亚 Lindelöf 空间. 因此 X 不是度量空间的开 s 映象且由定理 3.2.10 知 X 不是一致基空间的离散化.

若 D 是可数的, 显然 $\psi(D)$ 是可展空间. 因此 $\psi(D)$ 具有 G_δ 对角线, 但由于 $\psi(D)$ 不是亚 Lindelöf 空间, 所以 $\psi(D)$ 不具有点可数基.

若 $|D|\geqslant \mathbf{c}$, 由 [41] 知 $\psi(D)$ 不是可展空间. 由推论 3.2.5 知 $\psi(D)$ 不是完备空间. □

例 3.3.3 存在空间 X 使得

(1) X 具有 sharp 基;

(2) X 没有关于非孤立点的一致基;

(3) X 是具有一致基空间的开紧且可数到一的映象.

在 [9, 例 5.1] 中的空间 X 具有上述的性质, 其中 X 是具有 sharp 基的非可展空间. 因 X 不具有孤立点, 所以 X 不是度量空间的开边界紧的映象且由定理 3.2.1 知不具有关于非孤立点的一致基. J. Chaber 在 [42, 例 4.5] 证明了 X 是具有一致基空间的开紧且可数到一的映象. □

例 3.3.4 存在空间 X 是度量空间的双商至多边界为 1 的映象, 但 X 既不是度量空间的伪开 s 映象, 也不是度量空间的开边界紧映象.

设 $X=\mathbb{R}^2$ 且赋予蝶形拓扑 [43]. 容易看到 X 是第一可数的仿紧空间且没有孤立点. 由 X 是第一可数空间, 那么由定理 3.2.11 知 X 度量空间的双商至多边界为 1 的映象. X 不具有点可数基 [30,例 1.8.3], 由定理 3.2.12 知 X 度量空间的可数双商 s 映象. 又因到第一可数空间的伪开映射是可数双商映射 [36], X 不是度量空间的伪开 s 映象. 若 X 是度量空间的开边界紧映象, 由 X 没有孤立点, 则 X 是度量空间的开紧映象. 由引理 3.1.8 知 X 是可展空间. 因此 X 是可度量的, 矛盾. □

例 3.3.5 存在 proto 可度量空间不具有关于非孤立点的一致基.

G. Gruenhage 在文 [44, p. 363] 构造一 proto 可度量空间 X 不是 γ 空间. 由 [43, 命题 1.7.10] 知 X 不具有 σ-Q 基且由定理 3.2.4 知 X 不具有关于非孤立点的一致基. □

例 3.3.6 存在空间 X 是度量空间的开紧映象, 但不是度量空间开边界至多为

1 的映象.

Y. Tanaka 在文 [45, 例 3.1] 构造一非正则的 T_2 空间 X, 其中 X 是度量空间的开至多二到一的映象. 因 X 不具有孤立点, 所以 X 不是度量空间的开边界至多为 1 的映象. 否则, X 是度量空间的开的一到一的映象, 那么 X 同胚于度量空间, 矛盾. □

问题 3.3.7 设 X 具有点可数基. 若 X 具有关于非孤立点的一致基, 则 X 是否是度量空间的开边界紧的 s 映象？

问题 3.3.8 度量空间的开边界紧的 s 映象是否是度量空间的开边界紧的可数到一映象？

问题 3.3.9 如何用度量空间的映象来刻画具有一致基空间的离散化的空间？例如, 是否一致基空间的开紧且边界至多 1 的映象是一致基空间的离散化？

参考文献

[1] V. I. Ponomarev. Axioms of countability and continuous mappings(in Russian)[J], *Bull Pol Acad Math*, 1960, **8**:127–133

[2] D. K. Burke, E. A. Michael. On certain point-countable covers[J]. *Pacific. J. Math*, 1976, **64(1)**:79–92

[3] G. Gruenhage, E. Michael and Y. Tanaka. Spaces determined by point-countable covers[J]. *Pacific J. Math*, 1984, **113(2)**:303–332

[4] Y. Tanaka. Point-countable covers and k-networks[J]. *Topology Proc*, 1987, **12**:327–349

[5] Y. Tanaka. Metrization II. In:Morita.K, Nagata.J.eds. Topics in General Topology[R]. *Amsterdam:North-Holland*, 1989:275–314

[6] 林寿．点可数覆盖与序列覆盖映射 [M]. 北京：科学出版社， 2002:1–90

[7] 林寿．度量空间与函数空间的拓扑 [M]. 北京：科学出版社， 2004:1–131

[8] C. Liu. A note on point-countable weak base[J]. *Questions and Answers in General Topology*, 2007, **25**:57-61

[9] B. Alleche, A. V. Arhangel'skiĭ, J. Calbrix. Weak developments and metrization[J]. *Topology Appl*, 2000, **100(1)**:23–38

[10] A. V. Arhangel'skiĭ, W. Just, E. A. Renziczenko, P. J. Szeptycki. Sharp bases and weakly unifrom bases versus point-countable bases[J]. *Topology Appl*, 2000, **100(1)**: 39–46

[11] A. V. Arhangel'skiĭ. On mappings of metric spaces (in Russian)[J]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, **145(2)**:245–247

[12] V. V. Filippov. Preservation of the order of a base under a perfect mapping[J]. *Soviet Math Dokl*, 1968, **9**:1005–1007

[13] E. A. Michael, K. Nagami. Compact-covering images of metric spaces[J]. *Proc Amer Math Soc*, 1973, **37**:260–266

[14] C. Liu, S. Lin. On countable-to-one maps[J]. *Topology and its Applications*, 2007, **154(2)**:449–454

[15] 林寿．关于序列覆盖 s 映射 [J]. 数学进展, 1996, **25(6)**:548–551

[16] S. Lin, P. Yan. Sequence-covering maps of metric spaces[J]. *Topology Appl*, 2001, **109(3)**:301–314

[17] S. Lin. A note on sequence-covering mappings[J]. *Acta Math. Hungar*, 2005, **107(3)**:193–197

[18] R. Engelking. General Topology (revised and completed edition)[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989

[19] S. P. Franklin. Spaces in which sequences suffice[J]. *Fund. Math*, 1965, **57**:107-115

[20] A. V. Arhangel'skiĭ. Mappings and spaces[J]. *Russian Math. Surveys*, 1996, **21**:115–

162

[21] F. Siwiec. On defining a space by a weak base[J]. *Pacific J. Math*, 1974, **52(1)**:233–245

[22] J. A. Guthrie. A characterization of $\aleph_0$-spaces[J]. *General Topology Appl*, 1971, **1**:105–110

[23] F. Siwiec. Sequence-covering and countably bi-quotient maps[J]. *General Topology Appl*, 1971, **1**:143–154

[24] J. R. Boone, F. Siwiec. Sequentially quotient mappings[J]. *Czech. Math. J*, 1976, **26**:174–182

[25] S. Lin, Y. Tnanka. Point-countable k-networks, closed maps, and related results[J]. *Topology Appl*, 1994, **59(1)**:79-86

[26] L. A. Steen, J. A. Seebach. Counterexamples in Topology (second edition)[M]. New York: Springer-Verlag, 1978

[27] S. Lin, C. Liu. On spaces with point-countable *cs*networks[J]. *Topology Appl*, 1996, **74(1∼3)**:51-60

[28] P. S. Aleksandrov. On the metrisation of topological spaces (in Russian)[J]. *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys*, 1960, **8**:135–140

[29] Z. Balogh, D. K. Burke. Two results on spaces with a sharp base[J]. *Topology Appl*, 2007, **154**:1281–1285

[30] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京：科学出版社， 1995

[31] W. F. Lindgren, P. J. Nyikos. Spaces with bases satisfying certain order and intersection properties[J]. *Pacific J. Math*, 1976, **66**:455–476

[32] G. Gruenhage, P. Zenor. Proto-metrizable spaces[J]. *Houston J. Math*, 1977, **3**:47–53

[33] H. R. Bennett. On Arhangel'skiĭ's class MOBI[J]. *Proc. Amer. Math. Soc*, 1970, **26**:178–180

[34] C. E. Aull. A survey paper on some base axioms[J]. *Topology Proc*, 1978, **3**:1–36

[35] A. V. Arhangel'skiĭ. Intersection of topologies, and pseudo-open bicompact mappings (in Russian)[J]. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1976, **226**: 745–748

[36] E. A. Michael. A quintuple quotient quest[J]. *General Topology Appl*, 1972, **2**:91–138

[37] E. A. Michael. The product of a normal space and a metric space need not be normal[J]. *Bull. Amer. Math. Soc*, 1963, **69**: 375–376

[38] V. Popov. A perfect map need not preserved a G_δ-diagonal[J]. *General Topology Appl*, 1977, **7**: 31–33

[39] S. G. Mrówka. On completely regular spaces[J]. *Fund. Math*, 1965, **72(9)**:998–1001

[40] K. Kunen. Set Theory: An Introduction to Independence Proofs[M]. Amsterdam: North-Holland, 1980

[41] J. Chaber. Primitive generalizations of σspaces[J]. *Topology. Collog. Math. Soc. János Bolyai, Top. Budapest*, 1978, **23**:259–268

[42] J. Chaber. More nondevelopable spaces in MOBI[J]. *Proc. Amer. Math. Soc*, 1988, **103**:307–313

[43] L. F. McAuley. A relation between perfect separability, completeness, and normality in semimetric spaces[J]. *Pacific J. Math*, 1956, **6**:315–326

[44] G. Gruenhage. A note on quasi-metrizability[J]. *Canad. J. Math*, 1977, **29**:360–366

[45] Y. Tanaka. On open finite-to-one maps[J]. *Bull. Tokyo Gakugei Univ. IV*, 1973, **25**:1–13

致 谢

本论文是我在导师林寿教授的精心指导下完成的. 三年来, 林老师在学习上给我谆谆教诲, 在生活为人处事上给我感触也极深. 林老师的人格魅力深深地感染着我, 他为我今后的学习和生活树立了榜样.

感谢李进金教授和李克典教授对我的教育和培养. 在此谨向两位老师致以诚挚的谢意, 感谢您们对我的关心、指导与帮助.

也感谢给我授课的全体老师, 感谢你们辛勤讲解; 也感谢我的同学, 感谢你们陪我度过三年美好的时光.