§5.3 权、弱权

空间 X 的非空的开集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的 π 基(π-base), 如果 X 的每一非空开集含有 $\mathscr{B}$ 中的某元. 空间 X 的 π 权(π-weight)定义为 $\pi w(X)=\omega+\min\{|\mathscr{B}|:\mathscr{B}$是 X 的 π 权$\}$. 空间 X 的 α-α 网络权(α-α-netweight)定义为 $\alpha\alpha\,nw(X)=\omega+\min\{|\mathscr{B}|:\alpha$ 的子集 $\mathscr{B}$ 是 X 的 α 网络$\}$.

显然, 对于空间 X, $d(X)\le\pi w(X)\le w(X)$.

引理 5.3.1 对于每一$\{X, \alpha\}$有 $\alpha\alpha\,nw(X)=\alpha\,a(X)\alpha\,nw(X)$.

证明 由定义知 $\alpha\,nw(X)\le\alpha\alpha\,nw(X)$. 因为每一 α 网络是 α 覆盖, 所以 $\alpha\,a(X)\le\alpha\alpha\,nw(X)$, 因而 $\alpha\,a(X)\alpha\,nw(X)\le\alpha\alpha\,nw(X)$.

另一方面, 设 $\lambda=\alpha\,a(X)\alpha\,nw(X)$. 设 α 的子集 $\mathscr{U}$ 是 X 的 α 覆盖且$|\mathscr{U}|\le\lambda$, $\mathscr{B}$ 是 X 的关于有限并封闭的闭 α 网络且$|\mathscr{B}|\le\lambda$, 则 $\mathscr{U}\wedge\mathscr{B}$ 是 α 的子集. 如果 $A\in\alpha$ 且 V 是 A 在 X 中的邻域, 因为 $\mathscr{U}$ 是 X 的 α 覆盖, 存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $A\subset U$, 又因为 $\mathscr{B}$ 是 X 的 α 网络, 存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $A\subset B\subset V$, 于是 $A\subset U\cap B\subset V$, 所以 α 的子集 $\mathscr{U}\wedge\mathscr{B}$ 是 X 的 α 网络, 从而 $\alpha\alpha\,nw(X)\le|\mathscr{U}\wedge\mathscr{B}|\le\lambda$. 故 $\alpha\alpha\,nw(X)=\alpha\,a(X)\alpha\,nw(X)$. ▌

引理 5.3.2 设 G 是拓扑群, 则

(1) $w(G)=\chi(G)d(G)=\chi(G)nw(G)$;

(2) $\pi w(G)=w(G)$.

证明 (1) 显然, $\chi(G)d(G)\le\chi(G)nw(G)\le w(G)$. 下面证明 $w(G)\le\chi(G)d(G)$. 设 $\mathscr{B}$ 是 G 的单位元 e 的由对称元组成的局部基, D 是 G 的稠密子集, 对于 G 的任一非空开集 W 及 $w\in W$, 由于 $g(x, y)=wxy$ 是从 $G\times G$ 到 G 的连续函数, 且 $g(e, e)=w\in W$, 存在 $B\in\mathscr{B}$ 和 $d\in D$ 使得 $wBB\subset W$ 且 $d\in wB$, 于是 $w\in dB^{-1}=dB\subset wBB\subset W$, 所以$\{dB: d\in D, B\in\mathscr{B}\}$是 G 的基, 因而 $w(G)\le\chi(G)d(G)$. 故 $w(G)=\chi(G)d(G)=\chi(G)nw(G)$.

(2) 由(1)和引理 5.2.10, $\pi w(G)\le w(G)=\chi(G)d(G)\le\pi\chi(G)\pi w(G)=\pi w(G)$, 所以 $\pi w(G)=w(G)$. ▌

定理 5.3.3 对于每一$\{X, \alpha\}$有 $w(C_\alpha(X))=\pi w(C_\alpha(X))=\alpha\alpha\,nw(X)$.

证明 由定理 4.3.11 和引理 5.3.2, $w(C_\alpha(X))=\pi w(C_\alpha(X))=\chi(C_\alpha(X))nw(C_\alpha(X))$. 由定理 5.2.11, $\chi(C_\alpha(X))=\alpha\,a(X)$, 由定理 5.1.1, $nw(C_\alpha(X))=\alpha\,nw(X)$, 所以再由引理 5.3.1 知 $w(C_\alpha(X))=\alpha\alpha\,nw(X)$. ▌

由引理 5.3.1, 当 α 由 X 的所有非空的紧子集组成时, $\alpha\alpha\,nw(X)=\omega$ 当且仅当 X 是半紧

的$\aleph_0$空间; 当α由空间X的所有非空的有限子集组成时，$\alpha\alpha$ nw(X)=ω当且仅当X是可数的.

推论 5.3.4 对于每一空间X, $C_k(X)$是第二可数空间当且仅当X是半紧的$\aleph_0$空间. █

推论 5.3.5 对于每一空间X, $C_p(X)$是第二可数空间当且仅当X是可数空间. █

在§5.1中定义了弱权(weak weight), 即空间X的弱权定义为ww(X)=ω+min{w(Y) : 存在从X到空间Y的连续双射}. 定理5.1.6表明空间X的弱权可用以刻画空间$C_\alpha(X)$的稠密度. 下面将刻画$C_\alpha(X)$的弱权. 先证明两个基数不等式.

引理 5.3.6 对于空间X, 则

(1) $|X|\le 2^{w(X)}$;

(2) $w(X)\le 2^{d(X)}$.

证明 (1) 设β是空间X的基且$|\beta|$=w(X). 对于每一$x\in X$, 令$\beta_x=\{B\in\beta : x\in B\}$, 则$\beta_x$是x在X的邻域基, 于是对于($T_0$空间)X中不同的点x和y, $\beta_x\ne\beta_y$. 定义φ: $X\to P(\beta)$(β的幂集)使得$\varphi(x)=\beta_x$, 则φ是单射, 而$|P(\beta)|=2^{w(X)}$, 所以$|X|\le 2^{w(X)}$.

(2) 设D是X的稠密子集且|D|=d(X). 令$\beta=\{\overline{B}^\circ : B\subset D\}$. 因为D是X的稠密子集, 对于X的每一开集U, $U\subset\overline{U}=\overline{U\cap D}$, 于是$\beta$是(正则空间)X的基, 所以$w(X)\le 2^{d(X)}$. █

引入无限基数的对数(logarithm)概念. 对于无限基数λ, 定义 $\log(\lambda)=\min\{\beta : \lambda\le 2^\beta\}$. 引理5.3.6表明$\log(|X|)\le w(X)$, $\log(w(X))\le d(X)$.

引理 5.3.7 对于每一空间X, $\psi(X)\log(nw(X))\le ww(X)$.

证明 显然, $\psi(X)\le ww(X)$(练习5.2.7). 设φ: $X\to Y$是连续的双射且w(Y)=ww(X), 由引理5.3.6(1), $nw(X)\le|X|=|Y|\le 2^{w(Y)}=2^{ww(X)}$, 所以$\log(nw(X))\le ww(X)$, 故$\psi(X)\log(nw(X))\le ww(X)$. █

为了证明关于弱权的主要定理, 还需要引入特殊的度量空间: 刺猬空间(hedgehog, Engelking[1989]).

设无限集合S的基数是κ. 对于每一$s\in S$, 让$\mathbb{I}_s=\mathbb{I}\times\{s\}$. 在集$\bigcup_{s\in S}\mathbb{I}_s$上定义二元关系~如下: (x, s)~ (y, t)当且仅当x=y=0, 或x=y且s=t. 则~是等价关系. 等价类的集合记为J(κ).

定义 d: J(κ)×J(κ)→[0, +∞)使得每一 d([(x, s)], [(y, t)])= $\begin{cases} |x-y|, \text{如果} s=t \\ x+y, \text{如果} s\neq t \end{cases}$, 则 d 是 J($\kappa$)上的距离函数. 度量空间(J($\kappa$), d)称为具有$\kappa$个刺的刺猬(hedgehog of spininess κ).

引理 5.3.8 设κ是无限基数, 则

(1) w(J(κ))=κ;

(2) 每一权为κ的度量空间可嵌入权为κ的度量空间 J(κ)$^{\omega}$;

(3) 每一权为 2^{κ}的度量空间的弱权不超过κ.

证明 (1) 由于$\{B_d([(r, s)], q) : s\in S, r, q\in \mathbb{Q}, r\in \mathbb{I}, q>0\}$是J($\kappa$)的基, 所以 w(J($\kappa$))≤$\kappa$. 又由于$\{B_d([(1, s)], 1) : s\in S\}$是 J($\kappa$)的基数为$\kappa$的不相交的开集族, 于是 w(J($\kappa$))≥$\kappa$. 故 w(J($\kappa$))=$\kappa$.

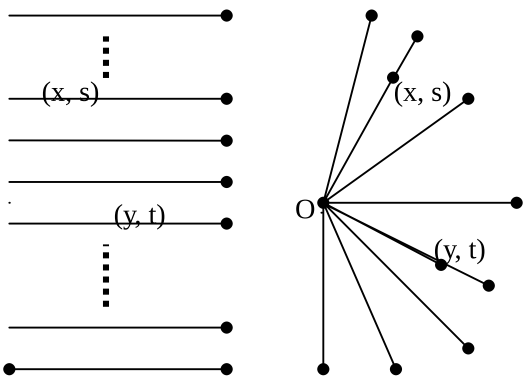

图 刺猬空间 J(κ)

(2) 设X是权为κ的度量空间, 则X具有σ离散基 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{B}_n$, 其中每一$\mathscr{B}_n=\{U_s\}_{s\in S_n}$是 X 的离散开集族. 让 $S=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}S_n$, 不妨设|S|=$\kappa$. 对于每一 s∈S, 定义 $j_s : \mathbb{I}\to$ J(κ)使得每一 j_s(x)=[(x, s)], 则 j_s是嵌入. 对于每一 n∈ℕ和 $s\in S_n$, 因为 X 是度量空间, 存在 $f_s\in C(X, \mathbb{I})$使得 $U_s=f_s^{-1}((0, 1])$(练习 2.2.3). 定义 g_n: X→J(κ)使得当 $x\in U_s$时 $g_n(x)=j_s f_s(x)$, 当 $x\in X\setminus \bigcup_{s\in S_n}U_s$时 $g_n(x)=j_{s_0}(0)$, 其中固定 $s_0\in S$. 则当 $x\in \overline{U_s}$ 时仍有 $g_n(x)=j_s f_s(x)$. 由于$\{\overline{U_s}\}_{s\in S_n}$是 X 的离散闭集族, 于是 g_n是连续函数. 又由于$\mathscr{B}$是X的基, 易验证函数列$\{g_n\}$分离 X 的点与闭集. 由对角线引理(定理

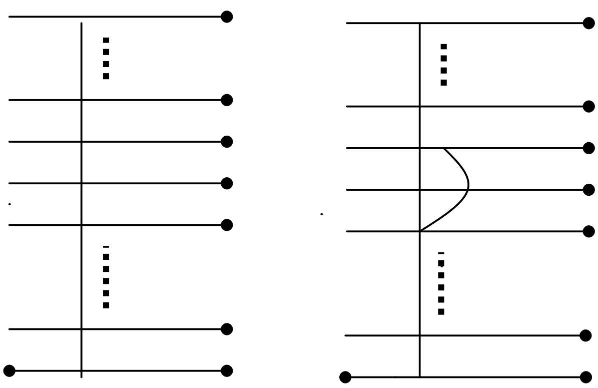
图 从 J(2^{κ})到 K(2^{κ})的连续单射

4.5.2), 对角线函数Δ: X$\to$J(κ)$^{\omega}$是嵌入. 由引理 5.0.1, w(J(κ)$^{\omega}$)=max{w(J(κ)), ω}=κ, 所以 J(κ)$^{\omega}$是权为κ的度量空间. 故 X 可嵌入权为κ的度量空间 J(κ)$^{\omega}$.

(3) 设 X 是权为 2^{κ} 的度量空间. 由(2), X 可嵌入刺猬空间 J(2^{κ})的可数次积空间 J(2^{κ})$^{\omega}$. 令 K(2^{κ})=$\mathbb{I}\times 2^{\kappa}$, 其中 2^{κ} 是具有两个点的离散空间的κ次积空间, 则存在从 J(2^{κ})到 K(2^{κ})的自然的连续单射(练习 5.3.1), 于是存在从 J(2^{κ})$^{\omega}$ 到 K(2^{κ})$^{\omega}$ 的连续单射, 所以 ww(X)$\le$w(K(2^{κ})$^{\omega}$)=max{ω, w(K(2^{κ}))=w(2^{κ})=κ. ∎

定理 5.3.9 对于每一{X, α}有 ww(C_{α}(X))=wαc(X)log(αnw(X)).

证明 由定理 5.2.3 和定理 5.1.1, ψ(C_{α}(X))=wαc(X), nw(C_{α}(X))=αnw(X). 又由引理 5.3.7, ψ(C_{α}(X))log(nw(C_{α}(X)))$\le$ww(C_{α}(X)), 所以 wαc(X)log(αnw(X))$\le$ww(C_{α}(X)).

另一方面, 为了证明 ww(C_{α}(X))$\le$wαc(X)log(αnw(X)), 设λ=wαc(X), γ=log(αnw(X)). 于是存在α的子集$\{A_t\}_{t\in T}$使得|T|$\le\lambda$且$\bigcup_{t\in T}A_t$稠密于 X. 对于每一 t$\in$T, 下面证明 ww(C_{α}(A_t))$\le\gamma$. 由于 $A_t\in\alpha$, 所以 C_{α}(A_t)是可度量化的, 于是 w(C_{α}(A_t))=d(C_{α}(A_t)). 又由定理 4.5.7(1)和引理 5.1.5, 包含函数 i: $A_t\to$X 诱导了连续的满射 i*:C_{α}(X)$\to C_{\alpha}$(A_t), 于是 d(C_{α}(A_t))$\le$d(C_{α}(X)). 再由定理 5.1.1, d(C_{α}(X))$\le$nw(C_{α}(X))=αnw(X)$\le 2^{\gamma}$. 从而度量空间 C_{α}(A_t)的权不超过 2^{γ}. 由引理 5.3.8, ww(C_{α}(A_t))$\le\gamma$.

让 Y=$\oplus_{t\in T}A_t$, p: Y$\to$X 是自然函数, 则 p 是几乎满的, 由定理 4.5.6(1)和定理 4.5.7(1), 诱导函数 p*: C_{α}(X)$\to C_{\alpha}$(Y)是连续单射, 再由定理 4.5.16, C_{α}(Y)同胚于$\prod_{t\in T}C_{\alpha}(A_t)$, 于是 ww($C_{\alpha}$(X))$\le$ww($C_{\alpha}$(Y))=ww($\prod_{t\in T}C_{\alpha}(A_t)$)$\le\sum_{t\in T}$ww($C_{\alpha}$($A_t$))(练习 5.3.2)$\le\lambda\gamma$. 故 ww($C_{\alpha}$(X))=w$\alpha$c(X)log($\alpha$nw(X)). ∎

由引理 5.3.6(2), αnw(X)$\le$w(X)$\le 2^{d(X)}$, 所以 log(αnw(X))$\le$d(X), 从而 d(X)log(αnw(X))=d(X). 若α是 X 的所有非空有限集组成的族, 则 wαc(X)=d(X), 于是由定理 5.3.9, 有下述推论, 它是定理 5.1.6 关于点态收敛拓扑的对偶定理.

推论 5.3.10 对于每一空间 X, $ww(C_p(X))=d(X)$. 特别地, $C_p(X)$有较粗的可分度量拓扑当且仅当 X 是可分空间(推论 5.2.5). ▮

定理 5.3.9 的等价命题是 $ww(C_\alpha(X))\le\lambda$ 当且仅当 $w\alpha c(X)\le\lambda$ 且 $\alpha nw(X)\le 2^\lambda$.

推论 5.3.11 对于每一空间 X, $C_k(X)$有较粗的可分度量拓扑当且仅当 X 是几乎σ紧空间且 $knw(X)\le 2^\omega$. ▮

练习

5.3.1 证明: 从 $J(2^\kappa)$到 $K(2^\kappa)$的自然单射是连续的(引理 5.3.8).

5.3.2 对于积空间$\prod_{s\in S}X_s$, 证明: $ww(\prod_{s\in S}X_s)\le\sum_{s\in S}ww(X_s)$.

5.3.3 证明: $C_k(S_\omega)$, $C_k(S_2)$都是可分度量空间.

§5.4 Tightness、扇 tightness

空间 X 的 tightness 定义为 $t(X)=\sup\{t(X, x): x\in X\}$, 其中 X 在 x 的 tightness 是 $t(X, x)=\omega+\min\{\lambda$: 对于 X 的子集 Y, 若 $x\in\overline{Y}$, 存在 Y 的子集 Z 使得$|Z|\le\lambda$ 且 $x\in\overline{Z}\}$. 若 $t(X)=\omega$, 则称空间 X 有可数 tightness(countable tightness). 序列空间或遗传可分空间都有可数 tightness(练习 5.4.1).

空间 X 的α-Lindelöf 数(α-Lindelöf number)定义为$\alpha L(X)=\omega+\min\{\lambda$: X 的每一开α覆盖有基数不超过λ的α子覆盖}. 如果α由 X 的所以单点集组成, 那么 X 的α-Lindelöf 数称为 X 的 Lindelöf 数(Lindelöf number), 并且记为 L(X). X 是 Lindelöf 空间当且仅当 $L(X)=\omega$.

定理 5.4.1 (McCoy, Ntantu[1988])对于每一{X, α}有 $t(C_\alpha(X))=\alpha L(X)$.

证明 记$\lambda=t(C_\alpha(X))$, 让$\mathscr{U}$是空间 X 的开α覆盖. 对于每一 $A\in\alpha$, 存在 $U_A\in\mathscr{U}$使得 $A\subset U_A$, 选取 $f_A\in C(X)$使得 $f_A(A)=\{0\}$且 $f_A(X\setminus U_A)\subset\{1\}$. 若 V 是ℝ中 0 的邻域, 则 $f_A\in[A, V]$. 令 $F=\{f_A: A\in\alpha\}\subset C_\alpha(X)$, 那么零函数 $f_0\in\overline{F}$. 因而存在 F 的子集 F’使得 $|F'|\le\lambda$ 且 $f_0\in\overline{F'}$. 令$\mathscr{V}=\{U_A: f_A\in F'\}$. 下面证明$\mathscr{V}$是$\mathscr{U}$的$\alpha$子覆盖. 设$A\in\alpha$, 让$W=[A, (-1, 1)]$, 则 W 是$f_0$的邻域, 于是存在$B\in\alpha$使得$f_B\in F'\cap W$. 对于每一$x\in A$, $f_B(x)<1$, 如果

$x\in X\setminus U_B$，则 $f_B(x)=1$，所以 $A\subset U_B$，因而 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的α子覆盖且$|\mathscr{V}|\le\lambda$. 这表明$\alpha L(X)\le t(C_\alpha(X))$.

下面证明$t(C_\alpha(X))\le\alpha L(X)$，让$\kappa=\alpha L(X)$. 由定理4.3.11和引理4.2.2, $C_\alpha(X)$是齐性空间，所以只须证明 $t(C_\alpha(X), f_0)\le\kappa$. 设 G 是 $C_\alpha(X)$的子集且 $f_0\in\overline{G}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$和$A\in\alpha$，选取 $g_{n,A}\in G\cap[A, (-1/n, 1/n)]$，让 $W(n, A)=\{x\in X : |g_{n,A}(x)|<1/n\}$，则 $A\subset W(n, A)$，所以集族$\mathscr{W}_n=\{W(n, A) : A\in\alpha\}$是X的开$\alpha$覆盖，于是$\mathscr{W}_n$有基数不超过$\kappa$的$\alpha$子覆盖$\mathscr{V}_n$. 定义 $G'=\{g_{n,A} : n\in\mathbb{N}, A\in\alpha$ 且 $W(n, A)\in\mathscr{V}_n\}$. 显然，$G'\subset G$, $|G'|\le\kappa$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$和$B\in\alpha$，存在$A\in\alpha$使得$B\subset W(n, A)\in\mathscr{V}_n$，于是$g_{n,A}\in[B, (-1/n, 1/n)]\cap G'$，所以$f_0\in\overline{G'}$，从而 $t(C_\alpha(X), f_0)\le\kappa$. 故$t(C_\alpha(X))\le\kappa$. ▌

推论 5.4.2 (McCoy[1980b])空间 $C_k(X)$有可数 tightness 当且仅当 X 的每一开 k 覆盖有可数 k 子覆盖. ▌

推论 5.4.3 (Arhangel'skiǐ[1976]-Pytkeev[1982] 定理) 对于每一空间 X, $t(C_p(X))=\sup\{L(X^n) : n\in\mathbb{N}\}$. 特别地, $C_p(X)$有可数 tightness 当且仅当对于每一$n\in\mathbb{N}$，积空间 X^n是 Lindelöf 空间.

证明 设存在基数λ使得对于每一$n\in\mathbb{N}$, $L(X^n)\le\lambda$. 让$\mathscr{U}$是X的开ω覆盖. 对于每一$n\in\mathbb{N}$，让$\mathscr{U}_n=\{U^n\subset X^n : U\in\mathscr{U}\}$，由于$\{x_1, x_2,\dots, x_n\}\subset U$ 当且仅当$(x_1, x_2,\dots, x_n)\in U^n$，则 $\mathscr{U}_n$是 X^n 的开覆盖. 设 $\mathscr{U}'_n$是 $\mathscr{U}_n$的基数不超过λ的子覆盖，则$\{U$: 存在 $n\in\mathbb{N}$使得$U^n\in\mathscr{U}'_n\}$是$\mathscr{U}$的基数不超过λ的ω子覆盖. 由定理 5.4.1, $t(C_p(X))\le\lambda$.

反之，设 X 的每一开ω覆盖有基数不超过κ的ω子覆盖. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，如果 $\mathscr{W}$ 是 X^n的开覆盖，让$\mathscr{V}=\{V\subset X : V$是X的开集且$V^n$被$\mathscr{W}$的有限个元覆盖$\}$，则$\mathscr{V}$是X的开$\omega$覆盖. 事实上，设$\{x_1, x_2,\dots, x_m\}\subset X$，存在 $W_{i_1i_2\dots i_m}\in\mathscr{W}$使得$(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})\in W_{i_1i_2\dots i_m}$，其中每一 $i_j\in\{1, 2, \dots, m\}$且 $j\le m$，又存在 X 的开集 V_{i_j} 使得$(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m})\in\prod_{j\le m}V_{i_j}\subset W_{i_1i_2\dots i_m}$. 对于每一 $k\le m$，让 $V_k=\bigcap\{V_{i_j} : i_j=k\}$. 令 $V=\bigcup_{k\le m}V_k$，则 V

是 X 的开集，$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset V$ 且 $V^n \subset \bigcup\{\prod_{j\le m} V_{i_j} : i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}, j\le m\} \subset \bigcup\{W_{i_1 i_2 \ldots i_m} : i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}, j\le m\}$. 因而$\mathscr{V}$是 X 的开$\omega$覆盖，所以$\mathscr{V}$有基数不超过$\kappa$的$\omega$子覆盖$\mathscr{V}'$，于是$\{V^n : V\in\mathscr{V}'\}$是 X^n 的基数不超过κ的开覆盖，从而$\mathscr{W}$有基数不超过κ的子覆盖．故 $L(X^n)\le\kappa$. ∎

例 5.4.4 Sorgenfrey 直线(Sorgenfrey[1947]): Lindelöf 空间 S 使得 S^2 不是 Lindelöf 空间.

取 S 为实数集ℝ，以$\{[a, b) : a, b\in S\}$为基生成 S 的拓扑称为右半开区间拓扑(right half-open interval topology)，S 赋予右半开区间拓扑称为 Sorgenfrey 直线(Sorgenfrey line)．因为$(a, b)=\bigcup_{a<c<b}[c, b)$，所以ℝ的欧几里得开集是右半开区间拓扑的开集．显然，S 是第一可数的可分正则空间.

S 是 Lindelöf 空间．设$\{U_t\}_{t\in T}$是 S 的开覆盖．每一 U_t 在ℝ的通常拓扑下的内部记为 U_t°，令 $U=\bigcup_{t\in T} U_t^\circ$．由于实数空间是遗传 Lindelöf 空间(即，每一子空间是 Lindelöf 空间)，所以子空间 U 的开覆盖$\{U_t^\circ\}_{t\in T}$具有可数子覆盖$\{U_{t_i}^\circ\}_{i\in\mathbb{N}}$，置 $F=S\setminus U$，则 F 是可数集．事实上，对于每一 $a\in F$，存在 $t\in T$ 和 $c<b$ 使得 $a\in[c, b)\subset U_t$，于是 $a=c$，并且存在 $b_a>a$ 使得$(a, b_a)\cap F=\varnothing$，从而$\{(a, b_a) : a\in F\}$是ℝ的互不相交的开区间集，故 F 是可数的．这表明$\{U_t\}_{t\in T}$存在可数的子覆盖．因此，S 是 Lindelöf 空间.

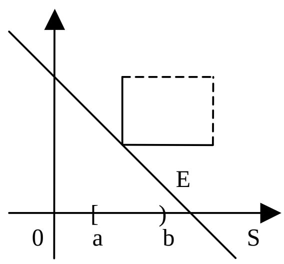

图 Sorgenfrey 直线 S 的积空间

S^2 不是Lindelöf空间．令$E=\{(x, y)\in S^2 : x+y=1\}$，则 E 是 S^2 不可数的闭离散子空间，所以 S^2 不是 Lindelöf 空间．这时 S 是 cosmic 空间.

由推论 5.2.5，$C_p(S)$具有较粗的可分度量拓扑．由推论 5.4.3，$C_p(S)$不具有可数 tightness.

∎

定理 5.4.5 (Asanov 定理[1983])对于每一空间 X，$\sup\{t(X^n) : n\in\mathbb{N}\}\le L(C_p(X))$.

证明 设 $\lambda=L(C_p(X))$．对于每一 $n\in\mathbb{N}$，要证明 $t(X^n)\le\lambda$．设 $x=(x_1, x_2, \ldots,$

$x_n)\in \overline{A}\subset X^n$，选取 X 的开集 U_1，$U_2,\ldots$，U_n 满足条件(*)：每一 $x_i\in U_i$，且如果 $x_i=x_j$，则 $U_i=U_j$；如果 $x_i\neq x_j$，则 $U_i\cap U_j=\varnothing$.

令 $U=\prod_{i\le n}U_i$，则 U 是 x 在 X^n 中的开邻域. 由于 $x\in\overline{A\cap U}$，不妨设 $A\subset U$. 置 $F=\{f\in C_p(X):f(x_i)=1,\ \forall\, i\le n\}$. 对于每一 $y=(y_1,\ y_2,\ldots,\ y_n)\in A$，让 $V_y=\{g\in C_p(X):g(y_i)>0,\ \forall\, i\le n\}$. 对于每一 $f\in F$，$i\le n$，让 $f_i=f$，并令 $\phi_n=\prod_{i\le n}f_i$：$X^n\to\mathbb{R}^n$，则 ϕ_n 连续且 $\phi_n(x)=(1, 1, \ldots, 1)$，因为 $x\in\overline{A}$，存在 $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in A$ 使得对于每一 $i\le n$ 有 $f(y_i)>0$. 从而 $F\subset\bigcup_{y\in A}V_y$. 由于 F 是 $C_p(X)$ 的闭集，所以 $L(F)\le\lambda$，存在 A 的子集 B 使得 $|B|\le\lambda$ 且 $F\subset\bigcup_{y\in B}V_y$. 下面证明 $x\in\overline{B}$. 若不然，存在 X 的开集族 $\{U_i'\}_{i\le n}$ 使得每一 $U_i'\subset U_i$，$(\prod_{i\le n}U_i')\cap B=\varnothing$ 且满足相应的条件(*). 由 X 的完全正则性，存在 $g\in C_p(X)$ 使得 $g\in F$ 且 $g(X\setminus\bigcup_{i\le n}U_i')\subset\{0\}$，于是存在 $y\in B$ 使得 $g\in V_y$. 由于 $y\in A\subset U$，所以 $y_i\in U_i$，又由于 $g(y_i)>0$ 且当 $x_i\neq x_j$ 时 $U_i\cap U_j=\varnothing$，所以 $y_i\in U_i'$，从而 $y\in(\prod_{i\le n}U_i')\cap B$，矛盾. 因此 $x\in\overline{B}$，故 $t(X^n)\le\lambda$. ▌

Asanov(M. O. Асанов)定理中的不等号可能成立. 如，让 X 是不可数的离散空间，那么每一 $t(X^n)=\omega$，但是 $C_p(X)=\mathbb{R}^X$ 不是 Lindelöf 空间(推论 6.1.3). 下述例子说明，即使对第一可数的紧空间推论 5.4.3 的对偶命题也是不成立的.

例 5.4.6 双箭空间(Arhangel'skiĭ[1992])：第一可数的紧空间 X 使得 $C_p(X)$ 含有不可数的闭离散子空间.

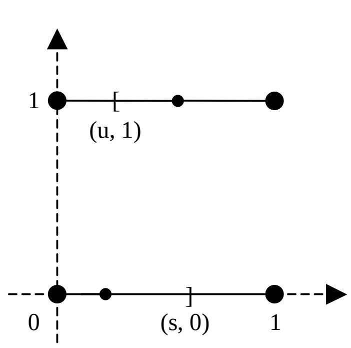

图 双箭空间

让 $X=\mathbb{I}\times\{0,\ 1\}$. 集合 X 上定义字典序(lexicographic ordering)“<”如下：对于(s, t)，(u, v)$\in$X，(s, t)<(u, v)当且仅当 s<u，或者 s=u 且 t<v. 序集(X, <)赋予序拓扑(例 1.2.7)称为双箭空间(two arrows space). 对于每一 x=(s, t)$\in$X，若 t=0，则 x 在 X 中的一个局部基的元是形如[(s-1/n, 1), x]=$\{y\in X:(s-1/n, 1)\le y\le x\}$的开闭集；若 t=1，则 x 在 X 中的一个局部基的元是形如[x, (s+1/n, 0)]的开闭集. 于是 X 是第一可数空间的正则空间. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖，

让 $Y=\{y\in X:[(0,0),y]$被 $\mathscr{U}$ 有限覆盖$\}$, $Y_0=\{s\in\mathbb{I}$: 存在 $t\in\{0,1\}$使得$(s,t)\in Y\}$. 则 Y_0是$\mathbb{I}$的非空子集, 设 u 是 Y_0在$\mathbb{I}$中的上确界, 则$(u,0)$或$(u,1)$是 Y 在 X 中的上确界. 这时必有$(u,1)=\sup Y$. 再由点$(u,1)$局部基的构造及 Y 的定义知, $u=1$, 从而 X 是紧空间.

对于每一$s\in\mathbb{I}$, 定义$f_s:X\to\mathbb{R}$使得当$x\le(s,0)$时$f_s(x)=0$, 当$x\ge(s,1)$时$f_s(x)=1$, 则f_s连续. 置$S=\{f_s:0<s<1\}$. $U_s=\{f\in C_p(X)$: 若$x\in\{(s,0),(s,1)\}$, 则$|f(x)-f_s(x)|<1/2\}$, 那么U_s是f_s在$C_p(X)$中的开邻域且$U_s\cap S=\{f_s\}$, 于是 S 是$C_p(X)$的离散子空间. 在点态收敛拓扑下, S 在$\mathbb{R}^X$中的极限点形如 f_s^-, 或 f_s^+, 其中当 $x<(s,0)$时 $f_s^-(x)=1$, 当 $x\ge(s,0)$时 $f_s^-(x)=0$; 当 $x\le(s,1)$时 $f_s^+(x)=1$, 当 $x>(s,1)$时 $f_s^+(x)=0$. 由于每一 f_s^-, $f_s^+\notin S$, 所以 S 是 $C_p(X)$的闭子集. 故 $C_p(X)$含有不可数的闭离散子空间. 因此, $C_p(X)$不是 Lindelöf 空间. ∎

空间 X 的扇 tightness(fan tightness, Arhangel'skiĭ[1986])定义为 $ft(X)=\sup\{ft(X,x):x\in X\}$, 其中 X 在 x 的扇 tightness 是 $ft(X,x)=\omega+\min\{\lambda$: 对于 X 的子集列$\{A_n\}$和$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 存在 A_n 的基数小于λ 的子集 B_n $(\forall n\in\mathbb{N})$使得 $x\in\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n}$ $\}$. 称空间 X 有可数扇 tightness(countable fan tightness), 如果 $ft(X)=\omega$. Arhangel'skiĭ[1986]把扇 tightness 的基数函数记为 vet(X).

显然, $t(X)\le ft(X)\le\chi(X)$. 对于序列扇 S_ω, $t(S_\omega)=\aleph_0<ft(S_\omega)$.

定理 5.4.7 对于每一$\{X,\alpha\}$下述条件相互等价:

(1) $C_\alpha(X)$有可数扇 tightness;

(2) $C_\alpha^\omega(X)$有可数扇 tightness;

(3) X 的每一开α覆盖列$\{\mathscr{U}_n\}$, 存在 $\mathscr{U}_n$ 的有限子集 $\mathscr{U}'_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$使得$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{U}'_n$是 X 的$\alpha$覆盖.

证明 (1)$\Rightarrow$(3). 设$\{\mathscr{U}_n\}$是空间 X 的开α覆盖列. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 让 $A_n=\{f\in C_\alpha(X)$: 存在 $U\in\mathscr{U}_n$ 使得 $f(X\setminus U)\subset\{0\}\}$, 则 A_n 是 $C_\alpha(X)$的稠密子集. 事实上, 对于 $C_\alpha(X)$的任一非空基本开集$\bigcap_{i\le m}[K_i,V_i]$, 取定$f\in\bigcap_{i\le m}[K_i,V_i]$, 因为$\mathscr{U}_n$是 X 的$\alpha$ 覆盖, 存在$U\in\mathscr{U}_n$使得$\bigcup_{i\le m}K_i\subset U$. 由引理 4.5.5, 存在 $g\in C_\alpha(X)$满足 $g_{|\bigcup_{i\le m}K_i}=f_{|\bigcup_{i\le m}K_i}$ 且 $g(X\setminus U)\subset\{0\}$, 则

$g\in A_n\bigcap(\bigcap_{i\le m}[K_i, V_i])$.

取定 $f_1\in C_\alpha(X)$使得 $f_1(X)=\{1\}$，则 $f_1\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$，由于 $C_\alpha(X)$有可数扇 tightness，存在每一 A_n 的有限子集 B_n 使得 $f_1\in\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n}$，记 $B_n=\{f_{n,j}\}_{j\le i(n)}$，存在 $U_{n,j}\in\mathcal{U}_n$ 使得 $f_{n,j}(X\setminus U_{n,j})\subset\{0\}$，再记 $\mathcal{U}'_n=\{U_{n,j}\}_{j\le i(n)}$. 下面证明$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}'_n$是 X 的$\alpha$覆盖. 对于每一 $A\in\alpha$，因为 $f_1\in[A, (0, 2)]$，存在 $n\in\mathbb{N}$，$j\le i(n)$使得 $f_{n,j}\in[A, (0, 2)]$，则 $A\subset U_{n,j}$，所以$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{U}'_n$是 X 的$\alpha$覆盖.

(3)$\Rightarrow$(2). 由定理 4.5.18, $C^\omega_\alpha(X, \mathbb{R})$同胚于 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$，所以只须证明 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$有可数扇 tightness. 由定理 4.3.11 和引理 4.2.2, $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$是齐性空间, 因而又只须证明 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$在点 f_0(零函数)有可数扇 tightness. 设 $f_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$，其中每一 A_n 是 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$的子集. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，置 $\mathcal{U}_n=\{f^{-1}(O_n): f\in A_n\}$，其中$\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{R}^\omega$中点 O=(0, 0, …)的可数递减的局部基，则$\mathcal{U}_n$是 X 的开α覆盖. 事实上，对于每一$A\in\alpha$, $f_0\in[A, O_n]$，于是存在$f\in[A, O_n]\bigcap A_n$，从而 $A\subset f^{-1}(O_n)$. 置 $M=\{n\in\mathbb{N}: X\in\mathcal{U}_n\}$. 若 M 是无限集，对于 f_0的任一基本邻域[A, V]，存在$m\in M$使得$O_m\subset V$，由$\mathcal{U}_m$的构造，存在$g_m\in A_m$使得$X=g_m^{-1}(O_m)$，从而 $g_m(X)\subset O_m$，于是$g_m\in[A, V]$，故$C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$中的序列$\{g_m\}_{m\in M}$收敛于 f_0，故命题成立. 若 M 是有限集，则存在 $n_0\in\mathbb{N}$使得当 $m\ge n_0$时，对于每一 $g\in A_m$有 $g^{-1}(O_m)\ne X$. 而$\{\mathcal{U}_m\}_{m\ge n_0}$是 X 的开$\alpha$覆盖列，由假设，存在$\mathcal{U}_m$的有限子集$\mathcal{U}'_m$使得$\bigcup_{m\ge n_0}\mathcal{U}'_m$是 X 的开$\alpha$覆盖. 记 $\mathcal{U}'_m=\{U_{m,j}\}_{j\le i(m)}$，那么存在 $f_{m,j}\in A_m$ 使得 $U_{m,j}=f^{-1}_{m,j}(O_m)$. 下面证明 $f_0\in\overline{\{f_{m,j}: m\ge n_0, j\le i(m)\}}$. 对于 f_0的任一基本邻域[A, V]，让 $H=\{(m, j)\in\mathbb{N}^2: m\ge n_0$, $j\le i(m)$且 $A\subset U_{m,j}\}$. 显然 $H\ne\varnothing$. 若 H 是有限集，对于每一$(m, j)\in H$，因为 $U_{m,j}\ne X$，取 $x_{m,j}\in X\setminus U_{m,j}$. 则存在 $K\in\alpha$使得$A\bigcup\{x_{m,j}: (m, j)\in H\}\subset K$，那么$\bigcup_{m\ge n_0}\mathcal{U}'_m$中不存在元素含有 K，这与$\bigcup_{m\ge n_0}\mathcal{U}'_m$是 X 的$\alpha$覆盖相矛盾. 于是 H 是无限集，因而存在$m\ge n_0$, $j\le i(m)$使得 $A\subset U_{m,j}=f^{-1}_{m,j}(O_m)$且 $O_m\subset V$，于是 $f_{m,j}(A)\subset V$，即 $f_{m,j}\in[A, V]$，所以

$f_0\in\overline{\{f_{m,j}:m\geq n_0, j\leq i(m)\}}$.

由闭遗传性质知(2)$\Rightarrow$(1)是显然的. █

定理 5.4.7 关于紧开拓扑的情形见林寿, 刘川和滕辉[1994]. 下面继续讨论可数扇 tightness 的推广. 称空间 X 有可数强扇 tightness(countable strong fan tightness, Sakai(酒井政美)[1988]), 如果对于每一 $x\in X$ 及 X 的子集列$\{A_n\}$使得 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 存在 $x_n\in A_n$ ($\forall n\in\mathbb{N}$)使得 $x\in\overline{\{x_n:n\in\mathbb{N}\}}$.

显然, 第一可数空间有可数强扇 tightness, 可数强扇 tightness 是可数扇 tightness.

定理 5.4.8 对于每一$\{X, \alpha\}$下述条件相互等价:

(1) $C_\alpha(X)$有可数强扇 tightness;

(2) $C_\alpha^\omega(X)$有可数强扇 tightness;

(3) X 的每一开α覆盖列$\{\mathscr{U}_n\}$, 存在 $U_n\in\mathscr{U}_n$ ($\forall n\in\mathbb{N}$)使得$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的α覆盖.

证明 (1)$\Rightarrow$(3). 设$\{\mathscr{U}_n\}$是空间 X 的开α覆盖列. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 置$A_n=\{f\in C_\alpha(X)$: 存在 $U\in\mathscr{U}_n$ 使得 $f(X\setminus U)\subset\{0\}\}$, 则$\overline{A}_n=C_\alpha(X)$(见定理 5.4.7 中(1)$\Rightarrow$(3)的证明). 令 h 是 X 上取值恒为 1 的常值函数, 则 $h\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$. 由于 $C_\alpha(X)$有可数强扇 tightness, 存在 $f_n\in A_n$ ($\forall n\in\mathbb{N}$)使得 $h\in\overline{\{f_n:n\in\mathbb{N}\}}$, 又由 A_n 的定义, 存在 $U_n\in\mathscr{U}_n$ 使得 $f_n(X\setminus U_n)\subset\{0\}$. 对于每一$A\in\alpha$, 因为$h\in[A, (0, 2)]$, 存在$m\in\mathbb{N}$使得$f_m\in[A, (0, 2)]$, 则$A\subset U_m$, 所以$\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是 X 的$\alpha$覆盖.

(3)$\Rightarrow$(2). 只须证明 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$在点 f_0(零函数)有可数强扇 tightness. 设$\{A_n\}$是空间 $C_\alpha(X, \mathbb{R}^\omega)$的子集列且 $f_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathscr{U}_n=\{f^{-1}(O_n): f\in A_n\}$, 其中$\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{R}^\omega$中点 O=(0, 0, …)的可数递减的局部基, 则$\mathscr{U}_n$是 X 的开α覆盖. 置$M=\{n\in\mathbb{N}: X\in\mathscr{U}_n\}$. 若 M 是无限集, 对于 f_0 的任一基本邻域[A, V], 存在$m\in M$ 使得 $O_m\subset V$, 由 $\mathscr{U}_m$ 的构造, 存在 $g_m\in A_m$ 使得 $X=g_m^{-1}(O_m)$, 从而 $g_m(X)\subset O_m$, 于是 $g_m\in[A, V]$, 故 $C_\alpha(X)$中的序列$\{g_m\}_{m\in M}$收敛于 f_0. 若 M 是有限集, 则存在 $n_0\in\mathbb{N}$使得当 $m\geq n_0$时, 对于每一

$g\in A_m$有 $g^{-1}(O_m)\neq X$. 而$\{\mathscr{U}_m\}_{m\geq n_0}$是 X 的开$\alpha$覆盖列, 由假设, 存在 $U_m\in\mathscr{U}_m$使得$\{U_m\}_{m\geq n_0}$是 X 的开α覆盖. 那么存在 $f_m\in A_m$使得 $U_m=f_m^{-1}(O_m)$. 下面证明$f_0\in\overline{\{f_m:m\geq n_0\}}$. 对于 f_0的任一基本邻域[A, V], 让 $\mathscr{U}=\{U_m : A\subset U_m, m\geq n_0\}$. 显然$\mathscr{U}\neq\varnothing$. 若$\mathscr{U}$是有限集, 设 $\mathscr{U}=\{U_{m_j} : j\leq k\}$, 对于每一 $j\leq k$, 因为 $U_{m_j}\neq X$, 取 $x_{m_j}\in X\setminus U_{m_j}$. 则存在 $K\in\alpha$使得 $A\bigcup\{x_{m_j} : j\leq k\}\subset K$, 那么$\{U_m\}_{m\geq n_0}$中不存在元素含有 K, 这与$\{U_m\}_{m\geq n_0}$是X的$\alpha$覆盖相矛盾. 于是$\mathscr{U}$是无限集, 因而存在$m\geq n_0$使得$A\subset U_m$且$O_m\subset V$, 于是 $A\subset U_m=f_m^{-1}(O_m)$, 所以 $f_m(A)\subset O_m$, 从而 $f_m\in[A, O_m]\subset[A, V]$, 故$f_0\in\overline{\{f_m:m\geq n_0\}}$.

由闭遗传性质知(2)$\Rightarrow$(1)是显然的. ▌

定理 5.4.8 关于点态收敛拓扑的情形见 M. Sakai[1988], 关于紧开拓扑的情形见林寿, 刘川[1993].

练习

5.4.1 序列空间或遗传可分空间都有可数 tightness.

5.4.2 证明: 函数空间$C_p(X)$有可数 tightness 当且仅当积空间$C_p^{\omega}(X)$有可数 tightness.

5.4.3 设 X 是第二可数空间, 证明: $C_k(X)$有可数 tightness.

5.4.4 函数空间$C_\alpha(X)$有可数强扇 tightness 当且仅当对于每一$f\in C_\alpha(X)$及$C_\alpha(X)$中递减的集列$\{A_n\}$, 若$f\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A}_n$, 则存在$f_n\in A_n(\forall n\in\mathbb{N})$使得$f\in\overline{\{f_n:n\in\mathbb{N}\}}$.