§4.3 集开拓扑

本章的第三、四节介绍函数空间的拓扑. 对于空间 X 和 L, 记 C(X, L)是从 X 到 L 的全体连续函数的集合. 在不引起混淆时也记 C(X, L)=C(X), 而对于实数空间$\mathbb{R}$, 总是记 C(X)=C(X, $\mathbb{R}$). 对于 $A\subset X$ 和 $B\subset L$, 记$[A, B]=\{f\in C(X, L) : f(A)\subset B\}$. 易验证$[A, B_1\cap B_2]=[A, B_1]\cap[A, B_2]$, 且$[A_1\cup A_2, B]=[A_1, B]\cap[A_2, B]$. 如果 $x\in X$ 且 $B\subset L$, 简记$[\{x\}, B]=[x, B]$.

回忆网络的概念(定义 2.3.6). 设 X 是拓扑空间, X 的非空子集的族α称为 X 的网络, 若对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $A\in\alpha$ 使得 $x\in A\subset U$. 若 X 的网络α中的每一元是 X 的闭集(紧集), 则称α是 X 的闭网络(紧网络).

定义 4.3.1 C(X, L)的拓扑称为集开拓扑(set-open topology; Arens, Dugundji[1951]), 如果存在空间 X 的闭网络α 使得$\delta=\{[A, V] : A\in\alpha$ 且 V 是 L 中的开集$\}$作为这拓扑的子基. 具有这拓扑的连续函数空间(space of continuous functions)记为 $C_\alpha(X, L)$. X 称为底拓扑空间(underlying topological space)或底空间. δ 称为 $C_\alpha(X, L)$的基本子基(basic subbase), 而δ中有限个元的交集称为 $C_\alpha(X, L)$的基本开集. 如果 Z 是 X 的子空间, 那么用 $C_\alpha(Z, L)$表示 $C_\beta(Z, L)$, 其中 $\beta=\alpha_{|Z}$.

如果将 X 的闭网络取为 X 的有限集(或单点集)的全体, 所生成的 C(X, L)的集开拓扑称为点开拓扑(point-open topology)或点态收敛拓扑(或点式收敛拓扑, pointwise convergence topology 或 topology of pointwise convergence), 具有这拓扑的连续函数空间记为 $C_p(X, L)$. 另一方面, 如果将 X 的闭网络取为 X 的所有非空紧集的全体, 所生成的 C(X, $\mathbb{R}$)的集开拓扑称为紧开拓扑(compact-open topology)或紧收敛拓扑(topology of compact convergence), 具有这拓扑的连续函数空间记为 $C_k(X, L)$. A. Arhangel'skiǐ等俄罗斯学者主要关心空间 $C_p(X, \mathbb{R})$的拓扑性质, 而 R. A. McCoy 等学者主要关心 $C_k(X, \mathbb{R})$的拓扑性质. 对于空间 $C_\alpha(X, L)$的系统研究起始于 R. A. McCoy 和 I. Ntantu[1985].

可以从 Tychonoff 积空间的角度来理解点态收敛拓扑. 设 X 是一个集合, L 是一个拓扑空间. 从 X 到 L 的所有函数构成的集合记为 L^X, L^X也是笛卡儿积集$\prod_{x\in X}L_x$, 其中每一

L_x=L. 对于每一 $x\in X$, 让 p_x: $L^X\to L_x$为 L^X到第 x 个坐标空间的投影, 即对于任意的 $f\in L^X$, $p_x(f)=f(x)$. L^X的积拓扑(见引理 1.1.11 前)是以 $\mathcal{S}=\{p_x^{-1}(U): x\in X, U$ 是 L 中的开集$\}$为子基生成的拓扑. 由于积空间 L^X中的收敛是依坐标收敛, 于是把 L^X的拓扑τ 称为 L^X 的点态收敛拓扑, 而空间(L^X, τ)称为从集合 X 到空间 L 的具有点态收敛拓扑的函数空间 (function space). 注意到在 C(X, L)中 $p_x^{-1}(U)=[x, U]$, 所以 L^X的子集 C(X, L)在上述两种方式定义下作为具有点态收敛拓扑的连续函数空间是一致的.

对于空间 X 和 L, 记 $X\le L$, 如果 X 和 L 是同一集合且 L 的拓扑是较精于 X 的拓扑.

定理 4.3.2 如果α是空间 X 的闭网络, 则 $C_p(X, L)\le C_\alpha(X, L)$.

证明 对于每一 $x\in X$ 及 L 的开集 V, 若 $f\in[x, V]$, 那么 $f(x)\in V$, 于是存在 $A\in\alpha$使得 $x\in A\subset f^{-1}(V)$, 从而 $f\in[A, V]\subset[x, V]$, 所以[x, V]是 $C_\alpha(X, L)$的开集. 故 $C_p(X, L)\le C_\alpha(X, L)$. ∎

因此, 点态收敛拓扑是最小的集开拓扑. 最大的集开拓扑是取所有的非空闭集组成的网络生成的集开拓扑. 具有最大的集开拓扑的连续函数空间记为 $C_w(X, L)$. 显然 $C_p(X, L)\le C_k(X, L)\le C_w(X, L)$.

下面讨论集开拓扑的分离性. 由于 $C_p(X, L)$是积空间 L^X的子空间, 所以若 L 是 T_0空间(T_1空间, T_2空间, 正则空间, 完全正则空间), 则 $C_p(X, L)$也是 T_0空间(T_1空间, T_2空间, 正则空间, 完全正则空间).

引理 4.3.3 设 X 是一个集合, L 是一个拓扑空间. 若 A 是 X 的子集, B 是 L 的闭集, 则 [A, B]是具有点态收敛拓扑的空间 L^X的闭集.

证明 显然, $[A, B]=\bigcap_{x\in A}[x, B]$. 对于每一 $x\in A$, $[x, B]=L^X\setminus[x, L\setminus B]$是 L^X的闭集, 所以[A, B]是 L^X的闭集. ∎

显然, 在子空间 C(X, L)中对于 L 的闭集 B, [A, B]是 $C_p(X, L)$的闭集; 如果α是空间 X 的闭网络, 由定理 4.3.2, [A, B]也是 $C_\alpha(X, L)$的闭集.

引理 4.3.4 设α是空间 X 的紧网络, $A\in\alpha$. 定义 g: $C_\alpha(X, \mathbb{I})\to\mathbb{I}$使得 $g(f)=\sup_{x\in A} f(x)$,

则 g 是连续函数.

证明 设(a, b)是$\mathbb{R}$中的任意开区间. 由 A 的紧性, $\sup_{x\in A} f(x)<b$ 当且仅当对于每一 $x\in A$ 有 $f(x)<b$. 令 $F=\{y\in\mathbb{I}: y\le a\}$, $B=\{y\in\mathbb{I}: y<b\}$, 则 $g^{-1}(\mathbb{I}\bigcap(a, b))=(C_\alpha(X,\mathbb{I})\diagdown[A, F])\bigcap[A, B]$. 由引理 4.3.3, $g^{-1}(\mathbb{I}\bigcap(a, b))$是 $C_\alpha(X,\mathbb{I})$的开集, 所以 g 是连续的. ■

定理 4.3.5 (Arens[1946])若α是空间 X 的闭网络, L 是 T_2 空间, 则 $C_\alpha(X, L)$是 T_2 空间. 若α是空间 X 的紧网络, L 是完全正则空间, 则 $C_\alpha(X, L)$是完全正则空间.

证明 设 L 是 T_2 空间, 则 $C_p(X, L)$是 T_2 空间, 则定理 4.3.2, $C_\alpha(X, L)$是 T_2 空间.

设α是空间 X 的紧网络, [A, V]是空间 $C_\alpha(X, L)$的基本子基中的元且 $f\in[A, V]$. 因为 L 是完全正则空间且紧集 $f(A)\subset V$, 存在$\phi\in C(L, \mathbb{I})$使得$\phi(f(A))=\{0\}$且$\phi(L\diagdown V)\subset\{1\}$, 定义$\zeta$: $C_\alpha(X, L)\to\mathbb{I}$使得对于每一 $h\in C_\alpha(X, L)$有$\zeta(h)=\sup_{x\in A}\phi(h(x))$, 由引理 4.3.4, $\zeta(h)=g\circ\phi(h)$是连续的且$\zeta(f)=0$. 如果 $h\in C_\alpha(X, L)\diagdown[A, V]$, 则存在 $x\in A$ 使得 $h(x)\in L\diagdown V$, 于是$\phi(h(x))=1$, 所以$\zeta(C_\alpha(X, L)\diagdown[A, V])\subset\{1\}$. 故 $C_\alpha(X, L)$是完全正则空间. ■

定理 4.3.6 若 X 是完全正则空间, 则 $C_p(X)$是 Tychonoff 积空间$\mathbb{R}^X$的稠密子空间.

证明 只须证明积空间$\mathbb{R}^X$中的任何一个非空开集中都含有 $C_p(X)$中的元, 为此又只须证明在$\mathbb{R}^X$的每一个基本开集都含有 $C_p(X)$中的元.

由于 $\mathcal{S}=\{p_x^{-1}(U)$: $x\in X$, U 是$\mathbb{R}$中的开集$\}$是$\mathbb{R}^X$的子基, 对于$\mathbb{R}^X$的基本开集 W, 记 $W=\bigcap_{i\le n}p_{x_i}^{-1}(U_i)$, 其中对于 $i\le n$, $x_i\in X$ 且 U_i 是$\mathbb{R}$中的非空开集, 不妨设 x_i 是互不相同的, 取定 $r_i\in U_i\diagdown\{1\}$. 由于 X 是完全正则空间, 存在连续函数 $g_i:X\to\mathbb{R}$使得 $g_i(x_i)=r_i$ 且当 $j\ne i$ 时有 $g_i(x_j)=1$. 定义 $g:X\to\mathbb{R}$使得 $g(x)=g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)$, 则 $g\in C_p(X)$且每一 $g(x_i)=r_i\in U_i$, 于是 $g\in C_p(X,\mathbb{R})\bigcap W$. 因而 $\overline{C_p(X)}=\mathbb{R}^X$. ■

定理 4.3.7 设α和β是完全正则空间 X 的闭网络, 若 T_1空间 L 中含有非平凡的道路且 $C_\alpha(X, L)\le C_\beta(X, L)$, 则$\alpha$的每一元含于$\beta$的元的有限并中.

证明 设 $p:\mathbb{I}\to L$ 是 L 中的道路且 $p(0)\neq p(1)$，让 f 是从 X 到 p(0)的常值函数且 $V=L\setminus\{p(1)\}$. 对于每一 $A\in\alpha$, [A, V]是 f 在 $C_\alpha(X, L)$中的邻域，于是[A, V]是 f 在 $C_\beta(X, L)$中的邻域，从而存在 f 在 $C_\beta(X, L)$中的基本邻域 $W=\bigcap_{i\le n}[B_i, V_i]\subset[A, V]$. 这时 $p(0)\in V_i(i\le n)$. 令 $B=\bigcup_{i\le n}B_i$，则 $A\subset B$. 若不然，则存在 $x\in A\setminus B$，由 X 的完全正则性，存在 $g\in C(X, \mathbb{I})$使得 g(B)={0}且 g(x)=1，于是 $p\circ g\in W\setminus[A, V]$，矛盾. 因此 $A\subset\bigcup_{i\le n}B_i$. ∎

推论 4.3.8 设 X 是完全正则空间且 T_1空间 L 含有非平凡的道路，那么空间 $C_p(X, L)=C_k(X, L)$当且仅当空间 X 的每一紧集是有限集；空间 $C_k(X, L)=C_w(X, L)$当且仅当 X 是紧空间.

证明 若 $C_p(X)=C_k(X)$，由定理 4.3.7, X 的每一紧集是有限集. 反之，若空间 X 的每一紧集是有限集，于是 $C_k(X)$的基本子基中的元[K, V]是 $C_p(X)$的开集，所以 $C_k(X)\le C_p(X)$，再由定理 4.3.2, $C_p(X)\le C_k(X)$，所以 $C_p(X)=C_k(X)$.

若 $C_k(X)=C_w(X)$，由定理 4.3.7，X 是紧空间. 若 X 是紧空间，由紧开拓扑的定义，$C_k(X)=C_w(X)$. ∎

例 4.3.9 设 D={0, 1}赋予离散拓扑，则 $C(\mathbb{I}, D)$是二元集. 于是 $C_p(\mathbb{I}, D)$不是 Tychonoff 积空间 D^I的稠密子集，并且 $C_p(\mathbb{I}, D)=C_k(\mathbb{I}, D)$，但是$\mathbb{I}$是无限的紧空间. ∎

例 4.3.10 设 X=[0, 3], B=[1, 2]. 置 $\alpha=\{\{x\}: x\in X\}\cup\{X\}$, $\beta=\alpha\cup\{B\}$. 则 $C_\alpha(X)\neq C_\beta(X)$(Arhangel'skiĭ[1995]).

证明 设 $V=\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $G=\{f\in C_\alpha(X): 1\notin f(B)\}=[B, V]$. 则 G 是 $C_\beta(X)$的开集. 取定函数 $f\in C(X)$使得 f(B)=0 且 f(0)=1. 设 G 是 $C_\alpha(X)$的开集，则存在 $C_\alpha(X)$的基本开集$[A_i, W_i](i\le k)$使得 $f\in\bigcap_{i\le k}[A_i, W_i]\subset G$. 不妨设 $A_1=X$. 由于 $f\in[X, W_1]$，所以 $1\in f(X)\subset W_1$. 由α的定义，设当 $1<i\le k$ 时有 $A_i=\{x_i\}$，于是存在 $y\in B\setminus\{x_i: 1<i\le k\}$. 让 Y 是$\mathbb{R}$中含有点 1, $f(x_i)(1<i\le k)$的最小区间. 取定函数 $g\in C(X, Y)$使得 g(y)=1, $g(x_i)=f(x_i)\in W_i(1<i\le k)$. 因为

X 是连通的，所以 f(X)是$\mathbb{R}$的连通子空间，于是 $g(X)\subset Y\subset f(X)\subset W_1$，从而 $g\in\bigcap_{i\le k}[A_i, W_i]$. 但是$1=g(y)\in g(B)$，则$g\notin G$，矛盾. 因而, G不是$C_\alpha(X)$的开集，即$C_\alpha(X)\neq C_\beta(X)$. █

空间 X 的闭网络α称为遗传闭的(hereditarily closed)，若α的每一元的每一非空闭集仍是α的元.

L 上附加的代数结构常诱导 C(X, L)上相应的结构. 例如，如果(L, +)是拓扑群，对于每一 $f, g\in C(X, L)$，定义 $f+g\in C(X, L)$使得每一$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$，则 L 上的群结构诱导了 C(X, L)上的群结构.

若(L, +)是拓扑群, A和B是L的子集, $z\in L$，记 $A+B=\{x+y : x\in A, y\in B\}$, $-A=\{-x : x\in A\}$, $z+A=\{z+x : x\in A\}$.

定理 4.3.11 若α是正则空间 X 的遗传闭的紧网络, G 是拓扑群，则 $C_\alpha(X, G)$也是拓扑群.

证明 (G, +)是一个拓扑群，诱导了 C(X, G)上的二元运算“+”. (C(X, G), +)是一个群. 下面证明从积空间 $C_\alpha(X, G)\times C_\alpha(X, G)$到空间 $C_\alpha(X, G)$的函数$(f, g)\to f\text{-}g$ 是连续的. 对于每一 $A\in\alpha$ 及 G 的开集 V，设 $f\text{-}g\in[A, V]$. 对于每一 $x\in A$，那么 $f(x)\text{-}g(x)\in V$，由于从 $G\times G$ 到 G 的函数$(y, z)\mapsto y\text{-}z$ 是连续的，存在 G 的分别包含 f(x)和 g(x)的开集 U_x 和 W_x 使得 $U_x\text{-}W_x\subset V$. 再由f和g的连续性及X的正则性，存在x在X中的闭邻域F_x使得$f(F_x)\subset U_x$ 且 $g(F_x)\subset W_x$. 因为 A 是 X 的紧集，A 的覆盖$\{F_x\}_{x\in A}$存在有限子覆盖$\{F_{x_i}\}_{i\le n}$. 定义 $S=\bigcap_{i\le n}[A\cap F_{x_i}, U_{x_i}]$, $T=\bigcap_{i\le n}[A\cap F_{x_i}, W_{x_i}]$，则 S 和 T 分别是 f 和 g 在 $C_\alpha(X, G)$中的邻域且 $S\text{-}T\subset[A, V]$. 事实上，设 $h\in S\text{-}T$，则存在 $s\in S$ 和 $t\in T$ 使得 h=s-t，对于每一 $x\in A$，存在 $i\in\mathbb{N}$使得 $x\in F_{x_i}$，于是 $h(x)=s(x)\text{-}t(x)\in U_{x_i}\text{-}W_{x_i}\subset V$，所以 $h\in[A, V]$. 故 $C_\alpha(X, G)$是拓扑群.

█

让 f_0表示空间X上的零函数，即 $f_0(X)=\{0\}\subset\mathbb{R}$. 如果$\alpha$是 X 的关于有限并封闭的闭网络, $W=\bigcap_{i\le n}[B_i, V_i]$是 f_0的基本邻域，让 $B=\bigcup_{i\le n}B_i$, $V=\bigcap_{i\le n}V_i$，那么 $B\in\alpha$且 $0\in V$，于是 $f_0\in[B, V]\subset W$. 因而$\beta_0=\{[A, V] : A\in\alpha$, V 是$\mathbb{R}$中 0 的开邻域$\}$是 f_0在 $C_\alpha(X)$中的邻域基. 当α还是正则空间 X 上遗传闭的紧网络时，由定理 4.3.11 和引理 4.2.2, $C_\alpha(X, \mathbb{R})$是齐性

空间，于是 $C_\alpha(X,\mathbb{R})$在任一点 f 的邻域基为 $f+\beta_0$.

引理 4.3.12 若α是正则空间 X 的遗传闭的紧网络，δ是空间 L 的子基，则$\{[A, S]:A\in\alpha, S\in\delta\}$是$C_\alpha(X, L)$的子基.

证明 对于每一$A\in\alpha$，让 V 是 L 的开集且$f\in[A, V]$. 对于每一$x\in A$，由于$f(x)\in V$，存在δ的有限子集δ_x使得 $f(x)\in\bigcap\delta_x\subset V$，于是存在 X 的开集 U_x 使得 $x\in U_x\subset\overline{U}_x\subset f^{-1}(\bigcap\delta_x)$. 因为 A 是 X 的紧集，A 的开覆盖$\{U_x\}_{x\in A}$存在有限子覆盖$\{U_{x_i}\}_{i\le n}$. 让 $W=\bigcap\{[A\cap\overline{U}_{x_i}, S]:i\le n, S\in\delta_{x_i}\}=\bigcap_{i\le n}[A\cap\overline{U}_{x_i}, \bigcap\delta_{x_i}]$，那么 $f\in W\subset\bigcap_{i\le n}[A\cap\overline{U}_{x_i}, V]=[A, V]$. 所以$\{[A, S]:A\in\alpha, S\in\delta\}$是$C_\alpha(X, L)$的子基. ▌

练习

4.3.1 若α是空间 X 的闭网络，β是α中任意有限个元并组成的集族，则对于每一空间 L, $C_\alpha(X, L)=C_\beta(X, L)$.

4.3.2 若α是空间 X 的紧网络, L 是正则空间，则 $C_\alpha(X, L)$是正则空间.

4.3.3 设α和β是空间 X 的闭网络，若α的每一元含于β的元的有限并中且β是遗传闭的，则 $C_\alpha(X, L)\le C_\beta(X, L)$.

4.3.4 设 X 是局部紧的 T_2 空间，令 $\beta=\{\overline{B}:B$ 是 X 的非空开集且$\overline{B}$是 X 的紧集$\}$，则 $C_k(X, L)=C_\beta(X, L)$.

4.3.5 设α是正则空间 X 的遗传闭的紧网络, G 是拓扑环，则 $C_\alpha(X, G)$也是拓扑环.

§4.4 一致收敛拓扑

设α是空间 X 的闭网络，μ是与空间 L 的拓扑相容的一致结构. 由 X 的闭网络α和 L 的一致结构μ可诱导 C(X, L)上的一致结构，进而诱导 C(X, L)上的一致拓扑.

对于每一 $A\in\alpha$ 和 $M\in\mu$，定义 $\hat{M}(A)=\{(f, g)\in C(X, L)\times C(X, L):$ 对于每一 $x\in A$ 有 $(f(x), g(x))\in M\}$. 易验证, $\{\hat{M}(A):A\in\alpha, M\in\mu\}$是 C(X, L)上某一一致结构的子基(注意到

$\Delta\subset\hat{M}(A)$; $\hat{M}(A)^{-1}=\hat{M}^{-1}(A)$; 若 $V\circ V\subset M$, 则 $\hat{V}(A)\circ\hat{V}(A)\subset\hat{M}(A)$). 如果 α 是关于有限并封闭的，那么 $\{\hat{M}(A):A\in\alpha,M\in\mu\}$ 是 C(X, L) 上某一一致结构的基(注意到 $(U\cap V)\hat{}(A\cup B)\subset\hat{U}(A)\cap\hat{V}(B)$). 具有由这一致结构诱导的 C(X, L)上的一致拓扑称为 α 上(关于 μ)的一致拓扑或 α 上(关于 μ)的一致收敛拓扑(topology of uniform convergence), 相应的(拓扑)空间记为 $C_{\alpha,\mu}(X, L)$. 对于每一 $A\in\alpha$, $M\in\mu$ 和 $f\in C(X, L)$, 那么 $\hat{M}(A)[f]=\{g\in C(X, L):(f, g)\in\hat{M}(A)\}$, 且 $\{\hat{M}(A)[f]:A\in\alpha,M\in\mu\}$ 是 f 在 $C_{\alpha,\mu}(X, L)$ 中的邻域子基. C(X, L)的子集 W 是 $C_{\alpha,\mu}(X, L)$ 的开集当且仅当对于每一 $f\in W$, 存在 $\{A_i\}_{i\le n}\subset\alpha$ 和 $\{M_i\}_{i\le n}\subset\mu$ 使得 $\bigcap_{i\le n}\hat{M}_i(A_i)[f]\subset W$.

如果 $X\in\alpha$, 记 $C_\mu(X, L)=C_{\alpha,\mu}(X, L)$. $C_\mu(X, L)$上的拓扑称为(关于 μ)的一致拓扑或(关于 μ)的一致收敛拓扑. 记 $\hat{M}=\hat{M}(X)$, 则 $\{\hat{M}:M\in\mu\}$ 是诱导这一致结构的基, 并且 C(X, L)的子集 W 是 $C_\mu(X, L)$ 的开集当且仅当对于每一 $f\in W$, 存在 $M\in\mu$ 使得 $\hat{M}[f]\subset W$.

定理 4.4.1 设 α 和 β 是完全正则空间 X 的闭网络且 μ 是含有非平凡道路的 T_2 空间 L 的相容的一致结构, 那么 $C_{\alpha,\mu}(X, L)\le C_{\beta,\mu}(X, L)$ 当且仅当 α 的每一元含于 β 的元的有限并中.

证明 充分性(没有利用 X 的完全正则性及 L 含有非平凡的道路). 设 $A\in\alpha$, $M\in\mu$ 且 $f\in C(X)$. 则存在 $\{B_i\}_{i\le n}\subset\beta$ 使得 $A\subset\bigcup_{i\le n}B_i$. 由于 $\hat{M}(\bigcup_{i\le n}B_i)=\bigcap_{i\le n}\hat{M}(B_i)$, 于是 $\bigcap_{i\le n}\hat{M}(B_i)[f]=(\bigcap_{i\le n}\hat{M}(B_i))[f]=\hat{M}(\bigcup_{i\le n}B_i)[f]\subset\hat{M}(A)[f]$, 所以 $C_{\alpha,\mu}(X)\le C_{\beta,\mu}(X)$.

必要性. 设 $p:\mathbb{I}\to L$ 是 L 中的道路且 $p(0)\ne p(1)$, 由于 L 是 T_2 空间, 存在 $M\in\mu$ 使得 $(p(0), p(1))\notin M$. 让 f 是从 X 到 p(0)的常值函数. 对于每一 $A\in\alpha$, 由于 $C_{\alpha,\mu}(X)\le C_{\beta,\mu}(X)$, $\hat{M}(A)[f]$ 是 f 在 $C_{\beta,\mu}(X)$ 中的邻域, 于是存在 f 在 $C_{\beta,\mu}(X)$ 中的基本邻域 $W=\bigcap_{i\le n}\hat{F}_i(B_i)[f]$ 使得 $W\subset\hat{M}(A)[f]$. 令 $B=\bigcup_{i\le n}B_i$, 则 $A\subset B$. 若不然, 则存在 $x\in A\setminus B$, 由 X 的完全正则性, 存在 $g\in C(X,\mathbb{I})$ 使得 $g(B)=\{0\}$ 且 $g(x)=1$, 于是 $p\circ g\in W\setminus\hat{M}(A)[f]$, 矛盾. 因此 $A\subset\bigcup_{i\le n}B_i$.

∎

由上述定理的充分性，若α是空间 X 的闭网络且μ是空间 L 的相容的一致结构，那么 $C_{\alpha,\mu}(X, L) \le C_{\mu}(X, L)$. 集开拓扑与一致拓扑有下述基本关系.

定理 4.4.2 设α是空间 X 的紧网络且μ是空间 L 上相容的一致结构，那么 $C_{\alpha}(X, L) \le C_{\alpha,\mu}(X, L)$. 如果更设$\alpha$是遗传闭的，那么 $C_{\alpha}(X, L)=C_{\alpha,\mu}(X, L)$.

证明 设$A\in\alpha$, V 是 L 的开集且 $f\in[A, V]$. 对于每一 $x\in A$, $f(x)\in V$, 所以存在 $M_x\in\mu$ 使得 $M_x[f(x)]\subset V$, 选取 $F_x\in\mu$ 使得 $F_x\circ F_x\subset M_x$. 由于 f(A)是 L 的紧集，于是 f(A)的覆盖$\{F_x[f(x)]\}_{x\in A}$存在有限子覆盖$\{F_{x_i}[f(x_i)]\}_{i\le n}$. 定义 $F=\bigcap_{i\le n}F_{x_i}$，则 $F\in\mu$. 下面证明 $\hat{F}(A)[f]\subset[A, V]$. 让 $g\in\hat{F}(A)[f]$且 $x\in A$，由于 $f(x)\in\bigcup_{i\le n}F_{x_i}[f(x_i)]$，存在 $i\le n$ 使得 $f(x)\in F_{x_i}[f(x_i)]$，于是$(f(x_i), f(x))\in F_{x_i}$. 因为$(f(x), g(x))\in F\subset F_{x_i}$，所以$(f(x_i), g(x))\in F_{x_i}\circ F_{x_i}\subset M_{x_i}$，从而 $g(x)\in M_{x_i}[f(x_i)]\subset V$，故 $g\in[A, V]$. 因此 $C_{\alpha}(X)\le C_{\alpha,\mu}(X)$.

如果更设α是遗传闭的，设 $A\in\alpha$，$M\in\mu$ 且 $f\in C(X)$. 让 F 是μ的闭的对称元且 $F\circ F\circ F\subset M$. 因为 f(A)是 L 的紧集，于是 f(A)的覆盖$\{F[f(x)]\}_{x\in A}$存在有限子覆盖$\{F[f(x_i)]\}_{i\le n}$. 对于每一 $i\le n$，定义 $A_i=A\bigcap f^{-1}(F[f(x_i)])$，由于$\alpha$是遗传闭的，所以 $A_i\in\alpha$. 让 $V_i=((F\circ F)[f(x_i)])^{\circ}$，$W=\bigcap_{i\le n}[A_i, V_i]$，那么 W 是 $C_{\alpha}(X)$的开集. 下面证明 $f\in W\subset\hat{M}(A)[f]$. 因为每一 $F[f(x_i)]\subset\{y\in L：存在 H\in\mu 使得 H[y]\subset(F\circ F)[f(x_i)]\}=V_i$(练习 4.1.1)，所以 $f(A_i)=f(A)\bigcap F[f(x_i)]\subset V_i$，于是 $f\in W$. 为了证明 $W\subset\hat{M}(A)[f]$，让 $g\in W$ 且 $x\in A$，则存在 $i\le n$ 使得 $f(x)\in F[f(x_i)]$，于是$(f(x_i), f(x))\in F$ 且 $x\in A_i$，从而 $g(x)\in V_i\subset(F\circ F)[f(x_i)]$，因此$(f(x_i), g(x))\in F\circ F$. 因为 F 是对称的，$(f(x), g(x))\in F\circ F\circ F\subset M$，故 $g\in\hat{M}(A)[f]$. 因此 $C_{\alpha,\mu}(X)\le C_{\alpha}(X)$. ∎

定理 4.4.2 表明，若μ是空间 L 上相容的一致结构，那么 $C_k(X, L)=C_{k,\mu}(X, L)$，所以紧开拓扑也是紧集上的一致收敛拓扑. 由定理 4.4.1 和定理 4.4.2 可得下述推论.

推论 4.4.3 设α是空间 X 的紧网络且μ是空间 L 上相容的一致结构，则 $C_{\alpha}(X, L)\le C_{\mu}(X, L)$. ∎

推论 4.4.4 完全正则空间 X 是紧空间当且仅当对于含有非平凡道路的 T_2 空间 L 上每一相容的一致结构 μ 有 $C_\mu(X, L)=C_k(X, L)$.

证明 如果 X 是紧空间, 对于空间 L 上每一相容的一致结构 μ 有 $C_\mu(X)=C_{k,\mu}(X)$. 再由定理 4.4.2, $C_{k,\mu}(X)=C_k(X)$, 所以 $C_\mu(X)=C_k(X)$. 另一方面, 若对于含有非平凡道路的空间 L 上相容的一致结构 μ 有 $C_\mu(X)=C_k(X)$, 设 α 是空间 X 的闭网络且 $X\in\alpha$, 由定义及定理 4.4.2, $C_{\alpha,\mu}(X)=C_\mu(X)=C_k(X)\le C_{k,\mu}(X)$, 再由定理 4.4.1, X 是紧空间. ▮

推论 4.4.5 若 X 是 T_2 紧空间, 则 $C_k(X, \mathbb{R})$是度量空间.

证明 由于$\mathbb{R}$是度量空间，所以 $C_\mu(X, \mathbb{R})$的一致结构具有可数基，又由推论 4.4.4, $C_\mu(X, \mathbb{R})=C_k(X, \mathbb{R})$, 再由 Weil 度量化定理(定理 4.1.9)和定理 4.3.5, $C_k(X, \mathbb{R})$是度量空间.
▮

一种特别的一致拓扑是上确界度量拓扑(supremum metric topology). 设 L 是度量空间. 不妨设 ρ 是 L 的有界度量(定理 2.1.7), 由 ρ 诱导 C(X, L)的度量 $\tilde{\rho}$ 定义如下. $\tilde{\rho}$: $C(X, L)\times C(X, L)\to[0, +\infty)$使得对于任意的 $f, g\in C(X, L)$, $\tilde{\rho}(f, g)=\sup_{x\in X}\rho(f(x), g(x))$, 则 $\tilde{\rho}$ 是 C(X, L)的度量, 称 $\tilde{\rho}$ 为 C(X, L)的上确界度量(supremum metric)或一致收敛度量(metric of uniform convergence). 由上确界度量诱导的 C(X, L)的拓扑称为上确界度量拓扑, 产生的拓扑空间记为 $C_\rho(X, L)$.

每一度量自然诱导一一致结构. 在 C(X, L)的上确界度量拓扑与由 L 上的一致结构诱导的 C(X, L)的一致拓扑是相同的.

定理 4.4.6 对于空间 X, 如果 ρ 是 L 上的有界度量且 μ 是 L 上由 ρ 诱导的一致结构, 那么 $C_\rho(X, L)=C_\mu(X, L)$.

证明 对于每一 $\varepsilon>0$, 让 $M_\varepsilon=\{(s, t)\in L\times L: \rho(s, t)<\varepsilon\}$. 那么集族$\{M_\varepsilon : \varepsilon>0\}$是一致结构 μ 的基. 设 $f\in C(X)$及 $\varepsilon>0$, 下面证明 $B(f, \varepsilon)\subset\hat{M}_\varepsilon[f]\subset B(f, 2\varepsilon)$. 让 $g\in B(f, \varepsilon)$, 那么 $\tilde{\rho}(f, g)<\varepsilon$, 因而对于每一 $x\in X$ 有 $\rho(f(x), g(x))<\varepsilon$, 于是$(f(x), g(x))\in M_\varepsilon$, 从而$(f, g)\in\hat{M}_\varepsilon$, 因此 $g\in\hat{M}_\varepsilon[f]$. 另一方面, 让 $g\in\hat{M}_\varepsilon[f]$, 那么$(f, g)\in\hat{M}_\varepsilon$, 于是对于每一 $x\in X$ 有

$(f(x), g(x))\in M_\varepsilon$，从而 $\rho(f(x), g(x))<\varepsilon$，所以 $\tilde{\rho}(f, g)\le\varepsilon<2\varepsilon$，因此 $g\in B(f, 2\varepsilon)$. 这说明 $C_\rho(X, L)=C_\mu(X, L)$. ▮

对于度量空间 L, $C_\rho(X, L)$上的拓扑依赖于 L 上相容的度量 ρ 的选择. 即 L 上不同的相容度量可能产生 C(X, L)上不同的上确界拓扑. 下述例子说明了这一事实.

例 4.4.7 (Dugundji[1966]) 让 ρ 是实数空间$\mathbb{R}$的界为 1 的欧几里得度量，即 $\rho(s, t)=\min\{1, |s-t|\}$. 让 ρ_1 是$\mathbb{R}$的度量，定义为 $\rho_1(s, t)=\left|\frac{s}{1+|s|}-\frac{t}{1+|t|}\right|$，则 ρ_1 是$\mathbb{R}$上相容的有界度量(练习 2.1.2). 下面证明 $C_\rho(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ne C_{\rho_1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. 让 $f\in C(\mathbb{R})$是恒等函数，对于每一 $n\in\mathbb{N}$，让 $f_n\in C(\mathbb{R})$定义为当 $x<n$ 时 $f_n(x)=x$，当 $x\ge n$ 时 $f_n(x)=n$. 那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$，$\tilde{\rho}(f, f_n)=1$；而当 $x\ge n$ 时有 $\rho_1(f(x), f_n(x))=\left|\frac{x}{1+x}-\frac{n}{1+n}\right|=\frac{x-n}{(1+n)(1+x)}<\frac{1}{1+n}$，因此 $\tilde{\rho}_1(f, f_n)\le\frac{1}{1+n}<\frac{1}{n}$. 因而，对于每一 $n\in\mathbb{N}$，$f_n\in B_{\rho_1}(f, 1/n)$，故 $B_{\rho_1}(f, 1/n)\not\subset B_\rho(f, 1)$，所以 $C_\rho(\mathbb{R}, \mathbb{R})\ne C_{\rho_1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. ▮

这个例子也说明了空间 L 上相容的一致结构可能产生 C(X, L)上不同的一致拓扑. 一个很自然的问题是: L 上怎样的相容的一致结构(或度量)产生 C(X, L)上相同的拓扑? 如果 X 是紧空间，由推论 4.4.4，对于空间 L 上所有相容的一致结构产生 C(X, L)上的紧开拓扑. 特别地，由定理 4.4.6，如果 X 是紧空间且 ρ 是空间 L 上相容的有界度量，那么 $C_\rho(X, L)=C_k(X, L)$. 另一方面，如果 L 是 T_2 紧空间，那么 L 上仅有唯一相容的一致结构(定理 4.1.12)，于是 L 上所有相容的一致结构产生 C(X, L)上相同的拓扑.

如果α是空间 X 的闭网络且 ρ 是空间 L 上的有界度量，仍让 μ 是 L 上由 ρ 诱导的一致结构，定义 $C_{\alpha,\rho}(X, L)=C_{\alpha,\mu}(X, L)$. 若$\alpha$是 L 的遗传闭的紧网络，由定理 4.4.2，$C_{\alpha,\rho}(X, L)=C_\alpha(X, L)$. 从而，对于每一 $f\in C(X, L)$，f 在 $C_\alpha(X, L)$中的邻域基元形如 $\hat{M}_\varepsilon(A)[f]=\{g\in C(X, L):$ 对于每一 $x\in A$ 有 $\rho(f(x), g(x))<\varepsilon\}$，其中 $A\in\alpha$ 且 $\varepsilon>0$.

对于有界度量空间(L, ρ)，在函数空间 L^X 上也可定义上确界度量 $\tilde{\rho}$. 度量空间(L^X, $\tilde{\rho}$)仍称为具有上确界度量的空间. 对于空间 X，具有上确界度量的空间 L^X 中序列收敛就是

数学分析中的一致收敛，所以有时也称具有上确界度量的空间 L^X 是一致收敛空间(space of uniform convergence).

引理 4.4.8 设 X 是拓扑空间，(L, ρ)是有界度量空间，则 C_ρ(X, L)是具有上确界度量的空间 L^X 的闭集.

证明 由于 L^X 是度量空间，只须证明 C_ρ(X, L)关于序列的收敛是封闭的. 设 C_ρ(X, L)中的序列$\{f_n\}$收敛于 $f\in L^X$，对于每一 $x\in X$ 及 f(x)在 L 中邻域 U，存在$\varepsilon>0$ 使得 $B(f(x), \varepsilon)\subset U$. 因为$\{f_n\}$收敛于 f，存在 $n_0\in\mathbb{N}$使得当 $n>n_0$时 $\sup_{x\in X}\rho(f_n(x), f(x))<\varepsilon/3$，而 $f_{n_0+1}\in C(X, L)$，存在 x 的邻域 V 使得 $f_{n_0+1}(V)\subset B(f_{n_0+1}(x), \varepsilon/3)$，于是对于每一 $z\in V$ 有 $\rho(f(z), f(x))\le\rho(f(z), f_{n_0+1}(z))+\rho(f_{n_0+1}(z), f_{n_0+1}(x))+\rho(f_{n_0+1}(x), f(x))<\varepsilon$，即 $f(V)\subset B(f(x), \varepsilon)\subset U$，所以 f 在 x 连续，故 $f\in C(X, L)$. ■

引理 4.4.9 设(L, ρ)是有界的完全度量空间，则具有上确界度量的空间 L^X 也是完全度量空间.

证明 设$\{f_n\}$是 L^X 的 Cauchy 序列(定义 2.5.1). 对于每一 $x\in X$ 和 n, $m\in\mathbb{N}$，由于 $\rho(f_n(x), f_m(x))\le\tilde{\rho}(f_n, f_m)$，所以$\{f_n(x)\}$是 L 的 Cauchy 序列，于是$\{f_n(x)\}$在 L 中存在极限，设为 f(x). 从而定义了函数 $f: X\to L$. 下面证明在 L^X 中$\{f_n\}$收敛于 f. 对于任意的$\varepsilon>0$，存在 $k\in\mathbb{N}$使得当 n, m>k 时有 $\tilde{\rho}(f_n, f_m)<\varepsilon/2$. 对于每一 $x\in X$，存在自然数 $n_x>k$ 使得 $\rho(f_{n_x}(x), f(x))<\varepsilon/2$，于是当 n>k 时有 $\rho(f_n(x), f(x))\le\rho(f_n(x), f_{n_x}(x))+\rho(f_{n_x}(x), f(x))<\varepsilon$，从而当 n>k 时有 $\tilde{\rho}(f_n, f)\le\varepsilon$. 故 L^X 是完全度量空间. ■

由引理 4.4.8，引理 4.4.9 和完全性是闭遗传性质，有下述结果.

定理 4.4.10 若(L, ρ)是有界的完全度量空间，则 C_ρ(X, L)也是完全度量空间. ■

本节最后从网的角度对函数空间中的点态收敛拓扑，紧开拓扑和一致收敛拓扑作一些说明. 回忆拓扑空间中网(net; Moore, Smith[1922])的概念，它是序列概念的推广. 设 D 是非空的定向集(directed set)，X 是一个拓扑空间，由定向集 D 到 X 内的函数φ称为 D 上的一个网(或 Moore-Smith 网)，或简称网，记为φ(D; >)，其中>是定向集 D 上的序(order). 网可以理

解为空间 X 的按指标集 D 定向的点集$\{\varphi(d) : d\in D\}$，简记为网$\{x_d\}_{d\in D}$或网$\{x_d\}$.

设$\varphi(D; >)$是拓扑空间 X 中的网, $A\subset X$, 如果存在$d_0\in D$使得当$d>d_0$时有$\varphi(d)\in A$, 则称网$\varphi(D; >)$弱终于(weakly eventually in)A. 如果对于每一$d_0\in D$, 存在$d\in D$使得$d>d_0$且$\varphi(d)\in A$, 则称网$\varphi(D; >)$共尾于 A. 若网$\varphi(D; >)$弱终于点 x 的每一个邻域, 则称这网收敛于 x, 记为$\varphi(D; >)\to x$. 如果网$\varphi(D; >)$共尾于点 x 的每邻域, 则称点 x 是这网的聚点. 注意到, 网“弱终于”与§3.1 中序列“终于”的概念略有不同.

引理 4.4.11 设 X 是拓扑空间, A 是 X 的子集, 则

(1) X 的点$x\in \overline{A}$当且仅当 A 中有网收敛于 x;

(2) X 的点 x 是 A 的聚点当且仅当 A╲{x}中有网收敛于 x.

证明 对于$x\in X$, 设 x 在 X 中的邻域基为$\mathscr{U}_x=\{U_d\}_{d\in D_x}$, 在$D_x$上定义序关系<如下: 对于每一$d_1, d_2\in D_x$, $d_1\le d_2$当且仅当$U_{d_2}\subset U_{d_1}$(简称按反包含关系定义序关系), 则$(D_x; <)$是一个定向集.

(1) 若$x\in\overline{A}$, 于是 x 的每一邻域与 A 相交, 对于每一$d\in D_x$, 存在$x_d\in U_d\cap A$, 则 A 中的网$\{x_d\}_{d\in D_x}$收敛于 x. 反之, 如果 A 中存在网收敛于 x, 那么 x 的每一邻域与 A 相交, 所以$x\in\overline{A}$.

(2) x 是 A 的聚点当且仅当$x\in\overline{A\setminus\{x\}}$, 当且仅当 A╲{x}中有网收敛于 x. ▌

引理 4.4.12 设函数 f: $X\to Y$且$x\in X$, 则 f 在点 x 连续当且仅当若$\{x_d\}_{d\in D}$是 X 中收敛于 x 的网, 则在 Y 中网$\{f(x_d)\}_{d\in D}$收敛于 f(x).

证明 设 f 在点 x 连续且$\{x_d\}_{d\in D}$是 X 中收敛于 x 的网. 对于 f(x)在 Y 中的任一邻域 V, 则$f^{-1}(V)$是 x 在 X 中的邻域, 于是存在$d_0\in D$使得当$d>d_0$时有$x_d\in f^{-1}(V)$, 从而$f(x_d)\in V$, 所以网$\{f(x_d)\}_{d\in D}$收敛于 f(x). 反之, 若 f 在点 x 不连续, 则存在 f(x)在 Y 中的邻域V_0使得对于 x 在 X 中的任一邻域 U 有$f(U)\not\subset V_0$. 设 x 在 X 中的邻域基为$\mathscr{U}_x=\{U_d\}_{d\in D_x}$, 将$\{U_d\}_{d\in D_x}$按反包含关系定义序关系<, 则$(D_x; <)$是一个定向集. 于是对于每一$d\in D_x$, 存在$x_d\in U_d$使得$f(x_d)\notin V_0$. 这时 X 中的网$\{x_d\}_{d\in D_x}$收敛于 x, 但是 Y 中的网$\{f(x_d)\}_{d\in D_x}$不

收敛于 f(x). ▌

设$\{f_d\}_{d\in D}$是C(X, L)中的网且$f\in$C(X, L). 如果在空间C_p(X, L)中$\{f_d\}_{d\in D}$收敛于f, 则称$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛(pointwise convergent)于 f. 如果μ是空间 L 上相容的一致结构且$\{f_d\}_{d\in D}$在空间C_μ(X, L)中收敛于 f, 则称$\{f_d\}_{d\in D}$(关于μ)一致收敛(uniformly convergent)于 f. 此外, 若α是空间 X 的闭网络, 如果$\{f_d\}_{d\in D}$在空间 $C_{\alpha,\mu}$(X, L)中收敛于 f, 则称$\{f_d\}_{d\in D}$在α上(关于μ)一致收敛于 f. 由定理 4.4.2, 在 C_k(X, L)中的收敛精确为在紧集上的一致收敛.

定理 4.4.13 如果$\{f_d\}_{d\in D}$是 C(X, L)中的网且 $f\in$C(X, L), 那么$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛于 f 当且仅当对于每一 $x\in X$, 在 L 中$\{f_d(x)\}_{d\in D}$收敛于 f(x).

证明 设$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛于 f. 对于每一 $x\in X$, 让 V 是 f(x)在 L 中的邻域, 那么 $f\in[x, V]$, 于是存在 $d_0\in D$ 使得当 $d>d_0$ 时有 $f_d\in[x, V]$, 于是当 $d>d_0$时有 $f_d(x)\in V$, 因而在 L 中$\{f_d(x)\}_{d\in D}$收敛于 f(x).

反之, 设对于每一 $x\in X$, 在 L 中$\{f_d(x)\}_{d\in D}$收敛于 f(x). 让 $f\in\bigcap_{i\le n}[x_i, V_i]$, 其中每一 $x_i\in X$ 且 V_i 是 L 的开集, 则对于每一 $i\le n$, 由于 $f(x_i)\in V_i$, 存在 $d_i\in D$ 使得当 $d>d_i$时有 $f_d(x_i)\in V_i$. 因为 D 是定向集, 存在 $d_0\in D$ 使得 $d_0\ge d_i$ $(\forall\, i\le n)$, 那么当 $d>d_0$时有 $f_d\in\bigcap_{i\le n}[x_i, V_i]$, 所以网$\{f_d\}_{d\in D}$点态收敛于 f. ▌

练习

4.4.1 若α是空间 X 的闭网络, μ是空间 L 上的一致结构, 验证: (1) $\{\hat{M}(A) : A\in\alpha, M\in\mu\}$是 C(X, L)上某一一致结构的基; (2) 如果 $X\in\alpha$, 则$\{\hat{M}(A) : M\in\mu\}$是 C(X, L)上某一一致结构的基.

4.4.2 设 X 是紧空间, (L, ρ)是度量空间, 则 $C_\rho(X, L)=C_k(X, L)$.

4.4.3 若实数空间ℝ上每一相容的一致结构诱导出$C_\mu(X, \mathbb{R})$上相同的拓扑, 则 X 是伪紧空间(McCoy[1978a]).