第三章　Ponomarev 方法

作为研究度量空间拓扑性质的深入, 本章将探讨空间与映射的分类问题, 即寻求度量空间在确定映射下象空间的内在刻画, 或把确定的空间表示为度量空间的映象. 这是一内容非常丰富的课题, 限于篇幅本章仅围绕在映射理论中占重要位置的商映射、开映射、闭映射、紧覆盖映射等映射展开, 介绍 V. Ponomarev(В. Пономарев), A. Arhangel'skiǐ, E. Michael, K. Nagami(永见启应), L. Foged 及国内学者的部分工作. 由于这些工作大部分是利用由 V. Ponomarev 首创的把确定的不可度量空间表示为 Baire 零维空间的子空间的映象的方法来实现的, 所以本章定名为 Ponomarev 方法.

本章约定: 所有空间是满足 T_2 分离性质的拓扑空间.

§3.1　弱第一可数空间

度量空间的开映象是第一可数空间(引理 2.4.10), 而开映射是商映射, 所以寻求度量空间的商映象势必讨论比第一可数空间弱的空间类. 由引理1.6.6, 度量空间的商映象是 k 空间, 但是并非每一 k 空间是度量空间的商空间(定理 3.2.2). 描述度量空间的商空间是下面要介绍的序列空间.

对于空间 X, 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 并且 U 是 x 在 X 中的邻域, 则"存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得当 $n\geq m$ 时有 $x_n\in U$". S. Franklin[42][1965]通过对这一比开集弱的性质的提炼, 引入了序列开集的概念, 并导致序列空间的建立.

设 P 是空间 X 的子集. 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 称$\{x_n\}$是终于 P 的(eventually in P), 如果存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得$\{x\}\bigcup\{x_n : n\geq m\}\subset P$. P 称为 X 中的点 x 的序列邻域(sequential neighborhood), 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 则$\{x_n\}$是终于 P 的. P 称为 X 的序列开集(sequentially open set), 若 P 是 P 中每一点的序列邻域. P 称为 X 的序列闭集(sequentially closed set), 若 $X\setminus P$ 是 X 的序列开集.

设 P 是空间 X 的子集. 易验证, 若 P 是点 x 的邻域, 则 P 是 x 的序列邻域; 若 P 是 X 的开集, 则 P 是 X 的序列开集; 若 P 是 X 的闭集, 则 P 是 X 的序列闭集.

---

[42] S. P. Franklin 是美国数学家 R. Sorgenfrey(1915-1996)的学生.

为了便于叙述，有时对于序列$\{x_n\}$与序列所组成的集$\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$等同看待，可以从上下文中区别出它们的确切含意.

引理 3.1.1 设 P 是空间 X 的子集，则下述条件相互等价:

(1) P 是 X 的序列闭集;

(2) 由 P 中点组成的 X 的收敛序列的极限点在 P 中;

(3) 如果 S 是 X 中含极限点的收敛序列，那么 $S\cap P$ 是 S 的闭集.

证明 (1)$\Rightarrow$(3). 设 P 是空间 X 的序列闭集且 S 是 X 中含极限点的收敛序列. 若 $S\cap P$ 不是 S 的闭集，则 $S\cap P$ 是无限集且存在 $S\cap P$ 的聚点 $x\in S\setminus P$. 记 $S\cap P=\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$，因为 X 是 T_2 空间，序列$\{x_n\}$收敛于 x. 由于 $X\setminus P$ 是 x 的序列邻域，于是$\{x_n\}$是终于 $X\setminus P$ 的，这与所有的 $x_n\in P$ 相矛盾.

(3)$\Rightarrow$(2). 设 P 满足如果 S 是 X 中含极限点的收敛序列，那么 $S\cap P$ 是 S 的闭集. 如果 P 中的序列$\{x_n\}$在 X 中收敛于点 x，令 $S=\{x\}\cup\{x_n: n\in\mathbb{N}\}$，则 $S\cap P$ 是 S 的闭集，由于每一 $x_n\in S\cap P$，于是 $x\in S\cap P\subset P$.

(2)$\Rightarrow$(1). 若 P 不是 X 的序列闭集，则 $X\setminus P$ 不是 X 的序列开集，于是存在 $x\in X\setminus P$ 使得 $X\setminus P$ 不是 x 的序列邻域，从而存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得$\{x_n\}$不是终于 $X\setminus P$ 的，因此存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$使得每一 $x_{n_i}\in P$，即存在由 P 中点组成的 X 的收敛序列的极限点不在 P 中. ∎

上述序列闭集的特征(2)可简述为序列闭集关于收敛序列是封闭的.

定义 3.1.2 (Franklin[1965])空间 X 称为序列空间(sequential space)，若 X 的每一序列开集是 X 的开集.

显然，空间 X 是序列空间当且仅当 X 的每一序列闭集是 X 的闭集. 由引理 3.1.1，在序列空间中闭集关于全体含极限点组成的收敛序列的集族具有弱拓扑(定义 1.6.4). 由于 k 空间定义为关于全体紧子集组成的覆盖具有弱拓扑，于是

定理 3.1.3 序列空间是 k 空间. ∎

下述例子说明 k 空间未必是序列空间.

例 3.1.4 存在不是序列空间的紧空间.

让Λ是不可数集. 对于每一$\alpha\in\Lambda$，令 D_α 是集合$\{0, 1\}$赋予离散拓扑的空间. 则积空

间 $X=\prod_{\alpha\in\Lambda}D_\alpha$ 是紧空间(Tychonoff 积定理). 设每一 $p_\alpha:X\to D_\alpha$ 是投影映射, 置 Z={$x\in X$: 仅有可数个 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $p_\alpha(x)=1$}, 则 Z 是 X 的序列闭的稠密的真子集. 首先, 由于 Λ 的不可数性, 易知 Z 是 X 的真子集. 其次, 设{z_n}是由 Z 中点组成的 X 中的收敛序列, 让 z 是序列{z_n}的极限点. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 Λ 的可数子集 Λ_n 使得当 $\alpha\in\Lambda\setminus\Lambda_n$ 时有 $p_\alpha(z_n)=0$. 令 $\Lambda'=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\Lambda_n$, 则 Λ' 是 Λ 的可数子集, 且当 $\alpha\in\Lambda\setminus\Lambda'$, $n\in\mathbb{N}$ 时有 $p_\alpha(z_n)=0$, 而积空间中点的收敛是依坐标收敛的, 所以当 $\alpha\in\Lambda\setminus\Lambda'$ 时有 $p_\alpha(z)=0$, 从 Z 的定义知 $z\in Z$. 故 Z 关于收敛序列是封闭的, 由引理 3.1.1, Z 是 X 的序列闭集. 再次, 对于 X 的任一非空的基本开集 $V=\prod_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha$, 其中除了有限个 $\alpha\in\Lambda$ 外有 $V_\alpha=D_\alpha$, 存在 Λ 的有限子集 F 使得当 $\alpha\in\Lambda\setminus F$ 时有 $V_\alpha=D_\alpha$. 取点 $y=(y_\alpha)\in X$ 使得当 $\alpha\in F$ 时 $y_\alpha\in V_\alpha$, 当 $\alpha\in\Lambda\setminus F$ 时 $y_\alpha=0$, 那么 $y\in Z\bigcap V$, 于是 $Z\bigcap V\neq\varnothing$, 所以 Z 是 X 的稠密子集.

下面证明 X 不是序列空间. 若 X 是序列空间, 于是 Z 是 X 的闭集, 而 Z 又是 X 的稠密子集, 从而 X=Z, 矛盾. 故 X 不是序列空间. ∎

序数空间[0, ω_1]也是一个非序列空间的紧空间. 序列空间的定义与收敛序列有关. 在§2.4 中为了研究度量空间的可数双商的闭映象, 引入了强 Fréchet 空间性质(定义 2.4.3): 空间 X 称为强 Fréchet 空间, 若{A_n}是 X 中递减的集列且 $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 则存在 $x_n\in A_n$ ($\forall\, n\in\mathbb{N}$) 使得在 X 中序列{x_n}收敛于 x. 这也是与收敛序列有关的拓扑性质, 它的引入源于如下与收敛序列相关的 Fréchet 空间.

定义 3.1.5 (Arhangel'skiĭ[1963], Franklin[1965])空间 X 称为 Fréchet 空间(Fréchet space), 若 $x\in\overline{A}\subset X$, 则存在 A 中点组成的序列{$x_n$}使得在 X 中{$x_n$}收敛于 x.

上述空间与泛函分析中出现的 Fréchet 空间有完全不同的意义, 泛函分析中的 Fréchet 空间意为完全度量化的局部凸的拓扑向量空间. 东欧的一些学者常把定义 3.1.5 的空间称为 Fréchet-Urysohn 空间. 显然, 强 Fréchet 空间是 Fréchet 空间.

定理 3.1.6 Fréchet 空间是序列空间.

证明 设 X 是 Fréchet 空间. 若 F 是 X 的序列闭集, 且 $x\in\overline{F}$, 则存在 F 中点组成的序列{x_n}使得在 X 中{x_n}收敛于 x, 由引理 3.1.1, $x\in F$, 所以 $\overline{F}=F$, 即 F 是 X 的闭集. 故 X 是序

列空间. ▌

综合上面的结果, 第一可数空间$\Rightarrow$强Fréchet空间$\Rightarrow$Fréchet空间$\Rightarrow$序列空间$\Rightarrow$k空间. 这些空间类统称为弱第一可数空间(weakly first-countable space). 相反的蕴含关系都不成立. 例 3.2.11 表明强 Fréchet 空间未必是第一可数空间.

例 3.1.7 Arens 空间 S_2 (Arens[43][1950]): 不是 Fréchet 空间的序列空间.

取 $X=\{0\}\bigcup\mathbb{N}\bigcup\mathbb{N}^2$. 对于每一 n, m, $k\in\mathbb{N}$, 令 $V(n, m)=\{n\}\bigcup\{(n, k) : k\geq m\}$. 集合 X 赋予下述拓扑称为Arens 空间: $\mathbb{N}^2$ 中的点是 X 的孤立点; 对于 $n\in\mathbb{N}$, 点 n 的邻域基元形如 V(n, m), $m\in\mathbb{N}$; 点 0 的邻域基元形如$\{0\}\bigcup(\bigcup_{n\geq i}V(n, m_n))$, 其中 i, $m_n\in\mathbb{N}$. Arens空间简记为 S_2. 易验证, S_2 是 T_2 空间. 由于上述取定的邻域基元均是 S_2 的开闭集, 所以 S_2 是正则空间.

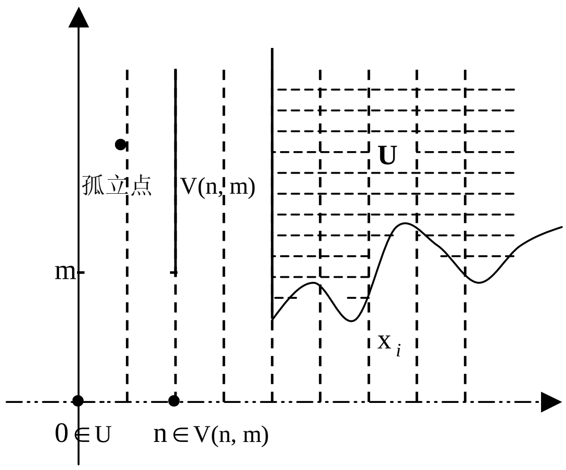


图 Arens 空间 S_2

(7.1) S_2 不是 Fréchet 空间.

设$\{x_i\}$是$\mathbb{N}^2$中的序列, 若序列$\{x_i\}$收敛于 0, 那么对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 集 V(n, 1)中仅含有序列$\{x_i\}$的有限项, 于是存在 $m_n\in\mathbb{N}$ 使得所有的 $x_i\notin V(n, m_n)$. 让 $U=\{0\}\bigcup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}V(n, m_n))$, 则 U 是 0 在 S_2 中的开邻域, 但是所有的 $x_i\notin U$, 矛盾. 故 $\mathbb{N}^2$ 中不存在序列收敛于 0. 因为 $0\in\overline{\mathbb{N}^2}$, 所以 S_2 不是 Fréchet 空间.

(7.2) S_2 是序列空间.

设 P 是 S_2 的序列开集. 对于每一 $x\in P$, 若 $x\in\mathbb{N}^2$, 显然 P 是 x 的邻域; 若 $x=n\in\mathbb{N}$, 由于序列$\{(n, m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 S_2 中收敛于 n, 而 P 是 n 的序列邻域, 所以存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $V(n, m)\subset P$, 于是 P 是 x 的邻域; 若 x=0, 由于序列{n}在 S_2 中收敛于 0, 而 P 是 0 的序列邻域, 所以存在

[43] 美国数学家 R. Arens(1919-2000), 他是美国数学家 Garrett Birkhoff(1911-1996)的学生.

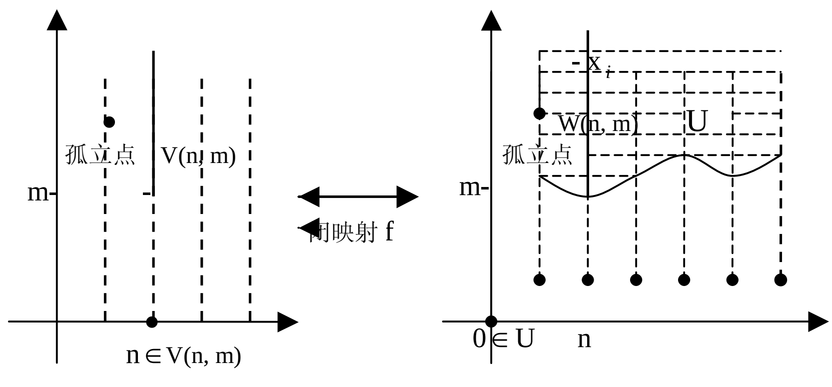
$i\in\mathbb{N}$使得当 $n\geq i$ 时 $n\in P$, 而 P 是 P 中每一点的序列邻域, 于是当 $n\geq i$ 时存在 $m_n\in\mathbb{N}$使得 $V(n, m_n)\subset P$, 让 $W=\{0\}\cup(\bigcup_{n\geq i}V(n, m_n))$, 那么 W 是 0 在 S_2 中的邻域且 $W\subset P$, 于是 P 是 0 的邻域. 故 P 是 P 中每一点的邻域, 所以 P 是 S_2 的开集. 因而 S_2 是序列空间. ▌

例 3.1.8 序列扇 S_ω(Arhangel'skiĭ, Franklin[1968]): 非强 Fréchet 空间的 Fréchet 空间.

取 $X=\{0\}\cup\mathbb{N}^2$. 对于每一 $n, m, k\in\mathbb{N}$, 令 $W(n, m)=\{(n, k) : k\geq m\}$. 集合 X 赋予下述拓扑称为序列扇(sequential fan): $\mathbb{N}^2$ 中的点是 X 的孤立点; 点 0 的邻域基元形如 $\{0\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W(n, m_n))$, 其中 $m_n\in\mathbb{N}$. 序列扇简记为 S_ω. 易验证, S_ω 是 T_2 空间. 由于上述取定的邻域基元均是 S_ω 的开闭集, 所以 S_ω 是正则空间.

(8.1) S_ω 是 Fréchet 空间.

对于 S_ω 的子集 A 及 $x\in\overline{A}$, 不妨设 $x\in\overline{A}\setminus A$, 则 $x=0$. 若对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $W(n, 1)\cap A$ 是有限集, 则存在 $m_n\in\mathbb{N}$使得 $W(n, m_n)\cap A=\varnothing$. 令 $U=\{0\}\cup(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}W(n, m_n))$, 则 U 是 0 在 S_ω 中的邻域且 $U\cap A=\varnothing$, 矛盾. 从而存在 $n\in\mathbb{N}$使得 $W(n, 1)\cap A$ 是无限集, 把 $W(n, 1)\cap A$ 中的点排成无限序列$\{x_i\}$, 则$\{x_i\}$在 S_ω 中收敛于 0. 因而 S_ω 是 Fréchet 空间.



度量空间 M　　　　序列扇 S_ω

(8.2) S_ω 是局部紧的可分度量空间的闭映象.

取 $M=\mathbb{N}\cup\mathbb{N}^2$. 对于每一 $n, m, k\in\mathbb{N}$, 令 $V(n, m)=\{n\}\cup\{(n, k) : k\geq m\}$. 集合 M 赋予下述拓扑: $\mathbb{N}^2$ 中的点是 M 的孤立点; 对于 $n\in\mathbb{N}$, 点 n 的邻域基元形如 $V(n, m)$, $m\in\mathbb{N}$. 易验证, M

是具有可数基的局部紧的正则空间, 于是M是局部紧的可分度量空间(Urysohn度量化定理). 定义 $f:M\to S_\omega$ 使得当 $x\in\mathbb{N}^2$ 时 $f(x)=x$, 当 $x\in\mathbb{N}$时 $f(x)=0$, 则 f 是闭映射(练习 3.1.9).

(8.3) S_ω 不是强 Fréchet 空间.

由于$\partial f^{-1}(0)=\mathbb{N}$不是紧集, 由定理 2.4.7, 2.4.16, S_ω不是强 Fréchet 空间.

(8.4) S_ω 是 S_2 的逆紧映象.

Arens 空间 S_2 的构造如例 3.1.7, 定义 g: $S_2\to S_\omega$ 使得当 $x\in\mathbb{N}^2$ 时 $g(x)=x$, 当 $x\in\{0\}\cup\mathbb{N}$时 $g(x)=0$, 则 g 是逆紧映射(练习 3.1.8). ∎

练习

3.1.1 设 P 是空间 X 的子集. 若 X 中的每一收敛于 x 的序列存在子序列是终于 P 的, 则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

3.1.2 证明: 可数紧的序列空间的序列紧空间.

3.1.3 序列空间的开子空间或闭子空间是序列空间.

3.1.4 证明: Arens 空间 S_2 的子空间$\{0\}\cup\mathbb{N}^2$ 不是序列空间.

3.1.5 证明: 空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 的每一子空间是序列空间.

3.1.6 证明: 空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 的每一点的序列邻域是该点的邻域.

3.1.7 证明: 离散空间的一点紧化是 Fréchet 空间.

3.1.8 用强 Fréchet 空间的定义直接证明序列扇 S_ω不是强 Fréchet 空间.

3.1.9 证明: 例 3.1.8 定义的两个函数 $f:M\to S_\omega$ 和 g: $S_2\to S_\omega$ 分别是闭映射和逆紧映射.

3.1.10 证明: 空间 X 是强 Fréchet 空间当且仅当积空间 $X\times\mathbb{S}_1$ 是 Fréchet 空间.

§3.2 商映象

本节介绍度量空间商映象的内在刻画, 由此可导出度量空间的伪开映象, 可数双商映象的刻画. 这些刻画涉及适当的弱第一可数空间.

引理 3.2.1 商映射保持序列空间性质.

证明 设 $f:X \to Y$ 是商映射, 其中 X 是序列空间. 若 U 是 Y 的序列开集, 则 $f^{-1}(U)$是 X 的序列开集, 而 X 是序列空间, 于是 $f^{-1}(U)$是 X 的开集. 由于 f 是商映射, 所以 U 是 Y 的开集. 故 Y 是序列空间. ∎

如下定理表明序列空间可精确为可度量化空间的商映象.

定理 3.2.2 (Franklin[1965])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是序列空间;

(2) X 是局部紧的可度量化空间的商空间;

(3) X 是可度量化空间的商空间.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是序列空间. 由引理 3.1.1, X 关于全体含极限点的收敛序列组成的集族$\mathcal{S}$具有弱拓扑. 让 M 是覆盖$\mathcal{S}$的拓扑和, f 是从 M 到 X 上的自然映射(引理 1.6.7). 因为 X 是 T_2 空间, 所以每一含极限点的收敛序列是紧的可度量化空间(练习 2.1.7), 于是 M 是局部紧的可度量化空间, 再由引理 1.6.7, f 是商映射, 所以 X 是局部紧的可度量化空间的商空间. (2)$\Rightarrow$(3)是显然的. (3)$\Rightarrow$(1). 因为第一可数空间是序列空间, 由引理 3.2.1, 所以可度量化空间的商空间是序列空间. ∎

由定理 3.2.2, 例 3.1.4 中的紧空间 X 不能表示为可度量化空间的商空间.

例 3.2.3 Arens 空间 S_2 (例 3.1.7): 局部紧的可分的可度量化空间的商空间.

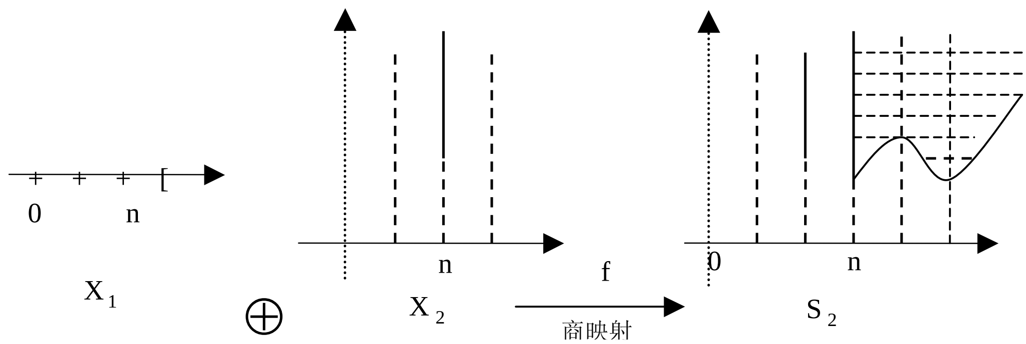


图 度量空间的商空间

让 $X_1=\{0\}\cup\mathbb{N}$, 集合 X_1赋予下述拓扑: $\mathbb{N}$中的点是 X_1 的孤立点; 0 在 X_1 中的邻域基元形如$\{0\}\cup\{k\in\mathbb{N}: k\geq m\}$, $m\in\mathbb{N}$. 则 X_1 是紧的可度量化空间. 让 $X_2=\mathbb{N}\times(\{0\}\cup\mathbb{N})$, 集合 X_2 赋予下述拓扑: $\mathbb{N}^2$ 中的点是 X_2 的孤立点; 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, (n, 0)在 X_2 中的邻域基元形如$\{(n,0)\}\cup\{(n,k): k\geq m\}$, $m\in\mathbb{N}$. 则 X_2 是具有可数基的局部紧的正则空间, 于是 X_2 是局部紧的

可分的可度量化空间(Urysohn度量化定理). 置$M=X_1\oplus X_2$, 则M是局部紧的可分的可度量化空间. 定义 f: $M\to S_2$ 使得当 $x\in X_1\oplus(X_2\setminus(\mathbb{N}\times\{0\}))$时 $f(x)=x$, 当 $x=(n, 0)\in\mathbb{N}\times\{0\}$时 $f(x)=n$. 则 f 是商映射(练习 3.2.1). ▌

与 Fréchet 空间最密切的映射是伪开映射.

定义 3.2.4 (Arhangel'skiǐ[1963])设映射 $f:X\to Y$. f 称为伪开映射(pseudo-open mapping), 若对于每一 $y\in Y$, 如果 U 是 $f^{-1}(y)$在 X 中的邻域, 则 f(U)是 y 在 Y 中的邻域.

显然, 可数双商映射(定义 2.4.12)是伪开映射. 下面几个引理说明了伪开映射与闭映射、商映射及 Fréchet 空间的关系.

引理 3.2.5 闭映射是伪开映射. 伪开映射是商映射.

证明 设 $f:X\to Y$ 是闭映射. 若 $y\in Y$ 且 U 是 $f^{-1}(y)$在 X 中的邻域, 由引理 1.3.1, $y\in Y\setminus f(X\setminus U^\circ)\subset f(U)$, 因为 f 是闭映射, 所以 f(U)是 y 在 Y 中的邻域. 故 f 是伪开映射.

设 $f:X\to Y$ 是伪开映射. 对于 Y 的子集 U, 若 $f^{-1}(U)$是 X 的开集, 那么对于每一 $y\in U$ 有 $f^{-1}(y)\subset f^{-1}(U)$, 因为 $f^{-1}(U)$是 $f^{-1}(y)$在 X 中的邻域且 f 是伪开映射, 所以 U 是 y 在 Y 中的邻域, 即 U 是 U 中每一点的邻域, 从而 U 是 Y 的开集. 故 f 是商映射. ▌

引理 3.2.6 设 $f:X\to Y$ 是商映射. 若 Y 是 Fréchet 空间, 则 f 是伪开映射.

证明 对于 $y\in Y$ 及 $f^{-1}(y)$在 X 中的邻域 U, 若 $y\in Y\setminus f(U)^\circ=\overline{Y\setminus f(U)}$, 因为 Y 是 Fréchet 空间, 存在 $Y\setminus f(U)$中的序列$\{y_n\}$收敛于 y, 这时每一 $y_n\neq y$. 置 $Z=\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$, $F=f^{-1}(Z)$, 那么$\overline{F}\subset F\cup f^{-1}(y)$. 因为 $f^{-1}(y)\subset U$, 且 $U\cap F=\varnothing$, 所以 $f^{-1}(y)\cap\overline{F}=\varnothing$, 从而$\overline{F}\subset F$, 即 F 是 X 的闭集. 由于 f 是商映射, Z 是 Y 的闭集, 矛盾. 故 $y\in f(U)^\circ$. 因此 f 是伪开映射. ▌

引理 3.2.7 伪开映射保持 Fréchet 空间性质.

证明 设 $f:X\to Y$ 是伪开映射, 其中 X 是 Fréchet 空间. 设 $y\in\overline{A}\subset Y$, 如果 $f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}=\varnothing$, 即 $f^{-1}(y)\subset X\setminus\overline{f^{-1}(A)}$, 由于 f 是伪开映射, 那么 $y\in f(X\setminus\overline{f^{-1}(A)})^\circ\subset f(X\setminus f^{-1}(A))^\circ=(Y\setminus A)^\circ=Y\setminus\overline{A}$, 矛盾. 于是有 $x\in f^{-1}(y)\cap\overline{f^{-1}(A)}$. 因为 X 是 Fréchet空间, 存在 $f^{-1}(A)$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 因此 A 中的序列$\{f(x_n)\}$收敛于 $f(x)=y$. 故 Y 是 Fréchet 空间. ▌

利用定理3.2.2及关于Fréchet空间和伪开映射的系列结果可获得可度量化空间的伪开映象的精确刻画.

推论 3.2.8 (Arhangel'skiĭ[1963], Franklin[1965])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是 Fréchet 空间;

(2) X 是局部紧的可度量化空间的伪开映象;

(3) X 是可度量化空间的伪开映象.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由定理 3.2.2 及引理 3.2.6. (2)$\Rightarrow$(3)是显然的. (3)$\Rightarrow$(1)由可度量化空间是 Fréchet 空间及引理 3.2.7. ▮

引理 3.2.9 设 $f:X\to Y$ 是商映射. 若 X 是序列空间, Y 是强 Fréchet 空间, 则 f 是可数双商映射.

证明 若 f 不是可数双商映射, 则存在 $y\in Y$ 及 X 的覆盖 $f^{-1}(y)$的可数开子集族$\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$使得对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $y\in Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)^{\circ}=\overline{Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)}$. 由于 Y 是强 Fréchet 空间, 存在 $y_n\in Y\setminus f(\bigcup_{i\le n}U_i)$使得序列$\{y_n\}$收敛于 y. 不妨设所有的 $y_n\ne y$. 让 $F=\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$, 则 F 不是 Y 的闭集, 而 f 是商映射, 于是 $f^{-1}(F)$不是 X 的闭集, 因为 X 是序列空间, 所以 $f^{-1}(F)$不是 X 的序列闭集, 由引理 3.1.1, 存在 $f^{-1}(F)$中的序列$\{x_i\}$使得在 X 中$\{x_i\}$收敛于 $x\notin f^{-1}(F)$, 又由于每一 $f^{-1}(y_n)$是 X 的闭集, $\{f(x_i):i\in\mathbb{N}\}$是 F 的无限子集, 不妨设存在子序列$\{y_{n_i}\}$使得每一 $f(x_i)=y_{n_i}$, 那么 $f(x)=y$, 即 $x\in f^{-1}(y)$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$使得 $x\in U_m$, 因此存在 $i\in\mathbb{N}$使得 $n_i\ge m$ 且 $x_i\in U_m$, 于是 $y_{n_i}\in f(U_m)$, 矛盾. 故 f 是可数双商映射. ▮

推论 3.2.10 (Siwiec[1971])对于空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是强 Fréchet 空间;

(2) X 是局部紧的可度量化空间的可数双商映象;

(3) X 是可度量化空间的可数双商映象.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)由定理 3.2.2 及引理 3.2.9. (2)$\Rightarrow$(3)是显然的. (3)$\Rightarrow$(1)由可度量化空间是强 Fréchet 空间及引理 2.4.15. ▮

例 3.2.11 非第一可数空间的强 Fréchet 空间.

首先构造蝶形空间(McAuley[44][1956]), 然后说明蝶形空间的商空间是一个非第一可数的强 Fréchet 空间(Lutzer[45][1971]).

取 $X=\mathbb{R}^2$，集合 X 赋予下述蝶形拓扑(butterfly topology): 对于 $x=(t, s)\in X$, 若 $s\neq 0$, x 在 X 中具有欧几里得拓扑的邻域; 若 s=0, x 在 X 中的邻域基元为蝶形集合 $Bt(x, 1/n)=\{x\}\cup\{(t', s')\in X : 0<|t-t'|<1/n, |s-s'|/|t-t'|<1/n\}$, $n\in\mathbb{N}$. 具有蝶形拓扑的空间称为蝶形空间(butterfly space). 易验证, X 是第一可数的正则空间.

(11.1) X 的紧子集 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中不具有可数的邻域基.

由于 X 在子空间 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 上诱导了欧几里得拓扑, 所以 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 的紧子集. 若 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中具有可数邻域基 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 对于每一 $x\in\mathbb{I}\times\{0\}$, $Bt(x, 2)$ 是 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中的邻域, 存在 $n(x)\in\mathbb{N}$ 使得 $U_{n(x)}\subset Bt(x, 2)$. 因为 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是不可数集, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $Z=\{x\in\mathbb{I}\times\{0\} : n(x)=m\}$ 是 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 的不可数子集, 于是 $U_m\subset\bigcap_{x\in Z}Bt(x, 2)$. 设 x 是 Z 在 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 中的一个聚点, 那么存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $Bt(x, 1/k)\subset U_m$. 取定 Z 中不同于 x 的点 y 使得 x 与 y 的第一个分量之间的欧几里得距离小于1/k, 那么 $Bt(x, 1/k)\subset U_m\subset Bt(y, 2)$, 矛盾. 故 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中不具有可数的邻域基.

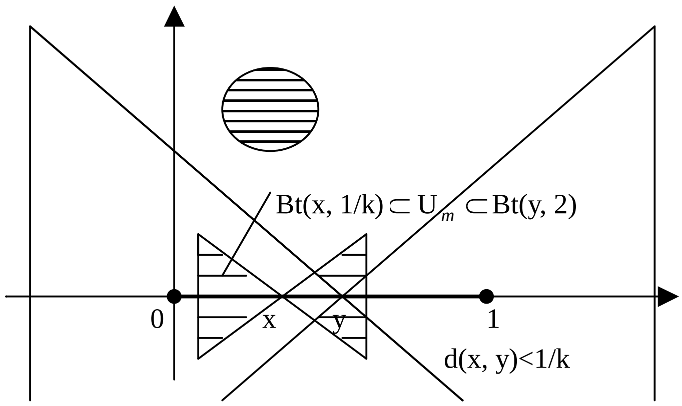


图 McAuley 的蝶形空间

让 $q:X\to X/\mathbb{I}\times\{0\}$ 是自然商映射. 由于 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 的闭集, 于是 q 是闭映射(练习 1.3.2). 令 $Y=X/\mathbb{I}\times\{0\}$, $y_0=q((0, 0))$.

(11.2) Y 是强 Fréchet 空间.

由于 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 的紧子集, 所以 q 是逆紧映射, 于是 q 是可数双商映射(引理 2.4.13), 而 X 是第一可数空间, 因此 Y 是强 Fréchet 空间(引理 2.4.15).

---

44 L. F. McAuley 是美国数学家 F. B. Jones(1910-1999)的学生.
45 D. J. Lutzer 是美国数学家 E. A. Michael 的学生.

(11.3) Y 不是第一可数空间.

若 Y 是第一可数空间, 则点 y_0在 Y 中具有可数邻域基$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 若 U 是子集$\mathbb{I}\times\{0\}$在 X 中的邻域, 于是$q^{-1}(y_0)\subset U$, 因为 q 是闭映射, 由定理 1.3.2, 存在y_0在 Y 中的邻域 V 使得$q^{-1}(V)\subset U$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$使得$q^{-1}(V_m)\subset U$. 因此$\{q^{-1}(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathbb{I}\times\{0\}$在 X 中的可数邻域基, 与(11.1)相矛盾. 故 Y 不是第一可数空间. ∎

练习

3.2.1 证明: 例 3.2.3 定义的函数 $f: M\to S_2$ 是商映射.

3.2.2 设映射 $f:X\to Y$. 证明: f 是伪开映射当且仅当对于 Y 的每一非空子集 B, $f_B:f^{-1}(B)\to B$ 是商映射.

3.2.3 证明: 两个伪开映射的复合函数是伪开映射.

3.2.4 设空间 X 具有可数基, 空间 Y 是强 Fréchet 空间. 若 $f:X\to Y$ 是商映射, 则 Y 具有可数基.

3.2.5 证明: 两个可数双商映射的复合函数是可数双商映射.

§3.3 开映象

度量空间的开映象是第一可数空间(引理 2.4.10). 是否每一第一可数空间是某一可度量化空间的开映象? 1960 年 V. Ponomarev 研究了这一问题, 证明了每一第一可数的空间确实是 Baire 零维空间(例 2.1.12)的某一子空间的开映象. Ponomarev 的基本方法如下: 设$\mathscr{B}$是第一可数空间 X 的基. 记 $\mathscr{B}=\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 赋予指标集$\Lambda$离散拓扑, 令 $M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^\omega$: $\{B_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$构成 X 中某点 x_α 的邻域基$\}$, 其中 M 赋予离散空间Λ的可数次积空间Λ^ω(Baire 零维空间)所诱导的子空间拓扑, 则 M 是度量空间. 对于每一$\alpha=(\alpha_i)\in M$, 可以定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$. 然后证明 f 是开映射.

本节介绍与度量空间的开映象相关的第一可数空间、具有点可数基的空间的映射性质及度量化定理. 为了今后应用的方便, 下面将 Ponomarev 的方法一般化.

设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的网络. 记 $\mathscr{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 子标集 Λ 赋予离散拓扑, 令

$M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^{\omega}:\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 构成 X 中某点 x_α 的网络}, 则 M 是度量空间, 并且对于每一 $\alpha=(\alpha_i)\in M$, 由于 X 是 T_1 空间, 若 $x\in X\setminus\{x_\alpha\}$, 则存在 $i\in\mathbb{N}$ 使得 $P_{\alpha_i}\subset X\setminus\{x\}$, 于是 $\{x_\alpha\}=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\alpha_i}$, 故 x_α 是唯一确定的. 定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$. 称(f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系(Ponomarev system). Ponomarev 系是 Ponomarev 研究度量空间开映象时使用的方法的一般化.

引理 3.3.1 设(f, M, X, $\mathcal{P}$)是 Ponomarev 系.

(1) 若对于每一 $x\in X$, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集构成 x 在 X 中的网络, 则 f 是映射.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的可数局部基, 则 f 是开映射.

(3) 若 X 的非空子集 C 仅与 $\mathcal{P}$ 中可数个元相交, 则 $f^{-1}(C)$ 是 M 的可分子空间.

证明 记 $\mathcal{P}=\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. (1) 对于每一 $x\in X$, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 构成 x 在 X 中的网络. 令 $\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^{\omega}$, 那么 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 所以 f 是满的函数. 另一方面, 对于 $\alpha=(\alpha_i)\in M$, 设 $f(\alpha)=x$, 让 U 是 x 在 X 中的邻域, 因为 $\{P_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网络, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in P_{\alpha_m}\subset U$. 令 $V=\{\gamma\in M:\gamma$ 的第 m 个坐标是 $\alpha_m\}$, 由于 Λ 赋予离散拓扑, 于是 V 是 M 中含有 α 的开集. 对于每一 $\gamma=(\gamma_i)\in V$, $f(\gamma)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\gamma_i}\subset P_{\alpha_m}$, 所以 $f(V)\subset P_{\alpha_m}\subset U$, 故 f 是连续的. 因而 f 是映射.

(2) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的可数局部基. 由(1), f 是映射. 下面证明 f 是开映射. 对于每一 $\alpha=(\alpha_i)\in M$, $n\in\mathbb{N}$, 令 $B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n)=\{(\beta_i)\in M$: 当 $i\le n$ 时有 $\beta_i=\alpha_i\}$, 则 $f(B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n))=\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$. 事实上, 对于每一 $\beta=(\beta_i)\in B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n)$, $f(\beta)\in\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\beta_i}\subset\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$, 于是 $f(B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n))\subset\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$. 另一方面, 若 $x\in\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$, 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的可数局部基, 取定 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\{P_{\beta_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 使得当 $i\le n$ 时 $\beta_i=\alpha_i$ 且 $\{P_{\beta_i}: i>n\}$ 是 x 在 X 中的邻域基, 让 $\beta=(\beta_i)\in\Lambda^{\omega}$, 那么 $\beta\in B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n)$ 且 $f(\beta)=x$, 于是 $\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}\subset f(B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n))$. 因此 $f(B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n))=\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$. 由例 2.1.12, $\{B(\alpha_1, \alpha_2, \dots\alpha_n):(\alpha_i)\in M, n\in\mathbb{N}\}$ 是度量空间 M 的基, 所以 f 是开映射.

(3) 设 X 的非空子集 C 仅与 $\mathcal{P}$ 中可数个元相交，让 $\Gamma=\{\alpha\in\Lambda : P_\alpha\cap C\neq\varnothing\}$，则 Γ 是 Λ 的可数子集. 对于每一 $\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(C)$，$\bigcap_{i\in\mathbb{N}}P_{\alpha_i}=\{f(\alpha)\}\subset C$，于是每一 $P_{\alpha_i}\cap C\neq\varnothing$，所以 $\alpha_i\in\Gamma$，从而 $\alpha\in\Gamma^\omega\cap M$，故 $f^{-1}(C)\subset\Gamma^\omega\cap M$. 因为 Γ^ω 具有可数基，所以 $f^{-1}(C)$ 是 M 的可分子空间. ∎

由引理 3.3.1 的(1)和(2)，立即得到下述的 Ponomarev 定理.

定理 3.3.2 (Ponomarev 定理[1960])X 是第一可数空间当且仅当 X 是可度量化空间的开映象. ∎

V. I. Ponomarev[1960]是对 T_0 空间证明定理 3.3.2 的. E. Michael[1971]证明了每一第一可数空间是某一 T_2 的第一可数空间的开映象，因而不假定满足分离性质定理 3.3.2 也是正确的. S. Hanai[1961]也证明了定理 3.3.2. 对照 Ponomarev 定理，定理 2.6.1(Morita 定理)及定理 2.6.9，Baire 零维空间的构造及映射性质的证明有许多类似，从无理数空间到度量空间再到第一可数空间，反映了人们在认识上的飞跃，可以认为 Baire，Morita 及 Ponomarev 等关于度量空间的映射定理是一脉相承的.

从§3.2 知，若空间 X 是可度量化空间的商(伪开，可数双商)映象，则 X 必是局部紧的可度量化空间的商(伪开，可数双商)映象. 然而，第一可数空间未必是某一局部紧的可度量化空间的开映象. 设 $X=\mathbb{R}^\omega$，其中 $\mathbb{R}$ 赋予欧几里得拓扑，则 X 是非局部紧的度量空间(练习 1.6.2)，于是 X 是第一可数空间，由于开映射保持局部紧性质(练习 1.6.1)，所以 X 不可能是某一局部紧的可度量化空间的开映象.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族，$\mathcal{P}$ 称为点可数的(point-countable)，若 X 的每一点仅属于 $\mathcal{P}$ 中的可数个元. 若空间 X 具有一个点可数的子集族是 X 的基，则称 X 具有点可数基(point-countable base).

引理 3.3.3 可分空间的点可数开集族是可数的.

证明 设 X 是可分空间，$\mathcal{P}$ 是 X 的点可数的开集族. 让 D 是 X 的可数的稠密子集，那么 X 的每一非空开集与 D 相交，于是 $\mathcal{P}=\{P\in\mathcal{P} : P\cap D\neq\varnothing\}$. 由于 D 是可数集且 $\mathcal{P}$ 是点可数的，所以 $\mathcal{P}$ 是可数的. ∎

定义 3.3.4 设映射 $f:X\to Y$. f 称为 s 映射(s-mapping)，若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的可分子集.

定理 3.3.5 (Ponomarev[1960])空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是可度量化空间的开 s

映象.

证明 设空间 X 具有点可数基 $\mathcal{P}$, 让(f, M, X, $\mathcal{P}$)是 Ponomarev 系, 由引理 3.3.1, $f:M\to X$ 是开 s 映射. 反之, 设存在可度量化空间 M 和开 s 映射 $f:M\to X$. 由于 M 是可度量化空间, 由 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 2.3.3), 设 $\mathcal{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 令 $\mathcal{P}=f(\mathcal{B})$. 因为 f 是开映射, 所以 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的基, 又因为 f 是 s 映射, 对于每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$是 M 的可分子空间, 由引理 3.3.3, 仅有 $\mathcal{B}$ 中可数个元与 $f^{-1}(y)$相交, 即 y 仅属于 $\mathcal{P}$ 中可数个元, 从而 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数基. ▌

上述证明表明开 s 映射保持具有点可数基性质. 这一结果对于可数双商 s 映射也是成立的(定理 3.3.8). 下面讨论度量空间的可数双商 s 映象. 先引用与选择公理等价的 Zorn[46]引理.

引理 3.3.6 (Zorn 引理[1935])如果偏序集 X 的每一链都有上界, 则 X 具有极大元. ▌

设 A 是空间 X 的子集, X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为 A 的极小内部覆盖(minimal interior covering), 若 $\bigcup\mathcal{F}$ 是 A 在 X 中的邻域, 但对于每一 $F\in\mathcal{F}$, $A\not\subset(\bigcup(\mathcal{F}\setminus\{F\}))^{\circ}$.

引理 3.3.7 (Burke, Michael[1972])设空间 X 具有点可数集族 $\mathcal{P}$ 满足: 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $x\in\bigcap\mathcal{F}$, $x\in(\bigcup\mathcal{F})^{\circ}$ 且 $\bigcup\mathcal{F}\subset U$, 则 X 具有点可数基.

证明 令 $\Phi=\{\mathcal{F}\subset\mathcal{P}:\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}$ 的有限子集$\}$.

(7.1) X 是第一可数空间.

对于每一 $x\in X$, 置 $\mathcal{B}_x=\{(\bigcup\mathcal{F})^{\circ}:\mathcal{F}\in\Phi, x\in\bigcap\mathcal{F}$ 且 $x\in(\bigcup\mathcal{F})^{\circ}\}$, 则 $\mathcal{B}_x$ 是 x 在 X 中的可数邻域基, 所以 X 是第一可数空间.

对于每一 $\mathcal{F}\in\Phi$, 置 $\mathcal{H}(\mathcal{F})=\{H\subset X:\mathcal{F}$ 是 H 的极小内部覆盖$\}$, $V(\mathcal{F})=(\bigcup(\mathcal{H}(\mathcal{F})\cap\mathcal{P}))^{\circ}$, $\mathcal{V}=\{V(\mathcal{F}):\mathcal{F}\in\Phi\}$.

(7.2) $\mathcal{V}$ 是 X 的基.

对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $\mathcal{F}\in\Phi$ 使得 $x\in(\bigcup\mathcal{F})^{\circ}\subset U$. 不妨设 $\mathcal{F}$ 是$\{x\}$的极小内部覆盖. 取 $\mathcal{B}\in\Phi$ 使得 $x\in\bigcap\mathcal{B}$, $x\in(\bigcup\mathcal{B})^{\circ}$ 且 $\bigcup\mathcal{B}\subset(\bigcup\mathcal{F})^{\circ}$. 若 $B\in\mathcal{B}$, 那么 $\mathcal{F}$ 是 B 的极小内部覆盖, 即 $B\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$, 于是$(\bigcup\mathcal{B})^{\circ}\subset V(\mathcal{F})$, 从而 $x\in V(\mathcal{F})\subset U$. 所以 $\mathcal{V}$ 是 X 的基.

[46] 德国数学家 M. Zorn(1906-1993), 他是奥地利数学家 E. Artin(1898-1962)的学生.

(7.3) $\mathscr{V}$ 是 X 的点可数集族.

对于每一 $x\in X$, 若 $x\in V(\mathscr{F})$, 则存在 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}$ 使得 $x\in A$, 而 x 仅属于 $\mathscr{P}$ 的可数个元, 所以为了证明 x 仅属于 $\mathscr{V}$ 的可数个元, 只须证明

(7.4) 对于 $A\subset X$, 仅有可数个 $\mathscr{F}\in\Phi$ 使得 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$.

若不然, 则存在不可数个 $\mathscr{F}\in\Phi$ 使得 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$, 由于 $\Phi=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\mathscr{F}\subset\mathscr{P}: |\mathscr{F}|=n\}$, 存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 Φ 的不可数子集 Φ' 使得当 $\mathscr{F}\in\Phi'$ 时有 $|\mathscr{F}|=m$ 且 $A\in\mathscr{H}(\mathscr{F})$. 由 Zorn 引理, 设 $\mathscr{M}$ 是 $\mathscr{P}$ 的满足对于不可数个 $\mathscr{F}\in\Phi'$ 有 $\mathscr{M}\subset\mathscr{F}$ 的极大子集, 则 $0\leq|\mathscr{M}|<m$. 令 $\Phi''=\{\mathscr{F}\in\Phi':\mathscr{M}\subset\mathscr{F}\}$, 则 Φ'' 是不可数的且 $A\not\subset(\bigcup\mathscr{M})^{\circ}$, 取定 $y\in A\setminus(\bigcup\mathscr{M})^{\circ}$, 则有 $y\in\overline{X\setminus\bigcup\mathscr{M}}$, 由(7.1), 存在 $X\setminus\bigcup\mathscr{M}$ 中的序列 L 收敛于 y, 从而 $y\in\overline{L}$. 对于每一 $\mathscr{F}\in\Phi''$, 由于 $y\in A\subset(\bigcup\mathscr{F})^{\circ}$, 所以 $L\cap(\bigcup\mathscr{F})\neq\varnothing$, 于是 L 与 $\mathscr{F}$ 中的某些元相交. 由于 $\mathscr{P}$ 的点可数性及 Φ'' 的不可数性, 存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得 P 与 L 相交且 Φ'' 中有不可数个元含有 P, 这时 $P\notin\mathscr{M}$ 且在 Φ'' 中有不可数个元含有 $\mathscr{M}\cup\{P\}$, 这与 $\mathscr{M}$ 的极大性相矛盾. 故(7.4)成立.

综上所述, $\mathscr{V}$ 是空间 X 的点可数基. ∎

定理 3.3.8 (Filippov[1968])可数双商的 s 映射保持具有点可数基性质.

证明 设空间 X 具有点可数基 $\mathscr{B}$, 让 $f:X\to Y$ 是可数双商 s 映射. 令 $\mathscr{P}=f(\mathscr{B})$. 由引理 3.3.3, $\mathscr{P}$ 是空间 Y 的点可数集族. 对于每一 $y\in Y$ 及 y 在 Y 中的邻域 U, 那么 $f^{-1}(y)\subset f^{-1}(U)$, 由于 $\mathscr{B}$ 是 X 的基, 存在 $\mathscr{B}$ 的子集 $\mathscr{B}'$ 使得 $f^{-1}(y)\subset\bigcup\mathscr{B}'\subset f^{-1}(U)$, 不妨设 $\mathscr{B}'$ 的每一元与 $f^{-1}(y)$ 相交, 由 f 是 s 映射及引理 3.3.3, $\mathscr{B}'$ 是可数的, 又由于 f 是可数双商映射, 存在 $\mathscr{B}'$ 的有限子集 $\mathscr{B}''$ 使得 $y\in f(\bigcup\mathscr{B}'')^{\circ}\subset f(\bigcup\mathscr{B}'')\subset U$. 置 $\mathscr{F}=f(\mathscr{B}'')$, 则 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{P}$ 的有限子集, $y\in\bigcap\mathscr{F}$, $y\in(\bigcup\mathscr{F})^{\circ}$ 且 $\bigcup\mathscr{F}\subset U$. 由引理 3.3.7, Y 具有点可数基. ∎

因为开映射是可数双商映射, 由定理 3.3.8 和定理 3.3.5 有下述推论.

推论 3.3.9 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是可度量化空间的可数双商的 s 映象. ∎

为了讨论度量空间的商 s 映象(§3.5)和闭映象(§3.6)的需要, 下面对引理 3.3.7 进行适当的提炼. 引理 3.3.7 的(7.4)表明: 对于 X 的子集 A, 仅有可数个由 $\mathscr{P}$ 的元组成的 A 的有限极小内部覆盖. 这一结论的证明利用了引理 3.3.7 的(7.1): X 是第一可数空间. 当 X 未必是第一可数空间时, 使用如下定义的极小覆盖, 可获得与(7.4)相类比的 Miščenko 引理. 从发展过程看, 引理 3.3.7 的提出正是受到 Miščenko 引理的启发. Miščenko 引理是处理点可数覆盖的重要工

具, 它的叙述形式及证明方法以后还将多次使用(如练习 3.3.5, 引理 3.5.3). 对于空间 X 的子集 A, X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为 A 的极小覆盖(minimal covering), 若 $\mathcal{F}$ 覆盖 A, 但对于每一 $F\in\mathcal{F}$, $\mathcal{F}\setminus\{F\}$ 不是 A 的覆盖.

引理 3.3.10 (Miščenko 引理[1962])如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族, 那么 X 的每一子集仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的有限极小覆盖.

证明 设 A 是空间 X 的子集且 $\{\mathcal{P}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖全体. 若引理不成立, 则存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得集族 $\Phi=\{\mathcal{P}_\alpha:\ \alpha\in\Lambda,\ |\mathcal{P}_\alpha|=n\}$ 是不可数的. 对于每一 $P\in\mathcal{P}$, 令 $\Phi(P)=\{\mathcal{P}_\alpha\in\Phi\ :P\in\mathcal{P}_\alpha\}$. 取定 $x_1\in A$, 则 $\Phi=\bigcup\{\Phi(P): x_1\in P\in\mathcal{P}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是点可数的, 于是存在 $P_1\in\mathcal{P}$ 使得 $x_1\in P_1$ 且 $\Phi(P_1)$ 是不可数的. 若 n=1, 则 $|\Phi(P_1)|=1$, 矛盾, 故 n>1. 由于 $\Phi(P_1)$ 的每一元是 A 的极小覆盖, 故存在 $x_2\in A\setminus P_1$. 令 $\Phi(P_1, P)=\{\mathcal{P}_\alpha\in\Phi(P_1):P\in\mathcal{P}_\alpha\}$, 则 $\Phi(P_1)=\bigcup\{\Phi(P_1, P): x_2\in P\in\mathcal{P}\}$. 因此, 存在 $P_2\in\mathcal{P}$ 使得 $x_2\in P_2$, $P_2\neq P_1$ 且 $\Phi(P_1, P_2)$ 是不可数的. 继续上述过程, 可得到点集 $\{x_i\}_{i\le n}$ 及集族 $\{P_i\}_{i\le n}$ 满足: 每一 $x_i\in P_i\in\mathcal{P}$, 当 $i\neq j\le n$ 时 $P_i\neq P_j$ 且 $\Phi(P_1, P_2,\dots, P_n)$ 是不可数的, 但是 $|\Phi(P_1, P_2,\dots, P_n)|=1$, 矛盾. 因此仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖. █

A. Miščenko(A. Мищенко)[1962]利用引理 3.3.10 证明了具有点可数基的紧空间是可度量化空间(推论 3.3.13). 事实上, 可获得较深刻的度量化定理 3.3.12. 为此, 对基的概念做下述推广.

定义 3.3.11 (O'Meara[1971])设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网络(k-network), 若对于 X 的每一紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 U, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $K\subset\bigcup\mathcal{F}\subset U$.

若 k 网络 $\mathcal{P}$ 的每一元是空间 X 的闭集, 则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的闭 k 网络(closed k-network).

若 X 是正则空间, $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网络, 则 $\overline{\mathcal{P}}$ 是 X 的闭 k 网络. 显然, 空间 X 的基是 X 的 k 网络, X 的 k 网络是 X 的网络. 已知具有可数网络的紧空间是可度量化空间(定理 2.3.7). 集族的点可数性是可数性的一般化. 每一空间都具有点可数的网络, 所以并非每一具有点可数网络的紧空间是可度量化空间(例 3.1.4), 但是下述定理表明具有点可数 k 网络的空间在度量化问题中充当了重要的角色.

定理 3.3.12 (Gruenhage, Michael[47], Tanaka[1984])具有点可数 k 网络的紧空间是可度量化空间.

证明 设 X 是具有点可数 k 网络 $\mathcal{P}$ 的紧空间, 则 X 是正则空间. 让 $\mathcal{P}'=\bigcup\{\mathcal{F}\subset\mathcal{P}:\mathcal{F}$ 是 X 的有限的极小覆盖$\}$, $\mathcal{B}=\{(\bigcup\mathcal{F})^\circ:\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{P}'$的有限子集$\}$. 由 Miščenko 引理, $\mathcal{B}$ 是可数的. 往证 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域U, 存在 X 的开集 V 使得 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$, 因为 $\overline{V}$ 是 X 的紧子集且 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网络, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $\overline{V}\subset\bigcup\mathcal{F}\subset U$, 于是存在 $\mathcal{F}$ 的子集 $\mathcal{H}'$使得 $V\subset\bigcup\mathcal{H}'\subset U$ 且 $\mathcal{H}'$是 V 的极小覆盖. 对于每一 $H\in\mathcal{H}'$, 存在 $x_H\in V\setminus\bigcup(\mathcal{H}'\setminus\{H\})$, 于是 $x_H\in H$. 令 $C=\{x_H:H\in\mathcal{H}'\}$, 则 X 的紧子集 $X\setminus V\subset X\setminus C$, 从而又存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{H}''$使得 $X\setminus V\subset\bigcup\mathcal{H}''\subset X\setminus C$. 让 $\mathcal{H}=\mathcal{H}'\cup\mathcal{H}''$, 则 $\mathcal{H}$ 是 X 的有限覆盖, 于是存在 $\mathcal{H}$ 的子集 $\mathcal{G}$ 是 X 的极小覆盖. 如果 $H\in\mathcal{H}'$, 则 H 是 $\mathcal{H}$ 中含有 x_H 的唯一元, 于是 $H\in\mathcal{G}$, 从而 $\mathcal{H}'\subset\mathcal{G}\subset\mathcal{P}'$且 $x\in V\subset(\bigcup\mathcal{H}')^\circ\subset U$, 所以 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 故 X 是具有可数基的正则空间, 由 Urysohn 度量化定理(推论 2.3.4), X 是可度量化空间. ▌

推论 3.3.13 (Miščenko[1962])具有点可数基的紧空间是可度量化空间. ▌

推论 3.3.14 (Filippov[1968])逆紧映射保持点可数基性质.

证明 设 X 是具有点可数基的空间且 $f:X\to Y$ 是逆紧映射. 由引理 2.4.13, f 是可数双商映射. 对于每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$是 X 的具有点可数基的紧子空间, 所以 $f^{-1}(y)$是可度量化的紧子空间, 于是 $f^{-1}(y)$是 X 的可分子空间. 从而 f 是 s 映射. 由定理 3.3.8, Y 具有点可数基. ▌

练习

3.3.1 设 $\mathcal{F}=\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是空间 X 的递减的集列且 $x\in F_n$ $(\forall n\in\mathbb{N})$. 证明: (1) $\mathcal{F}$ 是 x 在 X 中的网络当且仅当若序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in F_n$, 则$\{x_n\}$收敛于 x; (2) 若 $\mathcal{F}$ 是 x 在 X 中的网络, 或者每一 F_n 是无限集, 或者存在 $n\in\mathbb{N}$使得 F_n 是单点集.

3.3.2 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖映射(定义 2.4.8). 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 k 网络, 则 $f(\mathcal{P})$是空间 Y 的 k 网络.

---

[47] G. Gruenhage 是 C. Borges 的学生, 而 C. Borges 是 E. Michael 的学生.

3.3.3 证明: 具有点可数 k 网络的 k 空间是序列空间.

3.3.4 直接用 Miščenko 引理证明: 具有点可数基的紧空间是可度量化空间.

3.3.5 设 A 是空间 X 的子集, X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为 A 的极小 sn 覆盖(minimal sn-covering), 若 $\bigcup\mathcal{F}$ 是 A 中每一点的序列邻域, 但对于每一 $F\in\mathcal{F}$, $\bigcup(\mathcal{F}\setminus\{F\})$不是 A 中某点的序列邻域. 如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数集族, 证明: 空间 X 的每一子集仅有可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的有限的极小 sn 覆盖(燕鹏飞, 林寿[1999a]).

3.3.6 设 X 是正则的 k 空间. 若 X 有点可数集族 $\mathcal{P}$ 满足: 对于每一 $x\in X$ 及 x 在 X 中的邻域 U, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得 $x\in(\bigcup\mathcal{F})^{\circ}$ 且 $\bigcup\mathcal{F}\subset U$, 则 X 具有点可数基(Burke, Michael[1976]).

3.3.7 证明: 具有点可数基的局部紧空间是可度量化空间.

3.3.8 证明: 具有点可数 k 网络的局部紧空间是可度量化空间.