漳州师范学院

理学硕士学位论文

关于 Ponomarev 系

黄 丽 霞

漳 州 师 范 学 院

二〇〇八年五月

学校代码：10402　　　　　　　　学　　号：2005042008
分 类 号：　　　　　　　　　　密　　级：

漳州师范学院

理学硕士学位论文

关于 Ponomarev 系

学位申请人 ： 黄丽霞
指 导 教 师： 林寿教授
学 位 类 别： 理学硕士
学 科 专 业： 基础数学
授 予 单 位： 漳州师范学院
答 辩 日 期： 二〇〇八年五月

CODE：10402 NO.：2005042008

U.D.C.: Classified Index:

A Dissertation for the Degree of M. Science

On Ponomarev-systems

Candidate	：Huang Li-xia
Supervisor	：Prof. Lin Shou
Specialty	：Fundamental Mathematics
Academic Degree Applied for	：Master of Science
University	：Zhangzhou Normal University
Date of Oral Examination	：May，2008

漳 州 师 范 学 院

学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的研究成果。除了文中特别加以标注引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律后果由本人承担。

作者签名：__________ 日期：2008 年 5 月 24 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权漳州师范学院可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

本学位论文属于

1、保密□，在______年解密后适用本授权书。

2、不保密□。

（请在以上相应方框内打“√”）

作者签名：________________ 日期：2008 年 5 月 24 日

导师签名：________________ 日期：2008 年 5 月 24 日

目　　录

摘 要

本文分析了三类 Ponomarev 系中映射与子集族之间的关系；讨论了三类 Ponomarev 系之间的简单关系；证明了 (1) 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中， f 是 ss 映射 (cs 映射) 当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数集族 (紧可数集族); (2) 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$ 中，f 是 $msss(mssc)$ 映射当且仅当每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的局部可数集族 (局部有限集族); (3) 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$ 中，f 是 ss 映射 (cs 映射) 当且仅当 $\cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的局部可数集族 (紧可数集族); 另外讨论了 Ponomarev 系中 (P) 映射与子集族的精确关系，其中 P 为覆盖性质；证明了空间 X 具有局部有限网络当且仅当 X 是离散空间.

关键词: Ponomarev 系；局部可数集族；紧可数集族；(P) 映射； $msss$ 映射

Abstract

In this paper the relations between mappings and families of subsets are analyzed in three kind of Ponomarev-systems. The relations of Ponomarev-systems are discussed. It is shown that (1) f is an ss-mapping (cs-mapping) iff $\mathcal{P}$ is a locally countable (compact-countable) collection of X for a Ponomarev-system $(f, M, X, \mathcal{P})$; (2) f is an $msss$-mapping ($mssc$-mapping) iff each $\mathcal{P}_n$ is a locally countable (locally finite) collection of X for a Ponomarev-system $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$; (3) f is an ss-mapping(cs-mapping) iff $\cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ is a locally countable (compact-countable) collection of X for a Ponomarev-system $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$. The precise relations of (P)-mappings (P is a certain covering property) and families of subsets of topological spaces are investigated in Ponomarev-systems. It is shown that a space X has a locally finite network iff X is a discrete space.

Key Words: Ponomarev-systems; locally countable collectiones; compact countable collectiones; (P)-mappings; $msss$-mappings

第 1 章 引言

1960 年 V. Ponomarev[1] 证明了每个第一可数的空间是 Baire 零维空间的某一子空间的开映象. Ponomarev 的基本方法如下：设 $\mathcal{B}$ 是第一可数空间 X 的基. 记 $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 赋予指标集 Λ 离散拓扑，令 $M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \Lambda^\omega : \{B_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 构成 X 中某点 x_α 的邻域基 $\}$, 其中 M 赋予离散空间 Λ 的可数次积空间 Λ^ω(Baire 零维空间) 所诱导的子空间拓扑，则 M 是度量空间. 对于每一 $\alpha = (\alpha_i) \in M$, 可以定义映射 $f : M \to X$ 使得 $f(\alpha) = x_\alpha$. 则 f 是连续的开映射.

1961 年 P. Alexandroff 在布拉格拓扑会议上提出通过映射对空间进行分类的设想 [2], 其核心问题之一是寻求适当的映射类将广义度量空间刻画为确定的度量空间类在这类映射下的象. 具有特定性质的集族是产生广义度量空间的重要途径. 用怎么样的映射恰好能揭示出度量空间与由集族定义的空间之间的规律是困惑人们多年的问题. 在映射理论方面的研究表明商映射、伪开映射、开映射、闭映射、紧覆盖映射、s 映射、紧映射等映射都是探讨 Alexandroff 问题的有力工具. 通过研究人们发现了映射与集族之间有一些必然的联系. 这些工作大部分是利用由 Ponomarev 首创的把确定的广义度量空间表示为 Baire 零维空间的子空间的映象的方法来实现.

过去，Ponomarev 系的功能主要体现于把具有确定集族性质的空间表示为度量空间的映象, 这在空间与映射的理论中发挥了重要的作用 [3]. 近来, 关于 Ponomarev 系研究的一个新动向是从映射出发确定集族所必须具备的性质. 如，在文献 [4,5,6,7,8] 中葛英、林寿等分别讨论了在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 和 $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$ 中映射 f 与空间 X 中网络 $\mathcal{P}$ 和点星网 $\{\mathcal{P}_n\}$ 之间的必然联系. 即在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 和 $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$, 怎样的映射 f 对应具有怎样性质的网络 $\mathcal{P}$ 和点星网 $\{\mathcal{P}_n\}$ 或具有怎样性质的网络 $\mathcal{P}$ 和点星网 $\{\mathcal{P}_n\}$ 对应怎样的映射 f.

林寿在文献 [3] 中列举了关于 Ponomarev 系的系列结果.

定理 1.1[3] 下列结论在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中成立：

(1) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数网络，那么 f 是 s 映射.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cs 网络，那么 f 是序列覆盖， s 映射.

(3) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 sn 网络，那么 f 是 1 序列覆盖， s 映射.

(4) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 so 网络，那么 f 是 2 序列覆盖， s 映射.

(5) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cfp 网络，那么 f 是紧覆盖， s 映射.

(6) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cs^* 网络，那么 f 是序列商 (伪序列覆盖), s 映射.

定理 1.2[3] 下列结论在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$ 中成立：

(1) 若每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的点有限覆盖，那么 f 是紧映射.

(2) 若每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的点可数覆盖，那么 f 是 s 映射.

(3) 若每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 sn 覆盖，那么 f 是 1 序列覆盖映射.

(4) 若每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 so 覆盖，那么 f 是 2 序列覆盖映射.

(5) 若每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cfp 覆盖，那么 f 是紧覆盖映射.

(6) 若每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs^* 覆盖，那么 f 是序列商映射.

一般性的问题是定理 1.1, 定理 1.2 是否可逆？葛英在 [4] 中证明定理 1.1 中的 (1) 的逆命题是成立的.

定理 1.3[4] 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中若 f 是 s 映射，那么 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数网络.

葛英和林寿在 [5] 中讨论删去定理 1.1 的 (2) 、 (3) 中的“点可数”和“ s ”是否成立，回答是否定的，并从 cs 网和 sn 网推广引入 csf 网和 snf 网，得到下面的定理.

定理 1.4[5] 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中

(1) f 是序列覆盖映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的 csf 网络.

(2) f 是 1 序列覆盖映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的 snf 网络.

葛英在 [6] 中讨论删去定理 1.1 中的 (5) “点可数”和“ s ”是否成立，举例说明答案是否定的，并得到下面定理.

定理 1.5[6] 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中 f 是紧覆盖映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的强 k 网络.

例 1.6[6] 存在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 使得 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cfp 网络，但 $\mathcal{P}$ 不是 X 的强 k 网络，所以 f 不是紧覆盖映射.

证明 令 X 是闭序空间 $[0, \omega_1]$, 这里的 ω_1 是第一不可数序数，那么 X 紧，不可度量空间 ([9, 例 43]). 令 $\mathcal{P} = \mathcal{B} \cup \{\{x\} : x \in X\}$, 这里 $\mathcal{B}$ 是 X 的某基，那么 $\mathcal{P}$ 是 X 的网络且对每一 $x \in X$, 存在可数 $\mathcal{P}_x \subset \mathcal{P}$ 使得 $\mathcal{P}_x$ 是 X 中点 x 的网络. 因此, $(f, M, X, \mathcal{P})$ 是一 Ponomarev 系. 因为 $\mathcal{P}$ 包含 X 的一个基. 由 [10, 引理 6], $\mathcal{P}$ 是

cfp 网络. 因为空间 X 是度量空间的紧覆盖映象当且仅当 X 的每一紧子空间可度量化 ([11, 定理 3.4.1]), 所以 X 不是度量空间的紧覆盖映象，由上述定理 1.5 的推论空间 X 是度量空间的紧覆盖映象当且仅当 X 具有强 k 网络，得 X 不含强 k 网络，所以 $\mathcal{P}$ 不是空间 X 的强 k 网络.

葛英在 [4] 中讨论删去定理 1.1 的 (6) 中的“点可数”和“ s ”是否成立，答案是否定的，并从 cs 网和 cs^* 网推广引入 $qcsf$ 网和 cs^*f 网，得到下面的定理.

定理 1.7[4] 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中

(1) f 是伪序列覆盖映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的 $qcsf$ 网络.

(2) f 是序列商映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs^*f 网络.

与定理 1.2 相关，李进金和江守礼在文 [12] 中讨论了局部可数网络和 ss 映射的关系得到下面结论.

定理 1.8[12] 设空间 X 满足 T_2 分离性.

(1) X 是度量空间的强序列覆盖 ss 映象当且仅当 X 具有局部可数 cs 网络.

(2) X 是度量空间的紧覆盖 ss 映象当且仅当 X 具有局部可数 cfp 网络.

(3) X 是度量空间的序列覆盖 (序列商) ss 映象当且仅当 X 具有局部可数的序列有限分解网络.

(4) X 是度量空间的 1 序列覆盖 ss 映象当且仅当 X 具有局部可数 sn 网络.

(5) X 是度量空间的 2 序列覆盖 ss 映象当且仅当 X 具有局部可数 so 网络.

受其启发，我们考虑在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中， ss 映射是否对应局部可数网络 $\mathcal{P}$? 本文的主要内容之一就是围绕这个问题进行讨论. 本文在第 2 章利用在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数网络当且仅当 f 是 s 映射的证明方法，解决了上述问题. 2.1 节先给出三类 Ponomarev 系的定义及性质； 2.2 节讨论在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中一些映射与子集族之间的关系；2.3 节讨论在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$ 和 $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$ 中一些映射与子集族之间的关系；2.4 节讨论一些局部可数集族之间的关系.

Y. Tanaka 和李招文在 [13] 中对确定的覆盖性质 P 定义了 σ-(P) 映射和 (P) 映射，并得到下面定理.

定理 1.9[13] 对空间 X 下面关系等价：

(1) X 具有性质 σ-$(P)cs^*$ 网络 (cs 网络， sn 网络).

(2) X 是度量空间的 σ-(P) 伪序列覆盖 (序列覆盖， 1 序列覆盖) 映象.

本文第 3 章在分析了上述定理证明的构造技巧之基础上，获得了三类 Ponomarev 系中 (P) 映射与子集族的精确关系. 3.1 节讨论在 Ponomarev 系 $(f,M,X,\mathcal{P})$ 中 (P) 映射与子集族之间的关系； 3.2 节讨论在 Ponomarev 系 $(f,M,X,\mathcal{P}_n)$ 和 $(f,M,X,\{\mathcal{P}_n\})$ 中 (P) 映射与子集族之间的关系.

本文得到下述主要结果：

定理 1.10 设 $(f,M,X,\mathcal{P})$ 是 Ponomarev 系，则

(1) f 是 cs 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数集族.

(2) f 是 ss 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数集族.

定理 1.11 设 $(f,M,X,\mathcal{P}_n)$ 和 $(f,M,X,\{\mathcal{P}_n\})$ 是 Ponomarev 系，其中 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$. 则

(1) f 是 cs 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数集族.

(2) f 是 ss 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数集族.

定理 1.12 设 $(f,M,X,\mathcal{P})$ 是 Ponomarev 系，

(1) f 是点有限 (点可数) 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的点有限 (点可数) 网络.

(2) f 是紧有限 (紧可数) 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧有限 (紧可数) 网络.

(3) f 是局部有限 (局部可数) 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部有限 (局部可数) 网络.

定理 1.13 对空间 X, 下述条件相互等价：

(1) X 是某一度量空间的局部有限映象.

(2) X 具有局部有限网络.

(3) X 是离散空间.

定理 1.14 设 $(f,M,X,\mathcal{P}_n)$ 和 $(f,M,X,\{\mathcal{P}_n\})$ 是 Ponomarev 系，其中 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$. 则

(1) f 是点可数映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数网络.

(2) f 是紧可数映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数网络.

(3) f 是局部可数映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数网络.

本文所讨论的空间是满足 T_2 分离性质的拓扑空间，所讨论的映射都是连续的满射.

第 2 章 Ponomarev 系与局部可数集族

本章分析了三类 Ponomarev 系之间的关系并主要围绕 ss 映射与局部可数集族展开讨论. 主要涉及下列问题的讨论：三类 Ponomarev 系有哪些联系？在三类 Ponomarev 系中 f 为 ss 映射对应的网络 $\mathcal{P}$ 具有什么性质？设 $\mathcal{P}$ 为空间 X 的子集族， $x \in X, K \subset X$. 记

$$\mathrm{st}(x, \mathcal{P}) = \cup\{P \in \mathcal{P} : x \in P\},$$

$$(\mathcal{P})_x = \{P \in \mathcal{P} : x \in P\},$$

$$(\mathcal{P})_K = \{P \in \mathcal{P} : K \cap P \neq \emptyset\}.$$

对于积空间 $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, 记 $p_i : \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n \to X_i$ 是投射. 若 $x \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, 记 $x = (x_n)$, 其中 $p_n(x) = x_n$.

2.1 Ponomarev 系的定义及性质

定义 2.1.1[3] 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) 设 $x \in X$ 且 $\mathcal{P}' \subset (\mathcal{P})_x$. $\mathcal{P}'$ 称为点 x 在 X 中的网络，若对 x 在 X 中的每一开邻域 U 总存在 $P \in \mathcal{P}'$, 使得 $x \in P \subset U$. $\mathcal{P}$ 称为 X 的网络，若对于每一 $x \in X$, $(\mathcal{P})_x$ 是 x 在 X 中的网络.

(2) 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的覆盖序列. $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的点星网，若对 $\forall\, x \in X$, $\{\mathrm{st}(x, \mathcal{P}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中点 x 的网络.

林寿 [3] 归纳总结 Ponomarev 的证明方法，命名了三类的 Ponomarev 系.

定义 2.1.2 设 X 是拓扑空间.

(1) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的网络. 记 $\mathcal{P} = \{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 指标集 Λ 赋予离散拓扑，令

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \Lambda^\omega : \{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ 构成 } X \text{ 中某点 } x_\alpha \text{ 的网络 }\}.$$

定义函数 $f : M \to X$, 使得 $f(\alpha) = x_\alpha$. 称 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 为 Ponomarev 系 [3].

(2) 设 X 的子集族 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足，对 $\forall\, x \in X$, 存在 x 的网络 $\{P_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, 其中 $P_{\alpha_n} \in \mathcal{P}_n$. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 记 $\mathcal{P}_n = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda_n\}$ 且赋予 Λ_n 离散拓扑. 令

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n : \{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ 构成 } X \text{ 中某点 } x_\alpha \text{ 的网络 }\}.$$

定义函数 $f : M \to X$, 使得 $f(\alpha) = x_\alpha$. 称 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$ 为 Ponomarev 系 [8].

(3) 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的点星网. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 记 $\mathcal{P}_n = \{P_\beta : \beta \in \Lambda_n\}$ 且赋予 Λ_n 离散拓扑. 令

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n : \{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ 构成 } X \text{ 中某点 } x_\alpha \text{ 的网络 }\}.$$

定义函数 $f : M \to X$, 使得 $f(\alpha) = x_\alpha$. 称 $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$ 为 Ponomarev 系 [3].

提醒读者注意上述定义的 (2) 和 (3) 中记号的区别.

注 定义 2.1.2 中 M 赋予积空间的子空间拓扑，所以是度量空间. 由于 X 是 T_2 空间，所以对 $\alpha = (\alpha_i) \in M$, x_α 是惟一确定的且 $f(\alpha) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_{\alpha_i}$, 所以函数 f 是确切定义的. 对于 (2) 和 (3) 的情形， f 还是连续满射 [3].

虽然 3 类 Ponomarev 系的构造类似，但是不同的集族性质所确定的空间 M 可能是不同的. 此外，易见 3 类 Ponomarev 系的一些简单联系.

(a) 若 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的点星网，则 $\cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足 (2), 于是在各自的 Ponomarev 系 $(f_3, M_3, X, \{\mathcal{P}_n\})$ 和 $(f_2, M_2, X, \mathcal{P}_n)$ 中， $M_3 = M_2$ 且 $f_3 = f_2$.

(b) 若 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 满足 (2), 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的网络，于是在 Ponomarev 系 $(f_2, M_2, X, \mathcal{P}_n)$ 和 $(f_1, M_1, X, \mathcal{P})$ 中， $M_2 \subset M_1$ 且 $f_1|_{M_2} = f_2$. 若更设 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$, 则 $M_2 = M_1$.

由此，第三类的 Ponomarev 系 $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$ 可归结为第二类 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$. 所以就本质而言，关键是第一、第二类 Ponomarev 系的情形.

引理 2.1.3[5] 令 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 为 Ponomarev 系，且 $U = (\prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n) \cap M$, 这里对 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\Gamma_n \subset \Lambda_n$, 那么对每一 $k \in \mathbb{N}$, 有 $f(U) \subset \cup\{P_\beta : \beta \in \Gamma_k\}$.

下面证明一个技术性的引理，其自身也有独立的意义.

引理 2.1.4 设 K 是空间 X 的非空子集. 则

(1) 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中，

(1.1) 若 $K \subset f(M)$, 则 $f^{-1}(K) \subset \{\beta \in \Lambda : P_\beta \cap K \neq \emptyset\}^\omega$.

(1.2) 若 $K \subset f(M)$, 则 $p_n(f^{-1}(K)) = \{\beta \in \Lambda : P_\beta \cap K \neq \emptyset\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$ 和 $(f, M, X, \{\mathcal{P}_n\})$ 中，

(2.1) $f^{-1}(K) \subset \prod_{n\in\mathbb{N}}\{\beta_n \in \Lambda_n : P_{\beta_n} \cap K \neq \emptyset\}$.

(2.2) $p_n(f^{-1}(K)) = \{\beta_n \in \Lambda_n : P_{\beta_n} \cap K \neq \emptyset\}, \forall n \in \mathbb{N}$.

证明 (1) 令 $\Gamma = \{\beta \in \Lambda : P_\beta \cap K \neq \emptyset\}$.

(1.1) 的证明. 设 $b = (\gamma_n) \in f^{-1}(K)$, 则 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_{\gamma_n} = \{f(b)\} \subset K$, 于是对于每

一 $n \in \mathbb{N}$, 有 $P_{\gamma_n} \cap K \neq \emptyset$. 从而 $b \in \Gamma^\omega$. 故 $f^{-1}(K) \subset \Gamma^\omega$.

(1.2) 的证明. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 由 (1.1), $p_n(f^{-1}(K)) \subset \Gamma$. 另一方面, 设 $\beta \in \Gamma$, 那么 $P_\beta \cap K \neq \emptyset$, 于是存在 $x \in P_\beta \cap K$. 由于 $K \subset f(M)$, 存在 $\alpha = (\beta_i) \in M$, 使得 $f(\alpha) = x$, 那么 $\{P_{\beta_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网络. 令 $c_\beta = (\gamma_i)$, 这里 $\gamma_n = \beta$, 当 $i < n$ 时 $\gamma_i = \beta_i$, 且当 $i > n$ 时 $\gamma_i = \beta_{i-1}$. 那么 $\{P_{\gamma_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 也是 x 在 X 中的网络，所以 $c_\beta \in f^{-1}(x) \subset f^{-1}(K)$, 因此 $\beta = p_n(c_\beta) \in p_n(f^{-1}(K))$. 故 $\Gamma \subset p_n(f^{-1}(K))$.

(2) 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 令 $\Gamma_n = \{\beta_n \in \Lambda_n : P_{\beta_n} \cap K \neq \emptyset\}$.

(2.1) 的证明. 设 $b = (\gamma_n) \in f^{-1}(K)$, 则 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_{\gamma_n} = \{f(b)\} \subset K$, 于是对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 有 $P_{\gamma_n} \cap K \neq \emptyset$. 从而 $b \in \prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$. 故 $f^{-1}(K) \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} \Gamma_n$.

(2.2) 的证明. 由 (2.1), $p_n(f^{-1}(K)) \subset \Gamma_n$. 另一方面, 设 $\beta \in \Gamma_n$, 那么 $P_\beta \cap K \neq \emptyset$, 于是存在 $y \in P_\beta \cap K$. 由定义，存在 y 在 X 中的网络 $\{P_{\beta_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, 其中 $P_{\beta_i} \in \mathcal{P}_i$. 令 $c_\beta = (\gamma_i)$, 这里 $\gamma_n = \beta$, 当 $i < n$ 时 $\gamma_i = \beta_i$, 且当 $i > n$ 时 $\gamma_i = \beta_{i-1}$. 那么 $\{P_{\gamma_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 也是 y 在 X 中的网络, 所以 $c_\beta \in f^{-1}(y) \subset f^{-1}(K)$, 因此 $\beta = p_n(c_\beta) \in p_n(f^{-1}(K))$. 故 $\Gamma_n \subset p_n(f^{-1}(K))$. □

2.2 关于 $(f, M, X, \mathcal{P})$

本节主要讨论在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中 f 为 ss 映射、 cs 映射的充分必要条件. 先给出下面定义.

定义 2.2.1 设映射 $f : X \to Y$.

(1) f 称为 ss 映射 [14], 若对每一 $y \in Y$, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V_y, 使得 $f^{-1}(V_y)$ 是空间 X 的可分子集.

(2) f 称为 k 映射 [15], 若空间 Y 的每一紧子集的逆象是空间 X 的紧子集.

(3) f 称为 cs 映射 [16], 若空间 Y 的每一紧子集的逆象是空间 X 的可分子集.

定义 2.2.2[3] 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的点有限 (点可数) 集族，若对于每一 $x \in X$, $(\mathcal{P})_x$ 是有限 (可数) 的.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧有限 (紧可数) 集族, 若对于 X 的每一个紧子集 K, $(\mathcal{P})_K$ 是有限 (可数) 的.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的局部有限 (局部可数) 集族，若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X

中的开邻域 V 使得 $(\mathcal{P})_V$ 是有限 (可数) 的.

利用引理 2.1.4 可得下面结论.

定理 2.2.3 设 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 是 Ponomarev 系，则

(1) f 是 cs 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数集族.

(2) f 是 ss 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数集族.

证明 (1) 的充分性. 由题设，$\mathcal{P}$ 是空间 X 的紧可数网络，由文 [3] 引理 1.3.8, f 是映射. 设 C 是空间 X 的非空紧子集，则 C 仅与 $\mathcal{P}$ 中可数个元相交. 由引理 2.1.4(1.1), $f^{-1}(C)$ 是 M 的可分子空间. 故 f 是 cs 映射.

(1) 的必要性. 设 K 是空间 X 的非空紧子集，则 $f^{-1}(K)$ 是 M 的可分子空间. 取定 $n \in \mathbb{N}$, 则 $p_n(f^{-1}(K))$ 是 Λ 的可分子空间，从而 $p_n(f^{-1}(K))$ 是可数集. 由于 f 是满射，由引理 2.1.4(1.2), $\{\beta \in \Lambda : P_\beta \cap K \neq \emptyset\}$ 是可数集，即 K 仅与 $\mathcal{P}$ 中的可数多个元相关. 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数集族.

(2) 的充分性. 由题设， $\mathcal{P}$ 是空间 X 的局部可数网络，由文 [3] 引理 1.3.8, f 是映射且对每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 V_x, 使得 V_x 仅与 $\mathcal{P}$ 中可数个元相交，由引理 2.1.4(1.1), $f^{-1}(V_x)$ 是 X 的可分子集. 故 f 是 ss 映射.

(2) 的必要性. 设 f 是 ss 映射. 对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 V_x, 使得 $f^{-1}(V_x)$ 在 X 中可分. 由引理 2.1.4(1.2), 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, $p_n(f^{-1}(V_x)) = \{\beta \in \Lambda : V_x \cap P_\beta \neq \emptyset\}$. 由 $f^{-1}(V_x)$ 的可分性， $\{\beta \in \Lambda : V_x \cap P_\beta \neq \emptyset\}$ 是 Λ 的可分子集，从而是可数集，所以 V_x 仅与 $\mathcal{P}$ 中的可数个元相交. 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数集族.
□

推论 2.2.4 对于空间 X, 下面成立：

(1) X 是度量空间的 cs 映象当且仅当 X 具有紧可数网络.

(2) X 是度量空间的 ss 映象当且仅当 X 具有局部可数网络 [22].

回忆序列覆盖映射与序列商映射的定义. 设映射 $f : X \to Y$. f 称为序列覆盖映射 [17], 若 S 是空间 Y 中的任一收敛序列，那么存在 X 中的收敛序列 L, 使得 $f(L)$=S. f 称为序列商映射 [18], 若 S 是空间 Y 中的任一收敛序列，那么存在 X 中收敛序列 L, 使得 $f(L)$ 是 S 的子序列. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖. $\mathcal{P}$ 称为空间 X 的 cs 网络 [19], 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得序列 $\{x_n\}$ 是终于 P 且 $P \subset V$. $\mathcal{P}$ 称为空间 X 的 cs^* 网络 [20], 若 X 中

的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得序列 $\{x_n\}$ 的某子序列是终于 P 且 $P \subset V$.

引理 2.2.5[4] 在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 中，若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数网络，那么下列成立：

(1)f 是序列覆盖映射 $\Leftrightarrow \mathcal{P}$ 是 X 的 cs 网络;

(2)f 是序列商映射 $\Leftrightarrow \mathcal{P}$ 是 X 的 cs^* 网络.

由此，可得下述推论.

推论 2.2.6 设 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 是 Ponomarev 系，则

(1) f 是序列覆盖 cs 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数 cs 网络.

(2) f 是序列商 cs 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数 cs^* 网络.

(3) f 是序列覆盖 ss 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数 cs 网络.

(4) f 是序列商 ss 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数 cs^* 网络.

推论 2.2.7 对于空间 X, 下面成立：

(1) X 是度量空间的序列覆盖 cs 映象当且仅当 X 具有紧可数 cs 网络 [21].

(2) X 是度量空间的序列商 cs 映象当且仅当 X 具有紧可数 cs^* 网络 [21].

(3) X 是度量空间的序列覆盖 ss 映象当且仅当 X 具有局部可数 cs 网络 [22].

(4) X 是度量空间的序列商 ss 映象当且仅当 X 具有局部可数 cs^* 网络 [22].

定理 2.2.8 设 $(f, M, X, \mathcal{P})$ 是 Ponomarev 系. 若 f 是 k 映射，那么 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧有限集族. 此外，空间 X 具有紧有限网络当且仅当 X 的紧子集是有限集.

证明 若 f 是 k 映射，对于 X 的任意非空紧子集 K, 则 $f^{-1}(K)$ 是 M 的紧子空间. 取定 $n \in \mathbb{N}$, 则 $p_n(f^{-1}(K))$ 是 Λ 的紧子集，从而 $p_n(f^{-1}(K))$ 是有限集. 由于 f 是满射，由引理 2.1.4(1.2), $\{\beta \in \Lambda : P_\beta \cap K \neq \emptyset\}$ 是有限集，即 K 仅与 $\mathcal{P}$ 中的有限多个元相交. 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧有限集族.

此外，若空间 X 的紧子集都是有限集，让 $\mathcal{P} = \{\{x\} : x \in X\}$. 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧有限网络. 反之，若 X 具有紧有限网络 $\mathcal{P}$, 让 K 是 X 的任一紧子集，则 $\mathcal{P}|_K$ 是 K 的有限网络. 因为 K 是 T_2 空间，所以 K 是有限集. 故 X 的紧子集是有限集.
□

近来，葛洵已构造例子说明定理 2.2.8 的逆命题不成立.

2.3 关于 $(f,M,X,\mathcal{P}_n)$ 和 $(f,M,X,\{\mathcal{P}_n\})$

上一节讨论了 Ponomarev 系 $(f,M,X,\mathcal{P})$ 的情形, 下面讨论另两种 Ponomarev 系的情况.

定理 2.3.1[4,5,6,7,8] 下列在 Ponomarev 系 $(f,M,X,\{\mathcal{P}_n\})$ 中成立:

(1) f 是 s(紧映射) 映射当且仅当对每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的点可数 (点有限) 覆盖.

(2) f 是序列商映射当且仅当每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs^* 覆盖.

(3) f 是序列覆盖映射当且仅当每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs 覆盖.

(4) f 是 1 序列覆盖映射当且仅当每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 wsn 覆盖.

(5) f 是 2 序列覆盖映射当且仅当每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 so 覆盖.

(6) f 是伪序列覆盖映射当且仅当每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 fcs 覆盖.

(7) f 是紧覆盖映射当且仅当每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 CFP 覆盖.

定理 2.3.2 设 $(f,M,X,\mathcal{P}_n)$ 是 Ponomarev 系，其中 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$. 则

(1) f 是 cs 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数集族.

(2) f 是 ss 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数集族.

证明 由引理 2.1.4(2.1) 得 (1) 的充分性.

(1) 的必要性. 设 f 是 cs 映射. 对于 X 的每一非空紧子集 K, 及每一 $n\in\mathbb{N}$, 由引理 2.1.4(2.2), $p_n(f^{-1}(K))=\{\beta\in\Lambda_n:K\cap P_\beta\neq\emptyset\}$. 由 $f^{-1}(K)$ 的可分性, $\{\beta\in\Lambda_n:K\cap P_\beta\neq\emptyset\}$ 是 Λ_n 的可分子集，从而是可数集，所以 K 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的可数个元相交. 从而 K 仅与 $\mathcal{P}$ 中的可数个元相交. 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数集族.

(2) 的充分性. 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数集族，则每一 $x\in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 V_x, 使得 V_x 仅与 $\mathcal{P}$ 中可数个元相交，于是 V_x 也仅与每一 $\mathcal{P}_n$ 中可数个元相交. 由引理 2.1.4(2.1), $f^{-1}(V_x)$ 是 X 的可分子集. 故 f 是 ss 映射.

(2) 的必要性. 设 f 是 ss 映射. 对于每一 $x\in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 V_x, 使得 $f^{-1}(V_x)$ 在 X 中可分. 由引理 2.1.4(2.2), 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $p_n(f^{-1}(V_x))=\{\beta\in\Lambda_n:V_x\cap P_\beta\neq\emptyset\}$. 由 $f^{-1}(V_x)$ 的可分性, $\{\beta\in\Lambda_n:V_x\cap P_\beta\neq\emptyset\}$ 是 Λ_n 的可分子集，从而是可数集，所以 V_x 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的可数个元相交. 从而 V_x 仅与 $\mathcal{P}$ 中的可数个元相交. 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数集族. □

林寿定义了 $msss$ 映射和 $mssc$ 映射.

定义 2.3.3[23] 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为分层强 s 映射，若存在以 X 为子空间的积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 满足：对任意的 $y \in Y$, 存在 y 在 Y 中的开邻域列 $\{V_i\}$, 使每一 $p_i f^{-1}(V_i)$ 是 X_i 的可分子空间. 如果更设所有的 X_i 是度量空间，那么 f 称为可度量的分层强 s 映射，简记为 $msss$ 映射.

(2) f 称为分层强紧映射，若存在以 X 为子空间的积空间 $\prod_{i\in\mathbb{N}} X_i$ 满足：对任意的 $y \in Y$, 存在 y 在 Y 中的开邻域列 $\{V_i\}$, 使每一 $\mathrm{cl}(p_i f^{-1}(V_i))$ 是 X_i 的紧子空间. 如果更设所有的 X_i 是度量空间，那么 f 称为可度量的分层强紧映射，简记为 $mssc$ 映射.

空间 X 的可数个局部有限 (局部可数) 集族的并称为 X 的 σ 局部有限 (σ 局部可数) 集族.

定理 2.3.4[23] 空间 X 具有 σ 局部可数网络当且仅当 X 是某一度量空间的 $msss$ 映射.

定理 2.3.5[23] 空间 X 具有 σ 局部有限网络当且仅当 X 是某一度量空间的 $mssc$ 映射.

我们讨论了在 Ponomarev 系 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$ 中， f 为 $msss$ 映射和 $mssc$ 映射的充分必要条件.

定理 2.3.6 设 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$ 是 Ponomarev 系，则 f 是 $msss$ 映射 ($mssc$ 映射) 当且仅当每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的局部可数集族 (局部有限集族).

证明 我们仅证明 $msss$ 映射时的情形，对 $mssc$ 映射的情形的证明是类似的.

设 f 是 $msss$ 映射. 由定义 2.3.3(1), 对任意的 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域列 $\{V_n\}$, 使得每一 $p_n(f^{-1}(V_n))$ 是 Λ_n 的可分子空间. 于是 $p_n(f^{-1}(V_n))$ 是可数集. 让 $\Gamma_n = \{\beta \in \Lambda_n : V_n \cap P_\beta \neq \emptyset\}$. 由引理 2.1.4(2.2), $p_n(f^{-1}(V_n)) = \Gamma_n$. 由 Γ_n 的可数性， V_n 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的至多可数个元相交，所以 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的局部可数集族.

反之，设每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的局部可数集族. 对于任意的 $x \in X$, 任意的 $n \in \mathbb{N}$, 存在 x 在 X 中的开邻域 $V_{x,n}$, 使得 $V_{x,n}$ 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的至多可数个元相交. 由引理 2.1.4(2.2), $p_n(f^{-1}(V_{x,n})) = \{\beta_n \in \Lambda_n : P_{\beta_n} \cap V_{x,n} \neq \emptyset\}$, 而 $\{\beta_n \in \Lambda_n : P_{\beta_n} \cap V_{x,n} \neq \emptyset\}$ 是可数集，所以 $p_n(f^{-1}(V_{x,n}))$ 是 Λ_n 的可分子空间. 故 f 是 $msss$ 映射. □

把上述定理应用于序列覆盖映射，序列商映射，类似文献 [4] 推论 3.2, 有下述

推论.

推论 2.3.7 让 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n : n\in\mathbb{N}\}$. 设 $(f,M,X,\mathcal{P}_n)$ 是 Ponomarev 系，则

(1) f 是序列覆盖 $msss$ $(mssc)$ 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ 局部可数 (σ 局部有限)cs 网络.

(2) f 是序列商 $msss$ $(mssc)$ 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ 局部可数 (σ 局部有限)cs^* 网络.

推论 2.3.8 (1) 空间 X 是某一度量空间的序列覆盖 $msss$ $(mssc)$ 映象当且仅当 X 具有 σ 局部可数 (σ 局部有限) 的 cs 网络 [22].

(2) 空间 X 是某一度量空间的序列商 $msss$ $(mssc)$ 映象当且仅当 X 具有 σ 局部可数 (σ 局部有限) 的 cs^* 网络 [22].

定理 2.3.9 设 $(f,M,X,\{\mathcal{P}_n\})$ 是 Ponomarev 系，则

(1) f 是 cs 映射当且仅当 $\cup\{\mathcal{P}_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的紧可数集族.

(2) f 是 ss 映射当且仅当 $\cup\{\mathcal{P}_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的局部可数集族.

证明 由引理 2.1.4(2.1) 得 (1) 和 (2) 的充分性.

(1) 的必要性. 设 f 是 cs 映射. 对 X 的非空紧子集 K 及 $n\in\mathbb{N}$, 令 $\Gamma_n=\{\beta\in\Lambda_n : K\cap P_\beta\neq\emptyset\}$. 由引理 2.1.4(2.2), $p_n(f^{-1}(K))=\Gamma_n$. 因为 $f^{-1}(K)$ 是可分的，所以 Γ_n 是可数的，即 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的紧可数集族. 从而 $\cup\{\mathcal{P}_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的紧可数集族.

(2) 的必要性. 设 f 是 ss 映射. 对于每一 $x\in X$, 存在 x 在 X 中的开邻域 V_x, 使得 $f^{-1}(V_x)$ 在 X 中可分. 由引理 2.1.4(2.2), 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $p_n(f^{-1}(V_x))=\{\beta\in\Lambda_n : V_x\cap P_\beta\neq\emptyset\}$. 那么 $\{\beta\in\Lambda_n : V_x\cap P_\beta\neq\emptyset\}$ 是 Λ_n 的可数子集，所以 V_x 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的可数个元相交. 从而 V_x 仅与 $\cup\{\mathcal{P}_n : n\in\mathbb{N}\}$ 中的可数个元相交. 故 $\cup\{\mathcal{P}_n : n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的局部可数集族. □

注 利用上述一系列结论，不仅仅像推论 2.2.6 和推论 2.3.7, 在序列覆盖映射，序列商映射可获得相应的推论，而且与一些现有结果的结合，可得到关于紧覆盖映射， 1 序列覆盖， 2 序列覆盖等方面的系列结果.

2.4 一些局部可数集族之间的关系

本章最后说明由 Ponomarev 系反映的一些局部可数集族之间的关系. 易验证，

(1) σ 局部有限集族 $\Rightarrow$ σ 局部可数集族 $\Rightarrow$ 紧可数集族 $\Rightarrow$ 点可数集族.

(2) 局部可数集族 $\Rightarrow$ σ 局部可数集族.

(3) 紧可数基 $=$ 点可数基 (见文 [24] 定理 2).

例 2.4.1 局部可数集族.

(1) 点可数 cs 网 $\not\Rightarrow$ 紧可数 cs 网. 见文 [3] 的例 1.5.4.

(2) 紧可数基 $\not\Rightarrow$ σ 局部可数基. 如文 [25] 中的 Michael 直线 X. 由 [25] 知, X 是具有点可数基的不可度量化的仿紧空间, 于是 X 具有紧可数基. 若 X 具有 σ 局部可数基, 由仿紧性及文 [26] 定理 2.1, 可知 X 具有 σ 局部有限基, 从而 X 是可度量空间, 矛盾.

(3) σ 局部可数基 $\not\Rightarrow$ σ 局部有限基, 局部可数基. 如文 [26] 的例 2.5 的空间 X. 由 [26] 知, X 是具有 σ 局部可数基的正则的不可度量化空间, 于是 X 不具有 σ 局部有限基. 由于具有局部可数基的正则空间具有 σ 局部有限基 (利用强仿紧性), 所以 X 也不具有局部可数基.

第 3 章 Ponomarev 系与可数型的 (P) 映射

2003 年 Y. Tanaka 和李招文 [13] 为获得由 k 网络 [27] 确定的空间与度量空间的映射之间的关系，就较广泛的覆盖性质 (P) 定义了 (P) 映射类，把具确定性质的 k 网的空间表示为度量空间在某些 (P) 映射类下的象. 本章主要探讨了各自情形下 f 是 (P) 映射 (P 为覆盖性质) 时的充分必要条件，更加精确地显示了映射与集族的联系，进而能更有效地说明映射与空间的内在规律，丰富了映射与空间的理论.

3.1 关于 $(f,M,X,\mathcal{P})$

定义 3.1.1[13] 设映射 $f:X\to Y$. 设 P 是空间 X 的覆盖性质， f 称为 (P) 映射，若存在 X 的某基 $\mathcal{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 使得集族 $f(\mathcal{B})=\{f(B_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 P 的.

定理 3.1.2 设 $(f,M,X,\mathcal{P})$ 是 Ponomarev 系，那么

(1) f 是点有限 (点可数) 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的点有限 (点可数) 网络.

(2) f 是紧有限 (紧可数) 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧有限 (紧可数) 网络.

(3) f 是局部有限 (局部可数) 映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部有限 (局部可数) 网络.

证明 (1) 的证明类似 (2), 我们只需证明 (2) 和 (3) 括号内的情形.

(2) 充分性. 对 $\forall b=(\beta_n^b)\in M$, 则 $\{P_{\beta_n^b}\}$ 是 X 中点 $f(b)$ 的网络. 令 $U_n^b=\{c=(\gamma_i)\in M:$ 当 $i\leqslant n$ 时 $\gamma_i=\beta_i^b\}$. 容易验证 $\mathcal{B}_b=\{U_n^b:n\in\mathbb{N}\}$ 是 M 中点 b 的邻域基. 则 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_b:b\in M\}$ 是 M 的基. 可证明 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$. 事实上，对 $\forall\ a=(\alpha_n)\in U_n^b$, $f(a)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\alpha_i}\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$. 于是 $f(U_n^b)\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$. 另一方面，若 $x\in\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$, 由 f 满射，存在 $c=(\gamma_i)\in M$ 使得 $x=f(c)$. 令 $a=(\alpha_i)$, 这里当 $i\leqslant n$ 时 $\alpha_i=\beta_i^b$, 当 $i>n$ 时 $\alpha_i=\gamma_{i-n}$, 那么 $a=(\alpha_i)\in U_n^b$ 且 $\{P_{\alpha_i}\}$ 是 X 中点 x 的网络. 所以 $x=f(c)\in f(U_n^b)$. 证明了 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$. 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 中紧可数的，则对 X 中的任意紧集 K, K 与 $\mathcal{P}$ 中至多可数个元相交. 由 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$, 容易验证 K 与 $f(\mathcal{B})$ 中可数个元相交.

必要性. 设存在 X 的基 $\mathcal{B}$ 使得 $f(\mathcal{B})$ 是按指标紧可数的. 若 $\mathcal{P}$ 不是紧可数的，那么对 X 中的某一紧子集 K, 存在 Λ 的不可数集 $\Gamma=\{\beta\in\Lambda:K\cap P_\beta\neq\emptyset\}$. 对 $\forall\ \beta\in\Gamma$ 取 $U_\beta=(\{\beta\}\times(\prod_{n>1}\Lambda_n))\cap M$. 下面验证 $\{U_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 为 $f^{-1}(K)$

开覆盖且没有真子覆盖. 若不然, 存在 $c=(\alpha_n)\in f^{-1}(K)$ 且对 $\forall\ \beta\in\Gamma$, $c\notin U_\beta$, 所以 $\alpha_1\neq\beta$, 即 $\alpha_1\notin\Gamma$, 因此 $K\cap P_{\alpha_1}=\emptyset$, 但因为 $c=(\alpha_n)\in f^{-1}(K)\subset M$, 知 $\{P_{\alpha_n}\}$ 为 X 中点 $f(c)$ 的网络, 则 $f(c)\in P_{\alpha_1}$. 因此 $\emptyset\neq f(c)\in K\cap P_{\alpha_1}$, 矛盾. 则 $\{U_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 覆盖了 $f^{-1}(K)$, 但 $\{U_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 不存在真子覆盖. 若不然, 设存在 $\beta'\in\Gamma$ 使得 $\{U_\beta:\beta\in\Gamma-\{\beta'\}\}$ 也覆盖了 $f^{-1}(K)$. 因 $K\cap P_{\beta'}\neq\emptyset$, $\exists\ x\in K\cap P_{\beta'}$. 由于 f 是满射, 设 $\{P_{\beta_n}\}$ 是 x 的网络, 令 $c_{\beta'}=(\gamma_n)$, 这里 $\gamma_1=\beta'$ 且 $n>1$ 时 $\gamma_n=\beta_{n-1}$, 那么 $\{P_{\gamma_n}\}$ 也是 x 的网络, 所以 $c_{\beta'}\in f^{-1}(x)\subset f^{-1}(K)$, 然而当 $\beta\neq\beta'$ 时 $c_{\beta'}\notin U_\beta$, 矛盾. 则 $\{U_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 为 $f^{-1}(K)$ 开覆盖且没有真子覆盖. 对 $\forall\ \beta\in\Gamma$, $U_\beta\cap f^{-1}(K)\neq\emptyset$ 且 U_β 两两不相交. 对 $\forall\ \beta\in\Gamma$, 设 $c_\beta\in U_\beta\cap f^{-1}(K)$, 由于 U_β 为 M 中 c_β 的开邻域, $\exists\ B_\beta\in\mathcal{B}$, 使得 $c_\beta\in B_\beta\subset U_\beta$. 则 $B_\beta\cap f^{-1}(K)\neq\emptyset$. 即 $f(B_\beta)\cap K\neq\emptyset$ 且 B_β 两两不相交. 所以紧集 K 与 $f(\mathcal{B})$ 按指标有不可数个元相交. 这与 f 是紧可数映射矛盾.

(3) 充分性. 对 $\forall b=(\beta_n^b)\in M$, 则 $\{P_{\beta_n^b}\}$ 是 X 中点 $f(b)$ 的网络. 令 $U_n^b=\{c=(\gamma_i)\in M:$ 当 $i\leqslant n$ 时 $\gamma_i=\beta_i^b\}$. 容易验证 $\mathcal{B}_b=\{U_n^b:n\in\mathbb{N}\}$ 是 M 中点 b 的邻域基. 则 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_b:b\in M\}$ 是 M 的基. 可证明 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$. 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 中局部可数的, 则对 $\forall\ x\in X$, 存在 x 的开集 U 与 $\mathcal{P}$ 中至多可数个元相交. 由 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$, 容易验证开集 U 与 $f(\mathcal{B})$ 中可数个元相交.

必要性. 设存在 X 的基 $\mathcal{B}$ 使得 $f(\mathcal{B})$ 是按指标局部可数的. 若 $\mathcal{P}$ 不是局部可数的, 那么 $\exists\ x\in X$ 使得对 x 的任意开领域 O_x 存在 Λ 的不可数集 $\Gamma_x=\{\beta\in\Lambda: O_x\cap P_\beta\neq\emptyset\}$. 对 $\forall\ \beta\in\Gamma_x$ 取 $U_\beta=(\{\beta\}\times(\prod_{n>1}\Lambda_n))\cap M$, 容易证明 $\{U_\beta:\beta\in\Gamma_x\}$ 为 $f^{-1}(O_x)$ 开覆盖且没有真子覆盖. 对 $\forall\ \beta\in\Gamma_x$, $U_\beta\cap f^{-1}(O_x)\neq\emptyset$ 且 U_β 两两不相交. 设 $c_\beta\in U_\beta\cap f^{-1}(O_x)$, 由于 $U_\beta\cap f^{-1}(O_x)$ 为 M 中 c_β 的开邻域, $\exists\ B_\beta\in\mathcal{B}$, 使得 $c_\beta\in B_\beta\subset U_\beta\cap f^{-1}(O_x)$ 则 $f(B_\beta)\cap O_x\neq\emptyset$ 且 B_β 两两不相交. 所以 O_x 与 $f(\mathcal{B})$ 按指标有不可数个元相交. 这与 f 是局部可数映射矛盾. □

推论 3.1.3 每一拓扑空间是某一度量空间的点有限映象.

证明 事实上, 对于每一拓扑空间 X, $\{\{x\}:x\in X\}$ 是 X 的点有限网络. 由定理 3.1.2(1) 知, X 是度量空间的点有限映象. □

利用第二章引理 2.2.5, 由此, 可得下述推论.

推论 3.1.4 设 $(f,M,X,\mathcal{P})$ 是 Ponomarev 系, 那么

(1) f 是序列覆盖，紧可数映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数 cs 网络.

(2) f 是序列商，紧可数映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数 cs^* 网络.

(3) f 是序列覆盖，局部可数映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数 cs 网络.

(4) f 是序列商，局部可数映射当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数 cs^* 网络.

推论 3.1.5 (1) X 是度量空间的序列覆盖，紧可数映象当且仅当 X 具有紧可数 cs 网络.

(2) X 是度量空间的序列商，紧可数映象当且仅当 X 具有紧可数 cs^* 网络.

(3) X 是度量空间的序列覆盖，局部可数映象当且仅当 X 具有局部可数 cs 网络.

(4) X 是度量空间的序列商，局部可数映象当且仅当 X 具有局部可数 cs^* 网络.

注 关于 1 序列覆盖， 2 序列覆盖，紧覆盖我们可以得到相应的结论.

定理 3.1.6 对空间 X, 下述条件相互等价：

(1) X 是某一度量空间的局部有限映象.

(2) X 具有局部有限网络.

(3) X 是离散空间.

证明(1)$\Leftrightarrow$(2). 由定理 3.1.2(3) 得出推论 X 是某一度量空间的局部有限映象当且仅当 X 具有局部有限网络得证.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 X 不是离散空间. 即存在非孤立点 $x \in X$. 由于 X 具有局部有限网络 $\mathcal{P}$, 存在 x 的开集 U_x 使得仅与 $\mathcal{P}$ 中有限个元相交，记为 n 个. 由于 $\{x\}$ 不是开集，则 U_x 中存在异于 x 的点 y_1. 由 X 为 T_2 空间，存在 X 中 x 的开集 $U_{x,1}$ 和 y_1 的开集 U_{y_1}, 使得 $U_{x,1} \cap U_{y_1} = \emptyset$. 即存在 X 中开集 $U_{x,1} \cap U_x$ 与开集 $U_{y_1} \cap U_x$ 不相交. 由于 $U_{x,1} \cap U_x$ 是 x 的开集且 $\{x\}$ 不是开集, 则 $U_{x,1} \cap U_x$ 存在异于 x 的点 y_2. 由 X 为 T_2 空间，存在 X 中 x 的开集 $U_{x,2}$ 和 y_2 的开集 U_{y_2}, 使得 $U_{x,2} \cap U_{y_2} = \emptyset$. 即存在 X 中开集 $U_{x,1} \cap U_{x,2} \cap U_x$ 与开集 $U_{y_2} \cap U_{x,1} \cap U_x$ 不相交. 这样继续下去，可在 X 中取出 $n+1$ 个开集两两不相交. 又由网络的定义， $\exists\, P_1, \cdots, P_{n+1} \in \mathcal{P}$ 使得 $P_i \subset U_{y_i} \cap U_{x,1} \cap \cdots \cap U_{x,i-1} \cap U_x$, $i = 1, \cdots, n+1$, 则 $P_1, \cdots, P_{n+1}$ 两两不相交. 这与 U_x 仅与 $\mathcal{P}$ 中有限个元相交矛盾，则 X 是离散空间.

(3)$\Rightarrow$(2). X 是离散空间，所以 X 的任意子集为开集. 易证 $\{\{x\} : x \in X\}$ 为

X 的局部有限的网络. □

3.2 关于 $(f,M,X,\mathcal{P}_n)$ 和 $(f,M,X,\{\mathcal{P}_n\})$

上一节讨论了 Ponomarev 系 $(f,M,X,\mathcal{P})$ 的情形, 下面讨论另两种 Ponomarev 系的情况.

定理 3.2.1 设 $(f,M,X,\{\mathcal{P}_n\})$ 是 Ponomarev 系，那么

(1) f 是点可数映射当且仅当 $\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的点可数网络.

(2) f 是紧可数映射当且仅当 $\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的紧可数网络.

(3) f 是局部可数映射当且仅当 $\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 的局部可数网络.

证明 证明方法类似定理 3.1.2. (1) 的证明类似 (2), 我们只需证明 (2) 和 (3) 括号内的情形.

(2) 充分性. 对 $\forall b=(\beta_n^b)\in M$, 则 $\{P_{\beta_n^b}\}$ 是 X 中点 $f(b)$ 的网络. 令 $U_n^b=\{c=(\gamma_i)\in M:$ 当 $i\leqslant n$ 时 $\gamma_i=\beta_i^b\}$. 容易验证 $\mathcal{B}_b=\{U_n^b:n\in\mathbb{N}\}$ 是 M 中点 b 的邻域基. 则 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_b:b\in M\}$ 是 M 的基. 可证明 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$. 因为 $\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 X 中紧可数的，则对 X 中的任意紧集 K, K 与每一 $\mathcal{P}_n$ 中至多可数个元相交. 由 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$, 容易验证 K 与 $f(\mathcal{B})$ 中可数个元相交.

必要性. 设存在 X 的基 $\mathcal{B}$ 使得 $f(\mathcal{B})$ 是按指标紧可数的. 若 $\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 不是紧可数的，对 X 中的某一紧子集 K, 存在 Λ_m 的不可数集 $\Gamma_m=\{\beta\in\Lambda_m:K\cap P_\beta\neq\emptyset\}$. 对 $\forall\ \beta\in\Gamma_m$ 取 $U_\beta=((\prod_{n<m}\Lambda_m)\times\{\beta\}\times(\prod_{n>m}\Lambda_n))\cap M$, 与定理 2.1 的证明类似， $\{U_\beta:\beta\in\Gamma_m\}$ 为 $f^{-1}(K)$ 开覆盖且没有真子覆盖. 对 $\forall\ \beta\in\Gamma_m$. $U_\beta\cap f^{-1}(K)\neq\emptyset$ 且 U_β 两两不相交. 对 $\forall\ \beta\in\Gamma_m$, 设 $c_\beta\in U_\beta\cap f^{-1}(K)$, 由于 U_β 为 M 中 c_β 的开邻域， $\exists\ B_\beta\in\mathcal{B}$, 使得 $c_\beta\in B_\beta\subset U_\beta$. 则 $B_\beta\cap f^{-1}(K)\neq\emptyset$. 即 $f(B_\beta)\cap K\neq\emptyset$ 且 B_β 两两不相交. 所以紧集 K 与 $f(\mathcal{B})$ 按指标有不可数个元相交. 这与 f 是紧可数映射矛盾.

(3) 充分性. 对 $\forall b=(\beta_n^b)\in M$, 则 $\{P_{\beta_n^b}\}$ 是 X 中点 $f(b)$ 的网络. 令 $U_n^b=\{c=(\gamma_i)\in M:$ 当 $i\leqslant n$ 时 $\gamma_i=\beta_i^b\}$. 容易验证 $\mathcal{B}_b=\{U_n^b:n\in\mathbb{N}\}$ 是 M 中点 b 的邻域基. 则 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_b:b\in M\}$ 是 M 的基. 可证明 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$. 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 中局部可数的, 则对 $\forall\ x\in X$, 存在 x 的开集 U_x 与 $\cup\{\mathcal{P}_n:n\in\mathbb{N}\}$ 中至多可数个元相交. 于是 U_x 也仅与每一 $\mathcal{P}_n$ 中可数个元相交. 由 $f(U_n^b)=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\beta_i^b}$, 容易验证开集

U_x 与 $f(\mathcal{B})$ 中可数个元相交.

必要性. 设存在 X 的基 $\mathcal{B}$ 使得 $f(\mathcal{B})$ 是按指标局部可数的. 若 $\cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ 不是局部可数的, 那么 $\exists\, x \in X$ 使得对 x 的任意开领域 O_x 存在 Λ_m 的不可数集 $\Gamma_{x,m} = \{\beta \in \Lambda_m : O_x \cap P_\beta \neq \emptyset\}$. 对 $\forall\, \beta \in \Gamma_{x,m}$ 取 $U_\beta = ((\prod_{n<m} \Lambda_n) \times \{\beta\} \times (\prod_{n>m} \Lambda_n)) \cap M$, 容易证明 $\{U_\beta : \beta \in \Gamma_{x,m}\}$ 为 $f^{-1}(O_x)$ 开覆盖且没有真子覆盖. 对 $\forall\, \beta \in \Gamma_{x,m}$, $U_\beta \cap f^{-1}(O_x) \neq \emptyset$ 且 U_β 两两不相交. 设 $c_\beta \in U_\beta \cap f^{-1}(O_x)$, 由于 $U_\beta \cap f^{-1}(O_x)$ 为 M 中 c_β 的开邻域, $\exists\, B_\beta \in \mathcal{B}$, 使得 $c_\beta \in B_\beta \subset U_\beta \cap f^{-1}(O_x)$ 则 $f(B_\beta) \cap O_x \neq \emptyset$ 且 B_β 两两不相交. 所以 O_x 与 $f(\mathcal{B})$ 按指标有不可数个元相交. 这与 f 是局部可数映射矛盾. $\square$

定理 3.2.2 设 $(f, M, X, \mathcal{P}_n)$ 是 Ponomarev 系, 其中 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$. 则

(1) f 是点可数映射当且仅当对 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数网络.

(2) f 是紧可数映射当且仅当对 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧可数网络.

(3) f 是局部可数映射当且仅当对 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数网络.

证明: 证明方法类似定理 3.2.1

参考文献

[1] Ponomarev V I. Axioms of countability and continuous mappings(in Russian)[J]. Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys, 1960, 8: 127–134

[2] Alexandroff P. On some results concerning topological spaces and their continuous mappings[J]. Proc Symp Gen Topology, (Prague.1961): 41-54

[3] 林寿．点可数覆盖与序列覆盖映射 [M]. 北京：科学出版社， 2002

[4] Ge Y. Mappings in Ponomarev-Systems[J]. Topology Proceedings, 2005, 29(1): 141-153

[5] Ge Y, Lin S. On Ponomarev-Systems[J]. Bollettino Union Math. Italiana[J], 2007, 10(8):455-467

[6] Ge Y. Compact-Covering Mappings in Ponomarev-Systems[J]. 数学进展，2007, 36(4): 447-452

[7] Ge Y. On There Equivalences Concerning Ponomarev-Systems[J]. Archivum Mathematicum, 2006, 42: 239-246

[8] Tanaka Y, Ge Y. Around quotient compact images of metric spaces, and symmetric sapces[J]. Houston J.Math, 2006, 32(1): 99-117

[9] Steen L.A, Seebach Jr J.A. Counterexamples in Topology[M]. Berlin: Springer-verlag, 1978

[10] Lin S, Yan P. Notes on $cfp-$covers[J]. Comment Math. Univ. Carolinae, 2003, 44: 295-306

[11] 林寿．度量空间与函数空间的拓扑 [M]. 北京：科学出版社， 2004

[12] 李进金，江守礼．关于局部可数网与 ss 映射 [J]. 数学学报， 1999, 42(5): 827-832

[13] Tanaka Y, Li Zhaowen. Certain covering-maps and k-networks, and related matters[J]. Topology Proceedings, 2003, 27(1): 317-334

[14] Lin S. On a generalization of Michael's theorem[J]. 东北数学， 1988, 4: 162-168

[15] Halfar E.Compact mappings[J]. Proc. Amer. Math. Soc, 1957, (8): 828–830

[16] Qu Z, Gao Z. Spaces with compact-countable k-network[J]. Math. Japonica, 1999, 49: 199-205

[17] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings[J]. General Topology Appl, 1971, 1: 143-154

[18] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings[J]. Czech Math J, 1976, 26: 174-182

[19] Guthrie J A. A characterization of $\aleph_0$-spaces[J]. General Topology Appl, 1971, 1:105-110

[20] 高智民. $\aleph$-space is invarriant under perfect mappings[J]. Questions Answers in General Topology, 1987, 5(2):271-279

[21] Li Jinjin, Lin S. Sequence-covering cs-images of metric spaces[J]. Sci.Math, 2000, 3(3):399-404

[22] 李克典，冯秀峰，刘正帅. 关于 $msss$ 映射 [J]. 数学研究与评论， 2000, 20(2): 223-226

[23] 林寿. 局部可数集族、局部有限集族与 Alexandroff 问题 [J]. 数学学报， 1994, 37(4): 491-496

[24] Liu Chuan, Tanaka Y. Spaces with certain compact-countable k-networks, and questions[J]. Questions Answers in General Topology, 1996, 14(1): 15-37

[25] Michael E A. The product of a normal space and a metric space need not be normal[J]. Bull Amer Math Soc, 1963, 69: 375-376

[26] Gale D. Compact sets of functions and function rings[J]. Proc Amer Math Soc, 1950, 1(3): 303-308

[27] 高国士. 拓扑空间论 [M]. 北京：科学出版社， 2000

致 谢

本论文是我在导师林寿教授的精心指导下完成的. 三年来, 林老师不仅在学习上给我谆谆教诲, 而且在生活上也给我无私的关怀与帮助. 林老师的人格魅力深深地感染着我, 他为我今后的学习和生活树立了榜样.

感谢李进金教授和李克典教授对我的教育和培养. 在此谨向两位老师致以诚挚的谢意, 感谢您们对我的关心、指导与帮助.

也感谢我的同学, 感谢你们陪我度过三年美好的时光.