§5.5 Fréchet 性质

回忆在§3.1 中介绍过的两个弱第一可数性. 空间 X 称为 Fréchet 空间(定义 3.1.5), 如果 A 是 X 的子集且 $x\in \overline{A}$, 则存在 A 中元组成的序列$\{x_n\}$使得在 X 中$\{x_n\}$收敛于 x. 空间 X 称为强 Fréchet 空间(定义 2.4.3), 若$\{A_n\}$是 X 中递减的集列且 $x\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$, 则存在 $x_n\in A_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x. 对于强 Fréchet 空间的定义稍加改变可得到严格 Fréchet 空间的概念. 空间 X 称为严格 Fréchet 空间(strictly Fréchet space), 若$\{A_n\}$是 X 中的集列且 $x\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$, 则存在 $x_n\in A_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x. 显然, 每一第一可数空间是严格 Fréchet 空间, 每一严格 Fréchet 空间是具有可数强扇 tightness 的强 Fréchet 空间, 每一强 Fréchet 空间是 Fréchet 空间, 每一 Fréchet 空间有可数 tightness.

为了刻画函数空间 $C_\alpha(X)$的 Fréchet 性质, 引入下述概念. 空间 X 的子集列$\{C_n\}$称为 X 的α序列(α-sequence), 如果对于每一 $A\in\alpha$, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得当 $n\geq m$ 时有 $A\subset C_n$.

定理 5.5.1 (McCoy, Ntantu[1985])空间 $C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间当且仅当 X 的每一开α覆盖含有α序列.

证明 设 $C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间. 让$\mathscr{U}$是 X 的开α覆盖. 对于每一 $A\in\alpha$, 存在 $U_A\in\mathscr{U}$使得 $A\subset U_A$, 于是存在 $f_A\in C(X)$使得 $f_A(A)=\{0\}$且 $f_A(X\setminus U_A)\subset\{1\}$. 易验证, 零函数 $f_0\in\overline{\{f_A: A\in\alpha\}}$(见定理 5.4.1 的证明), 于是存在$\alpha$的子集$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得序列$\{f_{A_n}\}$在 $C_\alpha(X)$中收敛于 f_0. 对于每一 $A\in\alpha$, 由于 $f_0\in[A, (-1, 1)]$, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得当 $n\geq m$ 时有 $f_{A_n}\in[A, (-1, 1)]$, 如果 $x\in A\setminus U_{A_n}$, 则 $f_{A_n}(x)<1$ 且 $f_{A_n}(x)=1$, 矛盾. 因而 $A\subset U_{A_n}$, 故$\mathscr{U}$的子集列$\{U_{A_n}\}$是 X 的α序列.

反之, 设 G 是 $C_\alpha(X)$的子集且零函数 $f_0\in\overline{G}$, 若 X 的每一开α覆盖含有α序列, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$和 $A\in\alpha$, 如定理 5.4.1 的证明, 定义 $g_{n,A}$, W(n, A)和$\mathscr{W}_n$. 特别地, 每一$\mathscr{W}_n$是 X 的开α覆盖. 定义$\mathscr{U}_n=\bigwedge_{i\leq n}\mathscr{W}_i$, 则$\mathscr{U}_n$是 X 的开$\alpha$覆盖. 由推论 4.4.5, 不妨设 $X\notin\alpha$. 因为$\{X\setminus\{x\}\}_{x\in X}$是 X 的开$\alpha$覆盖, 由假设, 存在 X 中的序列$\{x_n\}$使得$\{X\setminus\{x_n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的

α序列. 其次, 对于每一n$\in\mathbb{N}$, 定义$\mathcal{U}'_n$={U\{x_n} : U$\in\mathcal{U}_n$},$\mathcal{V}$=$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}'_n$, 则$\mathcal{V}$是X的开$\alpha$覆盖. 事实上, 对于每一 A$\in\alpha$, 存在 n$\in\mathbb{N}$和 U$\in\mathcal{U}_n$使得 A$\subset$X\{$x_n$}且 A$\subset$U, 于是A$\subset$U\{$x_n$}. 从$\mathcal{V}$选取$\alpha$序列{$V_n$}.

对于每一 k$\in\mathbb{N}$, 存在 $n_k\in\mathbb{N}$和 $U_k\in\mathcal{U}_{n_k}$使得 $V_k\subset U_k$. 因而对于某一 $A_k\in\alpha$, $V_k\subset W(n_k, A_k)$. 若{n_k : k$\in\mathbb{N}$}是有限集, 让 n=max{n_k : k$\in\mathbb{N}$}, 则存在 k$\in\mathbb{N}$使得{x_i : i$\le$n}$\subset V_k=U_k$\{x_{n_k}}, 于是 n_k>n, 矛盾, 因此{n_k : k$\in\mathbb{N}$}是无限集, 取递增的子序列{n_{k_i}}且让 $g_i=g_{n_{k_i}, A_{k_i}}$. 对于每一 A$\in\alpha$和 n$\in\mathbb{N}$, 存在 m$\in\mathbb{N}$使得当 i$\ge$m 时 A$\subset V_{k_i}$且$n_{k_i}\ge$n, 于是A$\subset V_{k_i}\subset W(n_{k_i}, A_{k_i})$={x$\in$X : |$g_i$(x)|<1/$n_{k_i}$}, 从而 $g_i\in$[A, (-1/n, 1/n)], 故序列{g_i}收敛于 f_0. 因此C_α(X)是 Fréchet 空间. █

对于一般的拓扑空间, Fréchet 性质$\not\Rightarrow$强 Fréchet 性质(例 3.1.8)$\not\Rightarrow$严格 Fréchet 性质. 下述定理表明, 在函数空间中情况发生了变化.

定理 5.5.2 对于每一{X, α}下述条件相互等价:

(1) C_α(X)是严格 Fréchet 空间;

(2) C_α(X)是强 Fréchet 空间;

(3) C_α(X)是 Fréchet 空间;

(4) X 的每一开α覆盖列{$\mathcal{U}_n$}, 存在 $U_n\in\mathcal{U}_n$ ($\forall n\in\mathbb{N}$)使得{U_n}是 X 的α序列;

(5) C_α^ω(X)是严格 Fréchet 空间.

证明 (5)$\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)是显然的. (3)$\Rightarrow$(4). 设C_α(X)是 Fréchet 空间且{$\mathcal{U}_n$}是空间X的开α覆盖序列, 不妨设每一$\mathcal{U}_{n+1}$加细$\mathcal{U}_n$. 若X$\in\alpha$, 对于每一n$\in\mathbb{N}$, 存在$U_n\in\mathcal{U}_n$使得 X$\subset U_n$, 这时{U_n}是 X 的α序列. 若 X$\notin\alpha$, 则{X\{x}$\}_{x\in X}$是 X 的开α覆盖, 由定理 5.5.1, 存在X 的子集{x_n : n$\in\mathbb{N}$}使得{X\{x_n}$\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α序列. 令$\mathcal{B}_n$={U\{x_n} : U$\in\mathcal{U}_n$}, 则$\mathcal{B}$=$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$是 X的$\alpha$覆盖. 再由定理 5.5.1, $\mathcal{B}$含有α序列{G_k}. 对于每一k$\in\mathbb{N}$, 存在$n_k\in\mathbb{N}$使得$G_k\in\mathcal{B}_{n_k}$, 即有$U_{n_k}\in\mathcal{U}_{n_k}$使得$G_k=U_{n_k}$\{$x_{n_k}$}. 对于每一n$\in\mathbb{N}$, 因为{$x_1$,

$x_2,\ldots,x_n\}\in\alpha$，所以存在 $k\in\mathbb{N}$使得$\{x_i : i\le n\}\subset G_k$．如果 $n_k\le n$，那么 $x_{n_k}\in G_k=U_{n_k}\setminus\{x_{n_k}\}$，矛盾．于是 $n_k>n$，所以$\{n_k : k\in\mathbb{N}\}$是无限集，故存在$\{n_k\}$的单调上升的子列$\{n_{k_i}\}$．对于 $n_{k_i}<n\le n_{k_{i+1}}$，因为$\mathscr{U}_{n_{k_{i+1}}}$ 加细$\mathscr{U}_n$，存在 $U_n\in\mathscr{U}_n$ 使得 $U_{n_{k_{i+1}}}\subset U_n$．令

$$W_n=\begin{cases}U_{n_{k_i}}, & n=n_{k_i}\\ U_n, & n\ne n_{k_i}, i\in\mathbb{N},\end{cases}$$

则 $W_n\in\mathscr{U}_n$．对于每一 $A\in\alpha$，存在 $i_0\in\mathbb{N}$使得当 $i\ge i_0$时有 $A\subset U_{n_{k_i}}$，于是当 $n\ge n_{k_{i_0}}$ 时有 $A\subset W_n$，从而$\{W_n\}$是 X 的α序列．

(4)$\Rightarrow$(5)．只须证明 $C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$在点 f_0(零函数)具有严格 Fréchet 性质．如果$\{A_n\}$是$C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$中集列且 $f_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$，对于每一 $n\in\mathbb{N}$，置 $\mathscr{U}_n=\{f^{-1}(O_n) : f\in A_n\}$，其中$\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{R}^\omega$中点 O=(0, 0, …)的可数递减的局部基，则$\mathscr{U}_n$ 是 X 的开α覆盖．由条件可知存在 $U_n\in\mathscr{U}_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\{U_n\}$是 X 的$\alpha$序列．取定 $f_n\in A_n$使得 $U_n=f_n^{-1}(O_n)$．下证在$C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$中序列$\{f_n\}$收敛于 f_0．对于 f_0在 $C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$中的任意基本邻域[A, V]，存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $O_m\subset V$，并且当 $n\ge m$ 时有 $A\subset U_n$，于是当 $n\ge m$ 时有 $f_n(A)\subset O_n\subset V$，即 $f_n\in[A, V]$，所以$\{f_n\}$收敛于 f_0．故 $C_\alpha(X,\mathbb{R}^\omega)$是严格 Fréchet 空间．■

由定理 5.5.2，若 $C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间，则 $C_\alpha(X)$有可数强扇 tightness．下面讨论几个函数空间的 Fréchet 性质的例子．

引理 5.5.3　设 X 是第一可数空间，若 $C_k(X)$是 Fréchet 空间，则 X 是局部紧空间．

证明　设空间 X 在点 x 不是局部紧的，让$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的可数局部基．对于每一 $n\in\mathbb{N}$和 X 的非空紧子集 K，由于 $U_n\not\subset K$，存在 X 的开集 U(n, K)使得$\{x\}\cup K\subset U(n, K)$且 $U_n\not\subset U(n, K)$．让 $\mathscr{U}_n=\{U(n, K) : K$ 是 X 的非空紧子集$\}$，则$\mathscr{U}_n$是 X 的开 k 覆盖．由定理 5.5.1，存在 X 的非空紧子集列$\{K_n\}$使得$\{U(n, K_n)\}$是 X 的 k 序列．对于每一 $n\in\mathbb{N}$，取 $x_n\in U_n\setminus U(n, K_n)$．那么序列$\{x_n\}$收敛于 x．令 $A=\{x\}\cup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$，则 A 是 X 的紧子集且每一 $U(n, K_n)\not\supset A$，矛盾．故 X 是局部紧空间．■

由此, $C_k(\mathbb{P})$不是 Fréchet 空间, 从而 $C_k(\mathbb{N}^{\omega})$不是 Fréchet 空间(定理 2.6.9). 推论 5.5.3 导出下述问题.

问题 5.5.4 (McCoy[1980b])(1)设 $C_k(X)$是 Fréchet 空间, 若 X 是 k 空间, X 是否是半紧空间?

(2) 设 $C_p(X)$是 Fréchet 空间, 若 X 是第一可数空间, X 是否是可数集?

例 5.5.5 $C_p(\mathbb{I})$有可数 tightness, 但不是序列空间(McCoy[1980c], Arhangel'skiĭ[1992]).

由推论 5.4.3, $C_p(\mathbb{I})$有可数 tightness. 下面证明 $C_p(\mathbb{I})$不是序列空间. 设$\{r_n : n\in\mathbb{N}\}$是$\mathbb{I}$的稠密子集. 让$\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$是$\mathbb{I}$的满足下述条件的基:

(5.1) 每一 $m(\overline{U}_n)<1/2$, 其中 m 是$\mathbb{I}$的 Lebesgue 测度;

(5.2) 对于$\mathbb{I}$的每一有限子集 F, 存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $F\subset U_n$.

选取 $f_n\in C_p(\mathbb{I},\mathbb{I})$满足:

(5.3) $\int_0^1 f_n\,dx\geq 1/2$;

(5.4) $f_n(U_n\bigcup\{r_k : k\leq n\})=\{0\}$.

让 $Z=\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$, f_0是$\mathbb{I}$上的零函数. 如果 $f\in C_p(\mathbb{I})$是 Z 的聚点, 那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$有 $f(r_n)=0$, 于是 $f=f_0$, 因而 Z 不是 $C_p(\mathbb{I})$的闭集. 如果 $C_p(\mathbb{I})$是序列空间, 则存在 Z 中的序列$\{g_n\}$收敛于 f_0. 由于每一$\int_0^1 g_n\,dx\geq 1/2$, 从 Lebesgue 控制收敛定理, $\int_0^1 f_0\,dx\geq 1/2$, 矛盾. 故 $C_p(\mathbb{I})$不是序列空间.

第六章中将进一步说明 $C_p(\mathbb{I})$有可数扇 tightness, 但没有可数强扇 tightness(定理 6.2.5 和引理 6.2.9). ▮

推论 5.5.6 若 $C_p(X)$是 Fréchet 空间, 则 Ind(X)=0.

证明 由推论 5.4.3, X 是 Lindelöf 空间, 再由推论 2.1.11, 只须证明 ind(X)=0. 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $f\in C_p(X,\mathbb{I})$使得 $f(x)=1$ 且 $f(X\setminus U)\subset\{0\}$. 因为 $C_p(X)$是

Fréchet 空间, 所以 $C_p(f(X))$也是 Fréchet 空间(练习 5.5.3), 由例 5.5.5, $f(X)\neq[0, 1]$, 即存在 $y\in(0, 1)\setminus f(X)$, 于是 $x\in f^{-1}((y, 1])\subset U$ 且 $f^{-1}((y, 1])$是 X 的开闭集. 故 ind(X)=0, 从而 Ind(X)=0. ▌

例 5.5.7 (McCoy[1980c])$C_p([0, \omega_1])$是 Fréchet 空间.

证明 设 X 是序空间$[0, \omega_1]$, 且$\{\mathscr{U}_n\}$是 X 的开ω覆盖的序列. 取 $U_1\in\mathscr{U}_1$使得 $\omega_1\in U_1$, 则 $X\setminus U_1$是可数集, 记 $X\setminus U_1=\{x_{1i} : i\in\mathbb{N}\}$. 取 $U_2\in\mathscr{U}_2$使得$\{\omega_1, x_{11}\}\subset U_2$, 则 $X\setminus U_2$是可数集, 记 $X\setminus U_2=\{x_{2i} : i\in\mathbb{N}\}$. 再取 $U_3\in\mathscr{U}_3$使得$\{\omega_1, x_{11}, x_{12}, x_{21}\}\subset U_3$. 继续上述过程, 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 可选取 $U_n\in\mathscr{U}_n$使得 $X\setminus U_n=\{x_{ni} : i\in\mathbb{N}\}$且$\{\omega_1\}\bigcup\{x_{ji} : j+i\leq n+1\}\subset U_{n+1}$. 下面证明$\{U_n\}$是 X 的$\omega$序列. 这只须证明对于每一 $x\in X$, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得当 $n\geq m$ 时有 $x\in U_n$. 不妨设 $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$, 让 $j=\min\{n\in\mathbb{N} : x\notin U_n\}$, 则存在 $i\in\mathbb{N}$使得 $x=x_{ji}$, 于是当 $n\geq j+i$ 时有 $x\in U_n$. 故$\{U_n\}$是 X 的ω序列. 因此, $C_p([0, \omega_1])$是 Fréchet 空间.

由推论 5.2.5, $C_p([0, \omega_1])$不具有点 G_δ性质. ▌

空间 X 称为广义可数的(virtually countable, McCoy[1980c]), 若存在 X 的有限子集 F 使得对于 F 在 X 中的每一邻域 U, $X\setminus U$是可数集. 例 5.5.7 的证明表明: 若空间 X 是广义可数的, 则 $C_p(X)$是 Fréchet 空间.

关于函数空间 Fréchet 性质的最优美结果是如下的 Pytkeev(E. T. Пыткеев)[1992]定理: 对于每一$\{X, \alpha\}$下述条件相互等价: (1) $C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间; (2) $C_\alpha(X)$是序列空间; (3) $C_\alpha(X)$是 k 空间.

最后, 函数空间 $C_\alpha(X)$的弱第一可数性之间的关系归结如下.

$$\begin{array}{c}
\text{度量空间}\Leftrightarrow\text{第一可数空间}\Leftrightarrow\text{q 空间}\\
\Downarrow\\
\text{严格 Fréchet 空间}\Leftrightarrow\text{强 Fréchet 空间}\Leftrightarrow\text{Fréchet 空间}\Leftrightarrow\text{序列空间}\Leftrightarrow\text{k 空间}\\
\Downarrow\\
\text{可数强扇 tightness}
\end{array}$$

$\Downarrow$

可数扇 tightness

$\Downarrow$

可数 tightness

练习

5.5.1 设 $C_p(X)$是 Lindelöf 空间. 证明: (1) 若 Y 是 X 的 C 嵌入子空间, 则 $C_p(Y)$是 Lindelöf 空间; (2) X 的离散开集族是可数的.

5.5.2 设 $C_\alpha(X)$是 Fréchet 空间, 若 Y 是 X 的闭集, 则 $C_\alpha(Y)$是 Fréchet 空间.

5.5.3 设 $f:X\to Y$ 是连续的满射. 若 $C_p(X)$是 Fréchet 空间, 则 $C_p(Y)$是 Fréchet 空间.

5.5.4 若 C 是 Cantor 三分集, 则 $C_p(C)$不是 Fréchet 空间.

5.5.5 设 $C_\alpha(X)$是 Lašnev 空间, 则 α an(X)=ω.

§5.6 完全性

本节先介绍一致空间的完全性, 其次讨论函数空间的一致完全性, 而后讨论函数空间的完全度量性, 最后再讨论函数空间的 Baire 空间性质.

回忆度量空间中的完全性(定义 2.5.1). 设(X, d)是度量空间. X 中的序列$\{x_n\}$称为 Cauchy 序列, 若对于任意的$\varepsilon>0$, 存在 $k\in\mathbb{N}$使得当 $n, m\geq k$ 时有 $d(x_n, x_m)<\varepsilon$. X 称为完全度量空间, 若 X 中的每一 Cauchy 序列是收敛序列. 度量空间完全性的刻画主要有 Cantor 定理(定理 2.5.3)和 Kuratowski 定理(推论 2.5.4).

下面介绍一致空间的完全性. 设(X, μ)是一致空间. $\mathscr{F}$ 是 X 的子集族, 称 $\mathscr{F}$ 含有任意小集(arbitrarily small set)如果对于每一 $U\in\mu$ 存在 $F\in\mathscr{F}$ 使得 $F\times F\subset U$. 由于 X 是 T_2 空间, 于是$\bigcap\mu=\Delta$(引理 4.1.7), 所以$\bigcap\mathscr{F}$ 至多含有一个点. 一致空间(X, μ)称为完全的(complete)如果$\mathscr{F}$是 X 的具有有限交性质的闭集族且含有任意小集, 则$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$. 一致空间的完全性简称为一致完全性(uniform completeness).

度量空间的完全性是通过 Cauchy 序列定义的. 一致完全性也可通过类似的 Cauchy 网(Cauchy net)刻画. 设$\{x_d\}_{d\in D}$是一致空间(X, μ)的网, 称$\{x_d\}_{d\in D}$是 Cauchy 网, 如果对于

每一 $U\in\mu$ 存在 $d_0\in D$ 使得当 d_1, $d_2\geq d_0$ 时有 $(x_{d_1}, x_{d_2})\in U$. 这等价于对于每一 $U\in\mu$ 存在 $d_0\in D$ 使得当 $d\geq d_0$ 时有 $(x_{d_0}, x_d)\in U$.

引理 5.6.1 一致空间 (X, μ) 是完全的当且仅当 (X, μ) 的每一 Cauchy 网是收敛的.

证明 设 $\{x_d\}_{d\in D}$ 是一致完全空间 (X, μ) 的 Cauchy 网. 对于每一 $d\in D$, 令 $F_d=\overline{\{x_t: t\geq d\}}$, 则 $\{F_d\}_{d\in D}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族且含有任意小集. 事实上, 对于每一 $U\in\mu$, 存在 μ 中的闭元 $V\subset U$, 由于 $\{x_d\}_{d\in D}$ 是 Cauchy 网, 存在 $d_0\in D$ 使得当 d_1, $d_2\geq d_0$ 时有 $(x_{d_1}, x_{d_2})\in V$, 于是 $F_{d_0}\times F_{d_0}=\overline{\{(x_{d_1}, x_{d_2}): d_1, d_2\geq d_0\}}\subset V\subset U$. 进而知存在 $x\in\bigcap_{d\in D}F_d$. 下面证明网 $\{x_d\}_{d\in D}$ 收敛于 x. 对于 x 在 X 中的邻域 W, 存在 U, $M\in\mu$ 使得 $U[x]\subset W$, 且 $M\circ M\subset U$, 又存在 $d_0\in D$ 使得当 $d_1, d_2\geq d_0$ 时有 $(x_{d_1}, x_{d_2})\in M$, 由于 $x\in F_{d_0}$, 存在 $d_1\geq d_0$ 使得 $x_{d_1}\in M[x]$, 于是当 $d_2\geq d_0$ 时有 $(x, x_{d_2})\in M\circ M\subset U$, 从而 $x_{d_2}\in U[x]\subset W$. 所以 $\{x_d\}_{d\in D}$ 收敛于 x.

反之, 设一致空间 (X, μ) 的每一 Cauchy 网是收敛的. 若 $\mathscr{F}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族且含有任意小集, 不妨设 $\mathscr{F}$ 关于有限交封闭. 记 $\mathscr{F}=\{F_d\}_{d\in D}$, 对于 d_1, $d_2\in D$, 定义 $d_1\leq d_2$ 当且仅当 $F_{d_2}\subset F_{d_1}$, 并且取定 $x_d\in F_d$, 则 $\{x_d\}_{d\in D}$ 是 Cauchy 网. 事实上, 对于每一 $U\in\mu$, 存在 $d_0\in D$ 使得 $F_{d_0}\times F_{d_0}\subset U$, 当 $d\geq d_0$ 时 $(x_{d_0}, x_d)\in F_{d_0}\times F_{d_0}\subset U$. 设 x 是网 $\{x_d\}_{d\in D}$ 的极限, 下面证明 $x\in\bigcap\mathscr{F}$. 对于每一 $d_0\in D$ 及 x 在 X 中的邻域 O, 存在 $d\geq d_0$ 使得 $x_d\in O\bigcap F_d\subset O\bigcap F_{d_0}$, 所以 $O\bigcap F_{d_0}\neq\varnothing$, 因而 $x\in\overline{F}_{d_0}=F_{d_0}$, 故 $x\in\bigcap\mathscr{F}$. 于是 (X, μ) 是完全的. ▌

接着讨论函数空间的完全性. 从定理 4.4.2, 若 μ 是 $\mathbb{R}$ 上相容的一致, 则 $C_\alpha(X)=C_{\alpha,\mu}(X)$, 即 $C_\alpha(X)$ 的拓扑是 α 上关于 μ 的一致收敛拓扑. $C_\alpha(X)$ 的完全性是对这一致结构的完全性. 由于 $\{\hat{M}(A): A\in\alpha$ 且 $M\in\mu\}$ 是 $C_\alpha(X)$ 上这一致结构的基, 其中 $\hat{M}(A)=\{(f, g)\in C(X)\times C(X)$: 对于每一 $x\in A$ 有 $(f(x), g(x))\in M\}$, 所以对于 $C_\alpha(X)$ 的网 $\{f_d\}_{d\in D}$, $\{f_d\}_{d\in D}$ 是 Cauchy 网如果对于每一 $M\in\mu$, $A\in\alpha$, 存在 $d_0\in D$ 使得当 $d\geq d_0$ 时有

$f_d \in \hat{M}(A)[f_{d_0}]$. 由引理 5.6.1, $C_\alpha(X)$是一致完全的当且仅当$C_\alpha(X)$中的每一 Cauchy 网是收敛的.

空间 X 称为α_R空间(α_R-space), 若 X 上的每一实值函数 f 在α的每一元的限制是连续的, 则 f 是连续的. 如果α是空间 X 的所有非空紧子集的族, 那么α_R空间称为 k_R空间(k_R-space); 如果α是 X 的所有非空有限子集的族, 那么 X 是α_R空间当且仅当 X 是离散空间(练习 5.6.1).

定理 5.6.2 (Warner[1958])空间 $C_\alpha(X)$是一致完全的当且仅当 X 是α_R空间.

证明 设 $C_\alpha(X)$是一致完全的. 让 f 是 X 上的实值函数使得对于每一 $A \in \alpha$, $f_{|A}$是连续的, 设 $f_A \in C(X)$是 $f_{|A}$的扩张(引理 4.5.5). 对于每一 $M \in \mu$, $A \in \alpha$, 当 $B \in \alpha$ 且 $A \subset B$ 时, 如果 $x \in A$, 则$(f_A(x), f_B(x))=(f(x), f(x)) \in M$, 于是 $f_B \in \hat{M}(A)[f_A]$, 所以当α按包含关系构成定向集时, $\{f_A\}_{A\in\alpha}$是 $C_\alpha(X)$的 Cauchy 网, 那么$\{f_A\}_{A\in\alpha}$收敛且收敛于 f, 所以 $f \in C_\alpha(X)$. 故 X 是α_R空间.

反之, 设 X 是α_R空间, 让$\{f_d\}_{d\in D}$是 $C_\alpha(X)$中的 Cauchy 网. 如果 $A \in \alpha$, 则$\{f_{d\,|A}\}_{d\in D}$是 $C_\alpha(A)=C_k(A)$中的 Cauchy 网. 由于 A 是紧空间且ℝ是完全度量空间, 由推论 4.4.4 和定理 4.4.10, $C_k(A)$是完全度量空间, 于是在 $C_k(A)$中$\{f_{d\,|A}\}_{d\in D}$收敛于某一 f_A. 置 $f: X \to$ ℝ使得如果 $x \in A$, 则 $f(x)=f_A(x)$. 那么 f 是良好定义的且对于每一 $A \in \alpha$, $f_{|A}=f_A$. 因为 X 是α_R空间, f 在 X 上连续, 故$\{f_d\}_{d\in D}$收敛于 f. ▌

推论 5.6.3 对于空间 X, (1) $C_k(X)$是一致完全的当且仅当 X 是 k_R空间; (2) $C_p(X)$是一致完全的当且仅当 X 是离散空间. ▌

下面进一步讨论函数空间的完全度量性.

引理 5.6.4 设(X, d)是度量空间且μ是由 d 诱导的 X 上的一致结构, 则(X, μ)是一致完全的当且仅当(X, d)是完全度量空间.

证明 对于每一 r>0, 让$U_r=\{(x, y) \in X \times X: \rho(x, y)<r\}$. 则$\{U_r\}_{r>0}$是一致结构$\mu$的基. 显然, 对于 X 的子集 F 及 r>0, $d(F)<r \Rightarrow F \times F \subset U_r \Rightarrow d(F) \le r$. 所以 X 的子集族$\mathscr{F}$含有任意

小集当且仅当$\mathscr{F}$含有直径任意小的集, 由 Kuratowski 定理(推论 2.5.4), (X, μ)是一致完全的当且仅当(X, d)是完全度量空间. ▮

定理 5.6.5 (McCoy, Ntantu[1986])对于每一{X, α}下述条件相互等价:

(1) C_α(X)是完全度量空间;

(2) C_α(X)是 Čech 完全空间;

(3) X 是α_R空间且$\alpha a(X)=\omega$.

证明 由引理 5.6.4, 定理 5.6.2 和定理 5.2.12 知, 若 C_α(X)是完全度量空间, 则 X 是α_R空间且$\alpha a(X)=\omega$. 若 C_α(X)是 Čech 完全空间, 因为 Čech 完全空间是 q 空间, 由定理 5.2.12, C_α(X)是度量空间, 再由定理 2.5.10, C_α(X)是完全度量空间.

现在, 设 X 是α_R空间且$\alpha a(X)=\omega$. 让α的子集$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖, 且每一$A_n\subset A_{n+1}$, 先证明 X 关于覆盖$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$具有弱拓扑(定义 1.6.4), 即若 X 的子集 S 满足对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $S\cap A_n$是闭的, 则 S 是 X 的闭集. 若 S 不是 X 的闭集, 存在$x\in\overline{S}\setminus S$. 不失一般性, 设$x\in A_1$. 存在连续函数$f_1: A_1\to\mathbb{R}$使得$f_1(S\cap A_1)=\{0\}$且$f_1(x)=1$. 将$f_1$连续扩张为$f_2: A_2\to\mathbb{R}$使得 $f_2(S\cap A_2)=\{0\}$(引理 4.5.5). 继续上述过程, 定义了函数列$\{f_n\}$使得每一 $f_n: A_n\to\mathbb{R}$是连续的, f_{n+1}是f_n的扩张且$f_n(S\cap A_n)=\{0\}$. 置 $f: X\to\mathbb{R}$使得对于每一$y\in A_n$有$f(y)=f_n(y)$, 则 f 是良好定义的. 因为每一$A\in\alpha$被包含于某一A_n中, 则 f 在 A 上的限制是连续的, 于是 f 是连续的. 然而, f(x)=1, f(S)={0}, 所以 f 又不是连续的, 矛盾. 故 S 是 X 的闭集.

让 $Z=\oplus_{n\in\mathbb{N}}A_n$, p: $Z\to X$ 是自然映射. 则 p 是商映射(引理 1.6.7), 由定理 4.5.7 和定理 4.5.10, 诱导函数 p*: $C_\alpha(X)\to C_\beta(Z)$是闭嵌入, 其中$\beta=\{A_n\cap A: n\in\mathbb{N}, A\in\alpha\}$. 因为$C_\beta(Z)$同胚于积空间$\prod_{n\in\mathbb{N}}C_\alpha(A_n)$(定理 4.5.16)且每一$C_\alpha(A_n)$是完全度量空间(定理 4.4.10), 所以$C_\beta(Z)$是完全度量空间(定理 2.5.5). 故$C_\alpha$(X)是完全度量空间. ▮

定理 5.6.5 的证明表明, 每一半紧的k_R空间是 k 空间.

推论 5.6.6 对于空间 X, (1) (Beckenstein, Narici, Suffel[1977])$C_k(X)$是完全度量空间当且仅当 X 是半紧的 k 空间; (2) (Lutzer, McCoy[1980])$C_p(X)$是完全度量空间当且仅当 X 是可数的离散空间. ∎

推论 5.6.7 设 X 是第一可数空间, 则下述条件相互等价:

(1) $C_k(X)$是完全度量空间;

(2) $C_k(X)$是 Fréchet 空间;

(3) X 是半紧空间.

证明 显然(3)⇒(1)⇒(2). 设 $C_k(X)$是 Fréchet 空间, 由定理 5.5.1 和引理 5.5.3, X 是局部紧的 Lindelöf 空间, 于是 X 是半紧空间. ∎

可分的完全度量空间称为 Polish 空间(Polish space). 定理 5.3.3 和定理 5.6.5 的结合可刻画函数空间的 Polish 性质.

推论 5.6.8 空间 $C_\alpha(X)$是 Polish 空间当且仅当 X 是α_R空间且α α nw(X)=ω. ∎

推论 5.6.9 对于空间 X, (1) $C_k(X)$是 Polish 空间当且仅当 X 是 cosmic 的半紧的 k 空间; (2) $C_p(X)$是 Polish 空间当且仅当 X 是可数的离散空间. ∎

本节的最后一部分介绍函数空间的 Baire 空间性质. 连续统假设(Continuum Hypothesis, 简记为 CH) 是指 $2^\omega = \omega_1$. 通过美国数学家 K. Gödel[55] (1906-1978)[1938] 和 P. J. Cohen(1934-)[1963, 1964]的杰出工作, CH 与 ZFC 是独立的(independent), 换言之, CH 成立与否在 ZFC 公理系统中是不可判定的(undecidable), 即在 ZFC 中既不能证明它正确, 也不能证明它不正确. J. C. Oxtoby[1961]借助 CH 证明了存在 Baire 空间 X 使得 X^2 不是 Baire 空间. P. E. Cohen[1976]在 ZFC 中找到了两个 Baire 空间使其积空间不是 Baire 空间. 而 N. Bourbaki[1948]证明了完全度量空间族的积空间是 Baire 空间(推论 2.5.13). 由定理 4.3.11, 引理 4.2.2 和定理 1.7.7, $C_\alpha(X)$是 Baire 空间当且仅当 $C_\alpha(X)$自身是第二范畴集. 寻求 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间的充分且必要条件是较困难的(McCoy, Ntantu[1988]). 下面介绍几个简单的充分条件与必要条件.

---

[55] Gödel 是波兰数学家 H. Hahn(1879-1934)的学生.

引理 5.6.10 如果 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 那么 X 的每一 q 点有一个闭邻域属于α. 特别地, 如果 X 是 q 空间, 则 X 是局部紧空间.

证明 设空间 X 的点 x 是 q 点, 即 x 具有可数递减的开邻域列$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得若序列$\{x_n\}$满足每一 $x_n\in B_n$, 则$\{x_n\}$有聚点. 先证明存在 $n\in\mathbb{N}$和α的有限子集β使得 $B_n\subset\bigcup\beta$. 若不然, 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 令$G_n=\bigcup_{z\in B_n}[z, (n, n+2)]$, 则$G_n$是$C_\alpha(X)$的开稠密子集. 事实上, 对于 $C_\alpha(X)$的每一非空的基本开集$\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i]$, 让 $f\in\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i]$, 由于 $B_n\not\subset\bigcup_{i\le k}A_i$, 取 $z\in B_n\setminus\bigcup_{i\le k}A_i$, 定义 $g: \{z\}\bigcup(\bigcup_{i\le k}A_i)\to\mathbb{R}$使得对于每一 $x\in\{z\}\bigcup(\bigcup_{i\le k}A_i)$, 当$x\in\bigcup_{i\le k}A_i$时 g(x)=f(x), 且 g(z)=n+1, 则 g 是连续的. 由引理 4.5.5, 存在 $h\in C(X)$使得 $h|_{\{z\}\cup(\cup_{i\le k}A_i)}=g$, 则 $h\in(\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i])\bigcap[z, (n, n+2)]$, 于是$(\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i])\bigcap G_n\ne\varnothing$, 从而 G_n 是 $C_\alpha(X)$的稠密子集. 由于 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 存在 $p\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in B_n$ 使得 $p(x_n)>n$. 另一方面, 序列$\{x_n\}$在 X 中有聚点, 这与 p 的连续性相矛盾. 故存在 $n\in\mathbb{N}$和α的有限子集β使得 $B_n\subset\bigcup\beta$. 从而 $\overline{B}_n\subset\bigcup\beta$, 因此$\overline{B}_n\in\alpha$. ▮

由此, 如果 $C_p(X)$是 Baire 空间, 那么 X 的具有可数局部基的点只能是孤立点.

定理 5.6.11 (McCoy, Ntantu[1986])如果 X 是仿紧的 q 空间, 则 $C_k(X)$是 Baire 空间当且仅当 X 是局部紧空间.

证明 若 $C_k(X)$是 Baire 空间, 由引理 5.6.10, X 是局部紧空间. 反之, 设 X 是仿紧的局部紧空间, 则 X 可表为局部紧σ紧空间的拓扑和(练习 5.6.5). 局部紧的σ紧空间是半紧的 k 空间. 由推论 4.5.17 和推论 5.6.6, $C_k(X)$同胚于完全度量空间族的积空间. 再由推论 2.5.13, 这积空间是 Baire 空间, 所以 $C_k(X)$是 Baire 空间. ▮

由定理 5.6.11, $C_k(\mathbb{P})$不是 Baire 空间. 下面将说明定理 5.6.11 中关于 X 的仿紧性不可省略.

引理 5.6.12 如果 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 则 X 的每一闭的伪紧子集属于α. 特别地,

$C_\alpha(X)=C_k(X)$.

证明 设存在 X 的闭伪紧子集 $A\notin\alpha$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 让 $G_n=\bigcup_{x\in A}[x, (n, n+2)]$, 则 G_n 是 $C_\alpha(X)$的开稠密子集. 事实上, 对于 $C_\alpha(X)$的每一非空的基本开集$\bigcap_{i\le k}[B_i, V_i]$, 让 $f\in\bigcap_{i\le k}[B_i, V_i]$, 由于 $A\not\subset\bigcup_{i\le k}B_i$, 取 $z\in A\setminus\bigcup_{i\le k}B_i$, 由引理 5.6.10 类似的证明, 存在 $h\in(\bigcap_{i\le k}[B_i, V_i])\bigcap[z, (n, n+2)]$, 从而 G_n 是 $C_\alpha(X)$的稠密子集. 因为 $C_\alpha(X)$是Baire 空间, 存在 $p\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$, 则实值连续函数 p 在 A 上无界, 这与 A 是伪紧空间相矛盾. 故 X 的每一闭的伪紧子集属于α. ∎

序数空间$[0, \omega_1)$是非紧的伪紧空间(例 1.2.7). 由引理 5.6.12, $C_\alpha([0, \omega_1))$不是 Baire 空间. 然而, $[0, \omega_1)$是局部紧空间. 这说明定理 5.6.11 中 X 的仿紧性不可省略. 由引理 5.6.12, 若$C_p(X)$是Baire空间, 那么X的每一闭伪紧子集是有限的, 因此, X的每一紧子集是有限的.

对于空间 X 的子集族α, 称α的子集β与α分离(move off α), 若对于每一$A\in\alpha$, 存在 $B\in\beta$ 使得 $B\bigcap A=\varnothing$. 空间 X 的子集族$\{F_s\}_{s\in S}$称为强离散的(strongly discrete), 如果存在 X 的离散的开集族$\{G_s\}_{s\in S}$使得每一 $F_s\subset G_s$.

定理 5.6.13 如果 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 那么每一与α分离的子族含有可数的强离散子集族.

证明 设α的子集β与α分离. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $G_n=\bigcup_{B\in\beta}[B, (n, n+1/2)]$, 则 G_n 是 $C_\alpha(X)$的开集. G_n 还是 $C_\alpha(X)$的稠密子集. 事实上, 对于 $C_\alpha(X)$的每一非空基本开集$\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i]$, 存在 $B\in\beta$ 使得 $B\bigcap(\bigcup_{i\le k}A_i)=\varnothing$, 取 $f\in\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i]$, 定义 $g: B\bigcup(\bigcup_{i\le k}A_i)\to\mathbb{R}$使得$g_{|\bigcup_{i\le k}A_i}=f_{|\bigcup_{i\le k}A_i}$, $g(B)=\{n+1/4\}$, 由引理4.5.5, 让 h 是 g 到 X 上的连续扩张, 则 $h\in[B, (n, n+1/2)]\bigcap(\bigcap_{i\le k}[A_i, V_i])$. 因为 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 存在 $p\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $B_n\in\beta$ 使得 $p\in[B_n, (n, n+1/2)]$. 由于每一 $p(B_n)\subset(n, n+1/2)$且$\{(n, n+1/2)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{R}$的离散开集族, 所以$\beta$的子集$\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的强离散子集族. ∎

利用强离散的概念, E. G. Pytkeev[1985]证明了关于 $C_p(X)$Baire 空间性质的优美结果:

$C_p(X)$是 Baire 空间当且仅当 X 的每一有限子集的互不相交序列有强离散的子序列. 这一定理的必要性来自定理 5.6.13, 充分性留到定理 6.3.2 中证明.

练习

5.6.1 如果α是空间 X 的所有非空有限子集的族. 证明: X 是α_R空间当且仅当 X 是离散空间.

5.6.2 设X是半紧空间, 则下述条件相互等价: (1) X 是$\aleph_0$空间; (2) X是cosmic空间; (3) X 的所有紧子集是可度量化的.

5.6.3 设 X 是局部紧空间, 则下述条件相互等价: (1) $C_k(X)$是完全度量空间; (2) $C_k(X)$有可数 tightness; (3) X 是半紧空间.

5.6.4 空间 X 的子集 A 称为 X 的有界集(bounded set), 如果 X 上的每一实值函数在 A 上的限制是有界的. 若 $C_\alpha(X)$是 Baire 空间, 那么 X 的每一有界子集具有紧的闭包.

5.6.5 证明: 局部紧仿紧空间是σ紧空间的拓扑和.