§3.6 闭映象

寻求可度量化空间闭映象的内在特征是 A. Arhangel'skiĭ[1966]在名著“Mappings and spaces”中提出的又一问题. N. Lašnev(Н. Лашнев)[1966]首先研究了这一问题，并且给出了 Arhangel'skiĭ 问题的一个解. 尽管 Lašnev 的解不是一个完美的答案，但是他提出了遗传闭包保持集族的概念(定义 3.6.1). L. Foged[1985]恰是利用这一概念与 k 网络(定义 3.3.11)的结合，获得了 Arhangel'skiĭ 问题满意的回答. 本节介绍 Foged 的工作及关于可度量化空间的闭 s 映象的相关结果.

可度量化空间的闭映象称为 Lašnev 空间(Lašnev space). 由 Stone 定理(定理 2.2.5)及 Michael 定理(定理 1.5.8), Lašnev 空间是仿紧空间.

定义 3.6.1 (Lašnev[1966])设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的遗传闭包保持族(hereditarily closure-preserving family)，若对于每一 $H(P)\subset P\in\mathscr{P}$，集族$\{H(P):P\in\mathscr{P}\}$是闭包保持的.

遗传闭包保持集族简记为 HCP 集族. 显然，空间 X 的局部有限集族是 HCP 集族，X 的 HCP 集族是闭包保持集族. 当 $\mathscr{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的 HCP 集族时，对于每一 $x_\alpha\in P_\alpha$，集族 $\{\{x_\alpha\}\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的闭包保持集族，于是集合$\{x_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是 X 的闭离散子集(练习 1.5.2).

引理 3.6.2 闭映射保持遗传闭包保持集族.

证明 设 $f:X\to Y$ 是闭映射，$\mathscr{P}$ 是空间 X 的 HCP 集族. 记 $\mathscr{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 令 $\mathscr{F}=f(\mathscr{P})$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$，设 $H_\alpha\subset f(P_\alpha)$，让 $L_\alpha=f^{-1}(H_\alpha)\cap P_\alpha$，那么 $f(L_\alpha)=H_\alpha$ 且 $L_\alpha\subset P_\alpha$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 HCP 集族，所以 $\{L_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的闭包保持集族，于是 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{H_\alpha}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{f(L_\alpha)}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(\overline{L_\alpha})=f(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{L_\alpha})=f(\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}L_\alpha})=\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f(L_\alpha)}=\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha}$，因此$\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是闭包保持的. 故 $\mathscr{F}$ 是 Y 的 HCP 集族. ▮

引理 3.6.3 在正则空间中遗传闭包保持集族的闭包仍是遗传闭包保持集族.

证明 设 $\mathscr{P}$ 是正则空间 X 的 HCP 集族. 记 $\mathscr{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 若 $\mathscr{P}$ 的闭包$\{\overline{P_\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$不是 X 的 HCP 集族，那么对于每一$\alpha\in\Lambda$，存在 $H_\alpha\subset\overline{P_\alpha}$ 使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{H_\alpha}$不是 X 的闭集. 取 $x\in\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{H_\alpha}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$，由 X 的正则性，存在 X 的分别包含$\{x\}$和$\overline{H_\alpha}$的不相交的开集 V_α 和 U_α，于是 $H_\alpha\subset U_\alpha\cap\overline{P_\alpha}\subset\overline{U_\alpha\cap P_\alpha}$. 所以

$x\in\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha}\subset\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{U_\alpha\cap P_\alpha}}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{U_\alpha\cap P_\alpha}$，从而有 $\beta\in\Lambda$ 使得 $x\in\overline{U_\alpha\cap P_\beta}$，因此 $U_\beta\cap P_\beta\cap V_\beta\neq\varnothing$，矛盾. 故 $\mathcal{P}$ 的闭包仍是 X 的 HCP 集族. ∎

引理 3.6.4 设 $\mathcal{P}$ 是 Fréchet 空间 X 的遗传闭包保持集族. 令 $\mathcal{F}=\{\bigcap\mathcal{P}' : \mathcal{P}'$是 $\mathcal{P}$的有限子集$\}$, 则 $\mathcal{F}$也是 X 的遗传闭包保持集族.

证明 若不然, 则存在 $\mathcal{F}$ 的子集$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$和 $H_\alpha\subset F_\alpha(\alpha\in\Lambda)$使得$\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$不是闭包保持的, 于是存在 $x\in\overline{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha}\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\overline{H}_\alpha$. 因为 X 是 Fréchet 空间, 存在$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 从而存在$\alpha_n\in\Lambda$ 使得 $x_n\in H_{\alpha_n}$. 这时每一 H_α 中仅含有$\{x_n\}$中的有限项, 于是不妨设上述的α_n是互不相同的. 又因为每一 F_α是 $\mathcal{P}$ 中有限个元的交, 所以存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$和 $\mathcal{P}$ 的无限子集$\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$使得每一 $x_{n_i}\in P_i$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 HCP 集族, 从而$\{x_{n_i} : i\in\mathbb{N}\}$是 X 的闭离散子集, 矛盾. ∎

引理 3.6.5 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的遗传闭包保持集族, K 是 X 的紧子集, 则存在 K 的有限子集 F 使得 K$\setminus$F 仅与 $\mathcal{P}$ 中的有限个元相交.

证明 若不然, 则存在 X 中的序列$\{x_n\}$和 $\mathcal{P}$ 的可数无限子集$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$使得 $x_1\in K\cap P_1$, $x_{n+1}\in(K\setminus\{x_i : i\le n\})\cap P_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 HCP 集族, 所以$\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$是 X 的闭离散子集, 这与 K 的紧性相矛盾. ∎

特别地, 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的遗传闭包保持集族, 且$\{x_n\}$是 X 中由互不相同点组成的收敛序列, 则存在 $m\in\mathbb{N}$使得集合$\{x_n : n>m\}$仅与 $\mathcal{P}$ 中的有限个元相交, 因而 $\mathcal{P}$ 中仅有有限个元含有序列$\{x_n\}$的无限项.

定理 3.6.6 (Foged 定理[1985])空间 X 是可度量化空间的闭映象当且仅当 X 是具有σ遗传闭包保持 k 网络的正则的 Fréchet 空间.

证明 设空间 X 是可度量化空间的闭映象, 于是存在可度量化空间 M 和闭映射 $f:M\to X$. 由于 M 是可度量化空间, 所以 X 是仿紧空间, 于是 X 是正则空间. 由引理 3.2.5 和引理 3.2.7, X 是 Fréchet 空间. 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 2.3.3), M 具有σ局部有限基 $\mathcal{B}$. 让 $\mathcal{P}=f(\mathcal{B})$. 由引理 3.6.2, $\mathcal{P}$ 是 X 的σ-HCP 集族. 由推论 2.4.9, f 是紧覆盖映射, 又由于紧覆盖映射保持 k 网络(练习 3.3.2), 所以 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网络. 故 X 具有σ-HCP 的 k 网

络.

反之, 设正则空间 X 是具有σ -HCP 的 k 网络的 Fréchet 空间. 由引理 3.6.3 和引理 3.6.4, 设 X 具有 k 网络 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的关于有限交封闭的 HCP 闭集族且 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$和 $P\in\mathcal{P}_n$, 令 $R_n(P)=P\setminus(\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_n: P\not\subset Q\})^\circ$, $\mathcal{R}_n=\{R_n(P): P\in\mathcal{P}_n\}$.

对于每一$n\in\mathbb{N}$及 X 的开集 U, 令 $U_n=\bigcup\{P\in\mathcal{P}_n: P\subset U\}$. 则集列$\{U_n\}$是单调递增的. 若 X 中的序列 Z 收敛于 $x\in U\setminus Z$, 则存在 $m\in\mathbb{N}$使得

(6.1) Z 是终于$(U_m)^\circ\bigcup\{x\}$的;

(6.2) Z 是终于$(V_m)^\circ\bigcup\{x\}$的且 $V_m\subset U$, 其中 $V_m=\bigcup\{R\in\mathcal{R}_m: R\bigcap Z$ 是无限集$\}$.

(6.1) 证明如下. 若不然, 那么可选取 Z 的子序列$\{z_n\}$使得每一 $z_n\in U\setminus(U_n)^\circ\subset\overline{U\setminus U_n}$, 因为 X 是 Fréchet 空间, 存在 $U\setminus U_n$中的序列$\{z_{nk}\}$收敛于 z_n, 从而 $x\in\overline{\{z_{nk}: n,k\in\mathbb{N}\}}$. 这时存在序列$\{z_{n_jk_j}\}$收敛于 x 且 $n_j\to+\infty$. 又因为$\mathcal{P}$是 X 的 k 网络, 存在 $m\in\mathbb{N}$使得$\{z_{n_jk_j}\}$是终于 U_m的, 这与当 $n_j\geq m$ 时有 $z_{n_jk_j}\in U\setminus U_m$相矛盾.

(6.2)证明如下. 记$W_m=(\bigcup\mathcal{P}_m)^\circ\setminus\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m\bigcup\mathcal{R}_m: Q\bigcap Z$是有限集$\}$, 则$W_m$是 X 的开集, 且 $U_m\subset\bigcup\mathcal{P}_m$. 由引理 3.6.5, $\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m\bigcup\mathcal{R}_m: Q\bigcap Z$ 是有限集$\}$仅含有 Z 中的有限个点, 所以由(6.1), 序列 Z 是终于 $W_m\bigcup\{x\}$. 下面证明 $W_m\subset V_m$. 对于 $y\in W_m$, 若 $y\in Q\in\mathcal{P}_m$, 则$Q\bigcap Z$是无限集, 再由引理 3.6.5, 这种 Q 是有限的, 于是$\mathcal{P}_m$在 y 是点有限的, 令$P(y)=\bigcap\{P\in\mathcal{P}_m: y\in P\}$, 那么$P(y)\in\mathcal{P}_m$且$y\notin\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m: P(y)\not\subset Q\}$, 所以$y\in R_m(P(y))$, 于是 $R_m(P(y))\bigcap Z$ 是无限集, 因此 $R_m(P(y))\subset V_m$. 这说明了 $W_m\subset V_m$. 从而 Z 是终于$(V_m)^\circ\bigcup\{x\}$的. 下面再证明 $V_m\subset U$. 对于$R\in\mathcal{R}_m$, 其中 $R\bigcap Z$ 是无限集, 设 $R=R_m(P)$, 存在 $Q\in\mathcal{P}_m$使得 $R\subset P\subset Q\subset U$, 否则$(U_m)^\circ=(\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m: Q\subset U\})^\circ\subset(\bigcup\{Q\in\mathcal{P}_m: P\not\subset Q\})^\circ\subset X\setminus R$, 由(6.1), Z 是终于$(X\setminus R)\bigcup\{x\}$的, 于是 $R\bigcap Z$ 是有限集, 矛盾. 因此, $V_m\subset U$.

现在，对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $\mathcal{H}_n=\mathcal{R}_n\bigcup\{X\setminus(\bigcup\mathcal{R}_n)^\circ\}$，并且记 $\mathcal{H}_n=\{R_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$，则 $\mathcal{H}_n$ 是 X 的覆盖，赋予集合 Λ_n 离散拓扑．类似构造 Ponomarev 系的方法，置 $M=\{\alpha=(\alpha_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n:\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中某点 x_α 的网络$\}$，则 M 是可度量化空间，并且对于每一 $\alpha\in M$，x_α 是唯一确定的．定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$，即 $f((\alpha_n))=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}R_{\alpha_n}$．下面证明 f 是闭映射.

(6.3) f 是映射.

对于每一 $\alpha=(\alpha_n)\in M$，$\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $f(\alpha)$ 在 X 中的网络，所以 f 在点 α 是连续的．从而 f 是连续函数．对于每一 $x\in X$，若 x 是 X 的孤立点，那么存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\{x\}\in\mathcal{P}_m$，于是 $R_m(\{x\})=\{x\}$，所以存在 $\alpha_m\in\Lambda_m$ 使得 $R_{\alpha_m}=\{x\}$，取定 $\beta=(\beta_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$ 使得 $\beta_m=\alpha_m$ 且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}R_{\beta_n}$，则 $\beta\in M$ 且 $f(\beta)=x$．若 x 不是 X 的孤立点，则存在 $X\setminus\{x\}$ 中的序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x，取定 $\alpha_n\in\Lambda_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ 使得 $R_{\alpha_n}\bigcap\{x_k:k\in\mathbb{N}\}$ 是无限集，如果这点做不到，则取定 $\alpha_n\in\Lambda_n$ 使得 $x\in R_{\alpha_n}$，由于 R_{α_n} 是 X 的闭集，那么总有 $x\in R_{\alpha_n}$．对于 x 在 X 中的开邻域 U，由(6.2)，存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $\{x_k\}$ 是终于 $(V_m)^\circ\bigcup\{x\}$ 的且 $V_m\subset U$．由引理 3.6.5, V_m 是 $\mathcal{R}_m$ 中有限个元的并，于是这有限个元中必有一个是 R_{α_m}，从而 $x\in R_{\alpha_m}\subset U$．因此，$\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网络．令 $\beta=(\beta_n)$，则 $\beta\in M$ 且 $f(\beta)=x$．故 f 是满函数．因而，f 是映射.

(6.4) f 是闭映射.

设 F 是 M 的闭集．若 f(F) 不是 X 的闭集，则存在 $x\in\overline{f(F)}\setminus f(F)$，因为 X 是 Fréchet 空间，存在 f(F) 中的序列 $\{x_i\}$ 在 X 中收敛于 x．对于每一 $i\in\mathbb{N}$，取定 $\beta_i=(\alpha_{i,n})\in F\bigcap f^{-1}(x_i)$，那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 有 $x_i\in R_{\alpha_{i,n}}\in\mathcal{H}_n$．由引理 3.6.5，存在 $m_1\in\mathbb{N}$ 使得 $\{R\in\mathcal{H}_1:R\bigcap\{x_i:i>m_1\}\neq\varnothing\}$ 是有限集，而当 $i>m_1$ 时有 $x_i\in R_{\alpha_{i,1}}$，所以有 $\mathbb{N}$ 的无限子集 $\mathbb{N}_1$ 和 $\alpha_1\in\Lambda_1$ 使得对于每一 $i\in\mathbb{N}_1$ 有 $\alpha_{i,1}=\alpha_1$．由归纳法，可选取 $\mathbb{N}$ 的递减的无限子集列 $\{\mathbb{N}_n\}$ 和 $\beta=(\alpha_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$ 使得对每一 $i\in\mathbb{N}_n$ 有 $\alpha_{i,n}=\alpha_n$．对于每一 $n\in\mathbb{N}$，由于当 $i\in\mathbb{N}_n$ 时有

$x_i \in R_{\alpha_n}$，且 R_{α_n} 是 X 的闭集，因而 $x\in R_{\alpha_n}$．选取{k}的子序列$\{k_j\}$使得每一 $k_j \in \mathbb{N}_j$．设 U 是 x 在 X 中的开邻域，因为序列$\{x_{k_j}\}$收敛于 x，由(6.2)，存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $V_m \subset U$，若 $j\geq m$，则 $k_j \in \mathbb{N}_j \subset \mathbb{N}_m$，于是 $x_{k_j} \in R_{\alpha_{k_j,m}} = R_{\alpha_m}$，从而 $R_{\alpha_m} \subset V_m \subset U$．故$\{R_{\alpha_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$是 x 在 X 中的网络，即 $\beta \in M$．对于固定的 n，当 $k_j \geq n$ 时有$\alpha_{k_j,n} = \alpha_n$，即积空间$\prod_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$中的序列$\{\beta_{k_j}\}$的第 n 个坐标所组成的序列$\{\alpha_{k_j,n}\}_{j\in\mathbb{N}}$在$\Lambda_n$中收敛于$\alpha_n$，于是$\{\beta_{k_j}\}$收敛于$\beta$，从而$\beta \in F$．因此 $x=f(\beta)\in f(F)$，矛盾．于是 f 是闭映射．

综上所述，空间 X 是可度量化空间的闭映象．█

下面介绍 Foged 定理的几个应用．具有σ局部有限 k 网络的正则空间称为$\aleph$空间($\aleph$-space，O'Meara[1971])，具有可数 k 网络的正则空间称为$\aleph_0$空间($\aleph_0$-space，Michael[1966])．可分的可度量化空间是$\aleph_0$空间，可度量化空间和$\aleph_0$空间都是$\aleph$空间．具有可数 k 网络的空间，具有可数 cs*网络的空间，具有可数 cfp 网络的空间，具有可数伪基的空间都是相互等价的(练习 3.5.3)．

推论 3.6.7　空间 X 是可分可度量化空间的闭映象当且仅当 X 是 Fréchet 的$\aleph_0$空间．

证明　设存在可分可度量化空间 M 和闭映射 $f:M\to X$．显然，X 是 Fréchet 的正则空间．让$\mathcal{B}$是 M 的可数基，令$\mathcal{P}=f(\mathcal{B})$．由于 f 是紧覆盖映射(推论 2.4.9)且$\mathcal{B}$是 M 的 k 网络，于是$\mathcal{P}$是空间 X 的可数 k 网络(练习 3.3.2)，故 X 是$\aleph_0$空间．

反之，设 X 是 Fréchet 的$\aleph_0$空间，于是 X 具有 k 网络$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$，其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的关于有限交封闭的有限的闭集族且$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$．在 Foged 定理中构造 X 的覆盖列$\{\mathcal{H}_n\}$是 X 的有限子集列(使用定理 3.6.6 的记号)．于是每一Λ_n是有限子集，因此 M 是可分可度量化空间，故 X 是可分可度量化空间的闭映象．█

定义 3.6.8　设映射 $f:X\to Y$. f 称为 L 映射(L-mapping)，若每一 $f^{-1}(y)$是 X 的 Lindelöf 子集．f 称为边界 L 映射(或边缘 L 映射，boundary L-mapping)，若每一$\partial f^{-1}(y)$是 X 的 Lindelöf 子集．

显然，可度量化空间上的 L 映射与 s 映射是等价的．L 映射和边界紧映射都是边界 L 映射．在练习 1.4.7 和练习 2.4.5 中已介绍过 L 映射的一些性质．可度量化空间的闭 s 映象的内

在特征涉及特殊的空间 S_{ω_1}. 序列扇 S_ω(例 3.1.8)同胚于把可数个含极限点的非平凡收敛序列的拓扑和将非孤立点粘成一点得到的商空间. 把ω_1个含极限点的非平凡收敛序列的拓扑和将非孤立点粘成一点得到的商空间称为ω_1扇(ω_1-fan), 记为 S_{ω_1}.

引理 3.6.9 S_{ω_1}是不具有点可数 cs*网络的 Lašnev 空间.

证明 对于每一$\alpha<\omega_1$, 设 X_α 是含极限点 x_α 的非平凡的收敛序列. 记 $A=\{x_\alpha : \alpha<\omega_1\}$, 则$S_{\omega_1}=(\oplus_{\alpha<\omega_1}X_\alpha)/A$. 因为 A 是$\oplus_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$ 的闭子空间, 所以S_{ω_1}是可度量化空间$\oplus_{\alpha<\omega_1}X_\alpha$ 的闭映象, 因而S_{ω_1}是 Lašnev空间.

设 s 是 S_{ω_1}中唯一的非孤立点. 对于每一$\alpha<\omega_1$, 令 $Y_\alpha=X_\alpha\setminus\{s\}$. 若$S_{\omega_1}$具有点可数的 cs*网络$\mathcal{P}$, 记$\{P\in\mathcal{P}: s\in P$ 且对于无限个$\alpha<\omega_1$有 $Y_\alpha\cap P\neq\varnothing\}=\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 于是可归纳地选取$S_{\omega_1}$的子集$C=\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$使得每一$y_n\in P_n\setminus\{s\}$且不同的$y_n$属于不同的$Y_\alpha$, 那么 C是$S_{\omega_1}$的闭集. 令$V=S_{\omega_1}\setminus C$, $H=\bigcup\{P\in\mathcal{P}: s\in P\subset V\}$. 若$P\in\mathcal{P}$且$s\in P\subset V$, 则每一$P_n\neq P$, 于是 P 仅与有限个 Y_α 相交, 由$\mathcal{P}$的点可数性, H 仅与可数个 Y_α 相交, 因此有$\beta<\omega_1$使得 $Y_\beta\cap H=\varnothing$. 设 $V\cap Y_\beta=\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, 那么序列$\{x_n\}$收敛于 s, 由于 V 是 s 的开邻域, 存在$P\in\mathcal{P}$使得$\{x_n\}$的某子序列是终于 P 的且$P\subset V$, 从而$P\subset H$, 于是 $Y_\beta\cap H\neq\varnothing$, 矛盾. 所以 S_{ω_1}不具有点可数的 cs*网络. ∎

易验证, S_{ω_1}具有点可数 k 网络. 由引理 3.6.9, S_{ω_1}不具有点可数的闭 k 网络, 于是 S_{ω_1}不是$\aleph$空间.

普通归纳法的一般化是超限归纳法(transfinite induction). 设对于每一序数α, 给定命题 $P(\alpha)$. 如果下述条件成立, 则对于所有序数α, $P(\alpha)$都正确. (1) 对于$\alpha=0$, P(0)是正确的; (2) 对于$\alpha<\alpha_0$的任意序数α, 若 $P(\alpha)$是正确的, 则 $P(\alpha_0)$是正确的.

设$\mathcal{P}$是空间 X 的子集族, $\mathcal{P}$称为局部可数的(locally countable), 若对于每一$x\in X$, 存在 x 在 X 中的邻域 V 使得 V 仅与 $\mathcal{P}$ 中可数个元相交. 类似地可定义σ 局部可数集族. 显然, 局部有限集族是局部可数集族, 局部可数集族是点可数集族.

引理 3.6.10 设 X 是可度量化空间且 $f:X\to Y$是闭映射. 那么空间 Y 不含有闭子空间同

胚于 S_{ω_1} 当且仅当 f 是边界 L 映射.

证明　设空间 Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 若 f 不是边界 L 映射, 则存在 $y\in Y$ 使得 $\partial f^{-1}(y)$不是 X 的 Lindelöf 子空间, 于是存在$\partial f^{-1}(y)$的不可数的闭离散子集$\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$(定理 2.2.8), 因为 X 是仿紧空间, 所以 X 是集态正规空间(定理 2.3.9), 存在 X 的离散的开子集族$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$使得每一 $x_\alpha\in V_\alpha$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 若 U 是 y 在 Y 中的邻域, 那么 $f^{-1}(U)\cap V_\alpha$ 是 x_α 在 X 中的邻域, 于是 $f^{-1}(U)\cap(V_\alpha\setminus f^{-1}(y))\neq\varnothing$, 即 $U\cap(f(V_\alpha)\setminus\{y\})\neq\varnothing$, 所以 $y\in\overline{f(V_\alpha)\setminus\{y\}}$. 因为 Y 是 Fréchet 空间, 存在由$f(V_\alpha)\setminus\{y\}$中点组成的序列$\{y_{\alpha,n}\}$收敛于 y. 令 $T_\alpha=\{y_{\alpha,n} : n\in\mathbb{N}\}$, 那么$T_\alpha\subset f(V_\alpha)\setminus\{y\}$. 因为$\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的离散集族, 由引理 3.6.2, $\{f(V_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$是 Y 的 HCP 集族, 再由引理 3.6.3, $\{\overline{f(V_\alpha)}\}_{\alpha\in\Lambda}$也是 Y 的 HCP 集族, 从而$\{T_\alpha\cup\{y\}\}_{\alpha\in\Lambda}$是 Y 的 HCP 集族. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 由引理 3.6.5, 存在$T_\alpha$的有限子集 F_α 和Λ的有限子集Λ_α使得当 $\beta\in\Lambda\setminus\Lambda_\alpha$ 时有$(T_\alpha\setminus F_\alpha)\cap T_\beta=\varnothing$, 令 $K_\alpha=T_\alpha\setminus F_\alpha$. 由 Zermelo 良序定理(引理 1.5.5), 把指标集Λ良序化, 再由超限归纳法, 可选取Λ的基数为ω_1的子集Γ使得$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是 Y 中互不相交的集族. 由于$\{K_\alpha\cup\{y\}\}_{\alpha\in\Gamma}$是 Y 的 HCP 集族且每一 $K_\alpha\cup\{y\}$是 Y 的含极限点的非平凡的收敛序列, 从而 Y 的闭子空间$\{y\}\cup(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}K_\alpha)$同胚于 S_{ω_1}(练习 3.6.7).

反之, 设 f 是边界 L 映射, 由引理 2.4.5, 存在 M 的闭子空间 Z 使得 $f_{|Z}: Z\to X$ 是闭 L 映射. 让$\mathcal{B}$是可度量化空间 Z 的σ局部有限基, 令$\mathcal{P}=f(\mathcal{B})$. 由于 f 是紧覆盖映射(推论 2.4.9), 于是$\mathcal{P}$是空间 Y 的 k 网络(练习 3.3.2). 又由于闭 L 映射保持局部可数集族(练习 3.6.6), 则$\mathcal{P}$是 Y 的σ局部可数的 k 网络, 于是$\overline{\mathcal{P}}$是 Y 的点可数的闭 k 网络, 从而 Y 的任一子空间也具有点可数的闭 k 网络. 由引理 3.6.9, Y 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. ∎

定理 3.6.11　(高智民[1987b], 林寿[1988b])空间 X 是可度量化空间的闭 s 映象当且仅当 X 是 Fréchet 的$\aleph$空间.

证明　设存在可度量化空间 M 和闭 s 映射 $f:M\to X$. 显然, X 是仿紧的 Fréchet 空间. 由于 M 是可度量化空间, M 具有σ局部有限基$\mathcal{B}$, 令$\mathcal{P}=f(\mathcal{B})$. 因为 f 是紧覆盖映射, 所以$\mathcal{P}$是

X 的 k 网络. 又因为 f 是闭 L 映射, 于是 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ 局部可数的 k 网络. 记 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的局部可数集族且 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由于 $\mathcal{P}_n$ 是局部可数的, 存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U}_n$ 使得 $\mathcal{U}_n$ 的每一元仅与 $\mathcal{P}_n$ 中可数个元相交, 又由于 X 是仿紧空间, 不妨设 $\mathcal{U}_n$ 是 X 的局部有限的开覆盖, 令 $\mathcal{F}_n=\{P\cap U : P\in\mathcal{P}_n, U\in\mathcal{U}_n\}$. 则 $\mathcal{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限集族.

事实上, 记 $\mathcal{U}_n=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda_n$, 记 $\mathcal{P}_n$ 中与 U_α 相交的可数个元为 $P_{\alpha,k}$, $k\le k_\alpha$, 当 $k>k_\alpha$ 时, 记 $P_{\alpha,k}=\varnothing$. 对于每一 $m\in\mathbb{N}$, 令 $\mathcal{H}_{n,m}=\{P_{\alpha,m}\cap U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda_n}$. 由于 $\mathcal{U}_n$ 是局部有限的, 所以 $\mathcal{H}_{n,m}$ 也是局部有限的. 又由于 $\mathcal{F}_n=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_{n,m}$, 故 $\mathcal{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限集族.

令 $\mathcal{F}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$. 下面证明 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网络. 对于 X 的紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 U, 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网络, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $\mathcal{P}_n$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$ 使得 $K\subset\bigcup\mathcal{P}'\subset U$, 又由于 $\mathcal{U}_n$ 是 X 的开覆盖, 存在 $\mathcal{U}_n$ 的有限子集 $\mathcal{U}'$ 使得 $K\subset\bigcup\mathcal{U}'$. 令 $\mathcal{H}'=\{P\cap U : P\in\mathcal{P}', U\in\mathcal{U}'\}$, 则 $\mathcal{H}'$ 是 $\mathcal{F}_n$ 的有限子集且 $K\subset\bigcup\mathcal{H}'\subset U$, 所以 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网络. 故 X 具有 σ 局部有限 k 网络, 因此 X 是 $\aleph$ 空间.

反之, 设 X 是 Fréchet 的 $\aleph$ 空间. 由 Foged 定理, 存在可度量化空间 M 和闭映射 $f:M\to X$. 由于 $\aleph$ 空间的子空间仍是 $\aleph$ 空间, 又由于 S_{ω_1} 不是 $\aleph$ 空间, 所以 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 由引理 3.6.10, f 是边界 L 映射. 再由引理 2.4.5, 存在 M 的闭子空间 Z 使得 $f_{|Z}: Z\to X$ 是 L 映射. 这时 $f_{|Z}$ 是闭 s 映射. 故 X 是可度量化空间的闭 s 映象. ∎

作为本章的结束, 本节最后介绍 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 2.3.3)的一个实质推广. 由 Foged 定理和定理 2.4.16, 有下述引理.

引理 3.6.12 具有 σ 遗传闭包保持 k 网络的正则的强 Fréchet 空间是可度量化空间. ∎

定理 3.6.13 (Burke-Engelking-Lutzer 度量化定理[1975])空间 X 是可度量化空间当且仅当 X 是具有 σ 遗传闭包保持基的正则空间.

证明 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理和引理 3.6.12, 只须证明具有 σ-HCP 基的空间 X 是第一可数空间. 设 $\mathcal{B}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n$ 是 X 的基, 其中每一 $\mathcal{B}_n$ 是 X 的 HCP 的开集族. 先证

明 X 的每一单点集是 G_δ 集, 即若 $x\in X$, 则存在 X 的开集列$\{G_n\}$使得$\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $G_n=X\setminus\overline{\bigcup\{B\in\mathcal{B}_n:x\notin\overline{B}\}}$, 由于 $\mathcal{B}_n$ 是闭包保持的, 所以 G_n 是 x 在 X 中的开邻域. 若$y\in X\setminus\{x\}$, 则存在 X 中分别含有点 x 和 y 的不相交的开集 U 和 V, 于是存在$n\in\mathbb{N}$和 $B\in\mathcal{B}_n$ 使得$y\in B\subset V$, 从而 $x\notin\overline{B}$, 因此 $y\notin G_n$, 所以$\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}G_n$.

下面证明 X 的点 x 在 X 中具有可数邻域基. 若 x 是 X 的孤立点, 则 x 在 X 中具有可数邻域基. 若 x 不是 X 的孤立点, 则对于每一$n\in\mathbb{N}$, x 仅属于$\mathcal{B}_n$中的有限个元. 否则, 存在$\mathcal{B}_n$的可数子集$\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$使得每一 P_i 含有点 x. 令 $H_1=P_1\cap G_1$, $H_{i+1}=H_i\cap P_{i+1}\cap G_{i+1}$, $i\in\mathbb{N}$. 则$\{H_i\}$是 x 的递减的开邻域列, 于是 x 不是 $H_i\setminus H_{i+1}$ 的聚点, 由于每一 $H_i\setminus H_{i+1}\subset P_i$, $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$是 X 的 HCP 集族, 且$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(H_i\setminus H_{i+1})=H_1\setminus\bigcap_{i\in\mathbb{N}}H_i=H_1\setminus\{x\}$, 所以 x 不是 $H_1\setminus\{x\}$的聚点, 从而 x 是 X 的孤立点, 矛盾. 从而 x 仅属于$\mathcal{B}$中的可数个元, 即 x 在 X 中具有可数邻域基. 故 X 中第一可数空间. ▋

例 3.6.14 Michael 空间(Michael[1957]): 具有σ闭包保持基的不可度量化的正则空间.

例 1.2.8 已介绍了最大紧化$\beta\mathbb{N}$. 取定$p\in\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, 令 $X=\mathbb{N}\cup\{p\}$. 集合 X 赋予$\beta\mathbb{N}$的子空间拓扑称为 Michael 空间(Michael space). 显然, X 是正则空间. 由于$\mathbb{N}$是$\beta\mathbb{N}$的稠密子集, 所以 X 不是离散空间, 又由于 X 中不存在非平凡的收敛序列, 于是 X 不是第一可数空间, 从而 X 不是可度量化空间. 因为$\mathbb{N}$是 X 的孤立点集, p 在 X 中的开邻域基是 X 的闭包保持集族, 于是 X 具有σ闭包保持基. ▋

本章较详细地介绍了 Ponomarev 方法在研究可度量化空间的一类重要性质(可度量化空间映象)中的独特作用. Ponomarev 方法的研究一方面丰富了映射理论, 另一方面带来了以基作为出发点的集族性质的深刻革命. 20 世纪的后 40 年广义度量空间理论的进展正是伴随着这种变化而产生. 网络(Arhangel'skiǐ[1959]), 伪基(Michael[1966]), k 网络(O'Meara[1971]), cs 网络(Siwiec[1971]), cs*网络(高智民[1987a]), wcs*网络(Lin, Tanaka[1994])等一批具有鲜明个性的集族性质所刻画的拓扑空间类推动了点集拓扑学的迅猛发展. 这些集族性质在本书的第二部分讨论函数空间的拓扑性质时也发挥了至关重要的作用.

注 3.6.15 拓扑空间论著作.

1955 年 J. L. Kelley[1955]的"General Topology"和 1966 年 J. Dugundji[50][1966]的"Topology"是国外出版较早、影响较大的论述拓扑空间基本理论的著作，其主要内容有拓扑空间，拓扑空间中的收敛，积空间与商空间，分离公理，可数空间，连通性，紧空间，度量空间和函数空间，中心内容是介绍 20 世纪 30 年代点集拓扑学的重要成就，包含有 Urysohn 引理(引理 1.2.11), Tietze 扩张定理(引理 1.2.11), Urysohn 度量化定理(推论 2.3.4), Tychonoff 积定理(定理 1.1.12), Tychonoff 紧扩张定理(定理 1.3.9)等精彩结果．这些内容也是国内从 20 世纪 70 年代末以来出版的十多种点集拓扑学教科书的核心内容，其中使用较为广泛的有熊金城[1998]教授的《点集拓扑讲义》．由于受写作年代或使用对象的限制，上述书籍少有涉及 20 世纪 50 年代后一般拓扑学的成就．

1944年 J. Dieudonné引进仿紧性概念是一般拓扑学进入全盛期的重要标志．随着拓扑空间论的迅猛发展，为出版高水平的学术论著积累了丰富的素材、奠定了坚实的基础．自 20 世纪70 年代以来优秀的点集拓扑学著作不断涌现，最具代表性的是波兰数学家 R. Engelking 的著作. 1968 年 Engelking 的"Outline of General Topology"由 North-Holland 出版公司和波兰科学出版社联合出版. 经过大量的补充, 1975 年 Engelking 在波兰科学出版社出版"Topologia Ogólna"(波兰文), 1977 年该书由作者自译为英文版的"General Topology"(Warszawa: Polish Scientific Publishers)出版, 1986 年又由作者补充部分新文献后由 M. Я. Антоновский 和 A. B. Архангельский 译为俄文以"Общая Топология"(Москва: Мир)出版, 1989 年 Engelking[1989] 的"General Topology"英文第二版出版．该书全面论述了一般拓扑学的基本内容，在问题(练习)部分补充了现代的一些研究方向，如线性序空间，Σ 积，基数函数，逆系，超空间与集值映射等，内容丰富，课题广泛，史料确切，引文全面(共 972 篇)，但正文内容大多是 1960 年前的结果，对于如何快速进入一般拓扑学的相关课题的研究还需学习进一步的著作．

对我国的拓扑空间论发展产生较大影响的介绍现代一般拓扑学的著作也许算是 1974 日本数学家儿玉之宏(Kodama)和永见启应(Nagami)的《位相空间论》[1974]. 该书由方嘉琳教授译成中文《拓扑空间论》1984 年在科学出版社出版. 《拓扑空间论》简要地介绍了传统拓扑空间论的基本内容，有下述两个极为显著的特点．一是较早地突出了仿紧空间与度量空间、可展空间的相互关系．二是强调了映射与空间的思想，在全书的后三分之一部分，以 Arhangel'skiĭ 引入的点可数型空间、p 空间入手，建立了用映射揭示空间类之间联系的研究框架，对于满足可数可积性质的约 10 个广义度量空间类进行了详细的讨论，首创了在拓扑

[50] 美国数学家 J. Dugundji(1919-1985)，他是波兰数学家 W. Hurewicz(1904-1956)的学生.

空间论专著中论述广义度量空间理论的新尝试. 该书也仅是介绍至 1972 年拓扑空间论的主要内容. 日本数学家长田润一(Nagata)的"Modern General Topology"(Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V)为反映modern的思想, 虽初版于1968年, 但经过了多次修改, 第一次修订出版于 1974 年, 第二次修订出版于 1985 年, 每一次修订都增加了不少覆盖与映射在空间研究拓扑空间论中作用的内容, 编排体系也与以往拓扑空间论的著作有所不同. 一是较早地突出了收敛、覆盖、映射统一全书的思想. 二是介绍了仿紧空间、亚紧空间、次仿紧空间和θ加细空间等一系列典型的覆盖性质. 三是阐述了 20 世纪 60 至 70 年代引进的一大批广义度量空间类, 以"遗传性"、"可数可积性"、"映射性质"、"可数闭和定理"为线索来验证这些空间类是否具有这些运算性质. 四是为体现内容的完整性, 还介绍了连续函数格、函数空间、函数扩张理论、选择理论、逆极限理论、线性序空间、基数函数、Dyadic 空间和拓扑空间的测度论等内容. 由于吸收了许多现代的结果, 内容不可避免的显得庞杂, 以至于各部分之间交叉过多, 不便于初学者了解一般拓扑学的主要内容的来龙去脉.

1980 年以来国际上介绍现代拓扑空间论的著作层出不穷. 下面列举一些具有特色的著作(不含综述报告)供读者学习时参考. 1984 年 K. Kunen 和 J. E. Vaughan 编辑的"Handbook of Set-Theoretic Topology"(Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V)中由 D. K. Burke[1984]撰写的"Covering properties", 由 G. Gruenhage[1984]撰写的"Generalized metric spaces"和由 T. C. Przymusiński 撰写的"Products of normal spaces". 1989 年 K. Morita 和 J. Nagata 编辑的"Topics in General Topology"(Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V)中由 M. Atsuji 撰写的"Normality of product spaces Ⅰ", 由 T. Hoshina 撰写的"Normality of product spaces Ⅱ", 由 Y. Yasui 撰写的"Generalized paracompactness", 由 J. Nagata 撰写的"Generalized metric spaces Ⅰ"和由 K. Tamano 撰写的"Generalized metric spaces Ⅱ". 在国内, 1991 年蒋继光教授出版了《一般拓扑学专题选讲》(成都: 四川教育出版社), 1995 年林寿教授出版了《广义度量空间与映射》(北京: 科学出版社). 这些著作总的特点是反映了拓扑空间论某专题最新的研究成果. 由此看来, 要想出版一本既包含拓扑空间论传统内容, 又能反映现代拓扑空间论各专题最新发展线索的专著是非常困难的.

2000 年高国士[2000]教授的专著《拓扑空间论》是一本篇幅适中, 既包含拓扑空间论基本内容, 又能描写现代拓扑空间论一些主要研究专题的力作. 该书由八章组成, 前四章论述拓扑空间论的基本内容, 自成体系, 可供需要了解拓扑空间论基础知识的数学高年级学生阅读, 同时为介绍后续内容作准备, 点缀了一些新内容, 如完备映射(即逆紧映射)、k 空间等, 含有在国内点集拓扑学参考书中较少介绍的一致空间理论; 后四章是一般拓扑学两大课题

——“覆盖性质”与“广义度量空间”的深入研究, 能导向该课题的研究前沿. 该书每章后面都附有精心选择的大量习题, 对于初学者来说可以检验其对正文内容的掌握程度, 另有部分习题是对正文内容的有力补充.

练习

3.6.1 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 HCP 集族. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $\mathcal{P}_n=\{P_1\cap P_2\cap\ldots\cap P_n: P_i\in\mathcal{P}, i\le n\}$. 证明: $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 HCP 集族.

3.6.2 证明: 可数紧空间的 HCP 覆盖有有限子覆盖.

3.6.3 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 HCP 集族. 令 $D=\{x\in X: \mathcal{P}$ 在 x 不是点有限的$\}$, $\mathcal{F}=\{P\setminus D: P\in\mathcal{P}\}$. 若 K 是 X 的紧子集, 证明: (1) $K\cap D$ 是有限集; (2) K 仅与 $\mathcal{F}$ 中有限个元相交.

3.6.4 证明: Lašnev 空间具有点可数的 k 网络(Foged[1985]).

3.6.5 证明: 逆紧映射保持 $\aleph$ 空间性质.

3.6.6 设 $f:X\to Y$ 是闭 L 映射. 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的局部可数集族, 则 $f(\mathcal{P})$是空间 Y 的局部可数集族.

3.6.7 证明: 引理 3.6.10 中空间 Y 的闭子空间$\{y\}\cup(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}K_\alpha)$同胚于 S_{ω_1}.

3.6.8 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是可度量化空间. 证明: 空间 Y 不含有闭子空间同胚于 S_ω 当且仅当 f 是边界紧映射.

3.6.9 证明: Michael 空间 X(例 3.6.14)的所有紧子集是有限集, 所以 X 不是 k 空间.