§1.3 逆紧映射与紧化

拓扑学的主要任务是研究拓扑不变量, 所以同胚是一种理想的函数. 不少的拓扑性质能被比同胚弱的函数所保持, 如映射保持紧空间性质(定理 1.1.8). 但映射所具有的一般性使得大部分的拓扑性质不为连续函数所保持. 本节介绍的逆紧映射在映射理论中的作用类似于紧性在拓扑空间论中所起的作用.

先介绍闭映射的等价刻画.

引理 1.3.1 设函数 $f:X\to Y$. 对于 $A\subset X$, $B\subset Y$, 那么 $f^{-1}(B)\subset A$ 当且仅当 $B\subset Y\setminus f(X\setminus A)$.

证明 易验证, $B\cap f(X\setminus A)\neq\varnothing$ 当且仅当 $f^{-1}(B)\cap(X\setminus A)\neq\varnothing$. 于是 $f^{-1}(B)\subset A$, 当且仅当 $f^{-1}(B)\cap(X\setminus A)=\varnothing$, 当且仅当 $B\cap f(X\setminus A)=\varnothing$, 当且仅当 $B\subset Y\setminus f(X\setminus A)$. ∎

定理 1.3.2 设映射 $f:X\to Y$. f 是闭映射当且仅当对于每一 $f^{-1}(y)\subset U$, 其中 U 是 X 的开集, 存在 Y 的开集 V 使得 $y\in V$ 且 $f^{-1}(V)\subset U$.

证明 设 f 是闭映射, 对于每一 $f^{-1}(y)$在 X 中的开邻域 U, 让 $V=Y\setminus f(X\setminus U)$, 由引理 1.3.1, V 是 y 的开邻域且 $f^{-1}(V)\subset U$. 反之, 设 F 是 X 的闭集, 对于每一 $y\in Y\setminus f(F)$, $f^{-1}(y)\subset X\setminus F$, 于是存在 y 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)\subset X\setminus F$, 从而 $V\cap f(F)=\varnothing$, 所以 $f(F)$是 Y 的闭集, 故 f 是闭映射. ∎

积空间到坐标空间的投影映射是开映射, 但是一些特殊的投影映射还是闭映射.

定理 1.3.3 设 X 是紧空间, 则对于任意空间 Y, 投影映射 $p:X\times Y\to Y$ 是闭映射.

证明 对于每一 $y\in Y$ 及 $p^{-1}(y)$在积空间 $X\times Y$ 中的开邻域 U, 由于 $p^{-1}(y)=X\times\{y\}\subset U$, 对于每一 $x\in X$, 分别存在 x, y 在 X, Y 中的开邻域 U_x 和 V_x 使得 $U_x\times V_x\subset U$. 因为 X 是紧空间, X 的开覆盖$\{U_x\}_{x\in X}$存在有限子覆盖$\{U_{x_i}\}_{i\le n}$, 令 $V=\bigcap_{i\le n}V_{x_i}$, 那么 V 是 y 在 Y 中的开邻域且 $X\times V\subset U$, 即 $p^{-1}(V)\subset U$. 由定理 1.3.2, p 是闭映射. ∎

设 X 是一拓扑空间, Y 是单点集构成的空间(离散空间), 则把 X 的所有点映为 Y 中点的映射 f 是闭映射. 这时, X 是任意的拓扑空间, Y 具有很好的性质且 $f^{-1}(Y)=X$. 在映射理论中为了从象空间的性质来研究原象空间的性质时常需要对映射的纤维(即 $f^{-1}(y)$)附加适当的条

件. 如在定理 1.3.3 中每一 $p^{-1}(y)$是 $X\times Y$ 的紧子集.

定义 1.3.4 设映射 $f:X\to Y$. f 称为紧映射(compact mapping), 若每一 $f^{-1}(y)$是 X 的紧子集. f 称为逆紧映射(perfect mapping)[16], 若 f 是闭且紧的映射.

定理1.3.3 中的投影映射是逆紧映射. 1947 年 I. V. Vaĭnšteĭn(И. V. Вайнштейн)首先引进了度量空间上的逆紧映射, 而 N. Bourbaki[17][1951]研究了局部紧空间上的逆紧映射. 逆紧映射能保持或逆保持许多拓扑性质.

定理 1.3.5 逆紧映射保持 T_2 空间性质.

证明 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射且 X 是 T_2 空间. 对于 Y 中不同的两点 y_1和 y_2, 因为 f 是紧映射, $f^{-1}(y_1)$和 $f^{-1}(y_2)$是 X 中不相交的紧子集, 由于 X 是 T_2 空间, 由定理 1.1.4, 存在 X 中不相交的开集 U_1和 U_2 使得 $f^{-1}(y_1)\subset U_1$且 $f^{-1}(y_2)\subset U_2$. 因为 f 是闭映射, 由定理 1.3.2, 分别存在 Y 中点 y_1和 y_2 的开邻域 V_1和 V_2 使得 $f^{-1}(V_1)\subset U_1$且 $f^{-1}(V_2)\subset U_2$, 从而 V_1和 V_2 是 Y 中不相交的开集. 故 Y 是 T_2 空间. ▌

逆紧映射不仅仅保证了象空间中单点集的逆象是原象空间中的紧子集, 而且使象空间中的任意紧子集的逆象均是原象空间的紧子集.

定理 1.3.6 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射. 若 K 是 Y 的紧子集, 则 $f^{-1}(K)$是 X 的紧子集.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开集族且覆盖 $f^{-1}(K)$. 对于每一 $y\in K$, $f^{-1}(y)$是 X 的紧子集且 $\mathscr{U}$ 覆盖 $f^{-1}(y)$, 于是存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}_y$ 覆盖 $f^{-1}(y)$. 由定理 1.3.2, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V_y 使得 $f^{-1}(V_y)\subset\bigcup\mathscr{U}_y$. 这时 $\{V_y\}_{y\in K}$ 是紧子空间 K 的开覆盖, 所以存在有限子集 $\{V_{y_i}\}_{i\le n}$ 覆盖 K, 于是 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\{U\in\mathscr{U}_{y_i}\}_{i\le n}$ 覆盖 $f^{-1}(K)$. 所以 $f^{-1}(K)$是 X 的紧子集. ▌

具有上述性质的映射有时称为常态映射(proper mapping).

由于紧空间的重要性质, 1913 年希腊血统的德国数学家 C. Carathéodory(1873-1950)首先

[16] 过去常把 perfect mapping 译为完备映射. 本书按全国自然科学名词审定委员会公布的《数学名词》(科学出版社, 1993)统一译为逆紧映射.

[17] 20 世纪 30 年代起由一群法国年青数学家形成的数学学派, 以出版多卷本著作“Éléments de Mathematique”闻名于世, 奠基者主要有 H. Cartan(1904-), C. Chevalley(1909-1984), J. Delsarte(1903-1968), J. Dieudonné (1906-1992), A. Weil(1906-1998)等.

研究了把平面的开子集嵌入紧空间的问题. 设 X 和 Y 是拓扑空间, 如果 f:X$\to$Y 是函数且 $f_{|X}$ 是同胚, 则称 f 是一个嵌入函数(或同胚嵌入, embedding function)且空间 X 可嵌入空间 Y. 若更设 f(X)是 Y 的闭集, 则称 f 是闭嵌入(closed embedding)且 X 可闭嵌入 Y. 紧空间 Y 称为空间 X 的紧化(compactification), 如果存在嵌入函数 c:X$\to$Y 使得 c(X)是 Y 的稠密子集, 记 cX 为 X 的紧化, 即 cX= $\overline{c(X)}$, 且把 X 视为 cX 的子空间. 显然, 空间 X 存在紧化当且仅当 X 可嵌入紧空间. 单位闭区间$\mathbb{I}$是无理数空间的紧化. 单位圆是实直线$\mathbb{R}$的紧化.

P. Alexandroff[1924b]第一个建立了一般拓扑空间的紧化定理.

定理 1.3.7 设 X 是非空的非紧空间, 则存在 X 的紧化 ωX 使得 $\omega X\setminus X$ 是单点集.

证明 取定 $\Omega\notin X$, 让 $\omega X=X\cup\{\Omega\}$. 集合 ωX 赋予下述拓扑: ωX 的子集 U 是 ωX 的开集当且仅当或者 U 是 X 的开集, 或者 $\omega X\setminus U$ 是 X 的闭紧子集(易验证, 满足上述条件的子集族构成 ωX 的拓扑). 对于空间 ωX 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$, 存在 $U\in\mathscr{U}$ 使得 $\Omega\in U$, 则 $\omega X\setminus U$ 是 X 的紧子集, 于是存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集覆盖 $\omega X\setminus U$, 从而存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集覆盖 ωX. 故 ωX 是紧空间. 定义 $\omega:X\to\omega X$ 使得每一 $\omega(x)=x$, 则 ω 是嵌入且 $\omega(X)$是 ωX 的稠密子集. 从而 ωX 是 X 的紧化. ■

ωX 称为空间 X 的一点紧化(one-point compactification)或 Alexandroff 紧化(Alexandroff compactification). 收敛序列 S_1 是正整数集$\mathbb{N}$的一点紧化. 若空间 X 的紧化 cX 是 T_2 空间, 则称 X 存在 T_2 紧化. 一点紧化未必是 T_2 紧化(见定理 1.6.2). 下面介绍空间存在 T_2 紧化的充要条件. 为此, 先介绍一般的嵌入引理. 设 $F=\{f_s\}_{s\in S}$ 是连续函数族, 其中每一 $f_s:X\to Y_s$. 对角线函数(diagonal function) Δ_F: $X\to\prod_{s\in S}Y_s$ 定义为对于每一 $x\in X$ 和 $s\in S$ 有 $p_s\Delta_F(x)(x)=f_s(x)$. 当 $\prod_{s\in S}Y_s$ 具有积拓扑时, 由于 $p_s\circ\Delta_F=f_s$ 是连续的, 于是 Δ_F 是连续的. 何时 Δ_F 是嵌入函数? 为此目的, 对于空间 X 上的函数族 $F=\{f_s\}_{s\in S}$, 称 F 分离 X 的点(separate points)如果对于 X 中不同的点 x 和 y 存在 $f\in F$ 使得 $f(x)\neq f(y)$; 称 F 分离 X 的点与闭集(separate point from closed set)如果 A 是 X 的闭集且 $x\in X\setminus A$, 则存在 $f\in F$ 使得 $f(x)\notin\overline{f(A)}$.

引理 1.3.8 (对角线引理)设连续函数族 $F=\{f_s\}_{s\in S}$ 分离 T_1 空间 X 的点与闭集, 其中每一 $f_s:X\to Y_s$, 则对角线函数 $\Delta_F:X\to\prod_{s\in S}Y_s$ 是嵌入.

证明 由于 F 分离空间 X 的点与闭集, 易验证Δ_F是连续的单射(练习 1.3.8). 下面证明Δ_F是相对开的, 即若 U 是空间 X 的开集, 要证明$\Delta_F(U)$开于$\Delta_F(X)$. 设$x\in U$, 由于 F 分离点与闭集, 存在 $s\in S$ 使得 $f_s(x)\notin \overline{f_s(X\setminus U)}$. 让 $V=Y_s\setminus \overline{f_s(X\setminus U)}$, $W=p_s^{-1}(V)$, 则$\Delta_F(x)\in W$ 且 $W\bigcap \Delta_F(X)\subset \Delta_F(U)$. 事实上, 由于 $p_s\circ\Delta_F(x)=f_s(x)\in V$, 所以$\Delta_F(x)\in p_s^{-1}(V)=W$. 另一方面, 若对于 $z\in X$ 有$\Delta_F(z)\in W$, 那么 $f_s(z)=p_s\circ\Delta_F(z)\in V$, 于是$z\in f_s^{-1}(V)=X\setminus f_s^{-1}(\overline{f_s(X\setminus U)})\subset U$, 所以$\Delta_F(z)\in\Delta_F(U)$. 从而 $W\bigcap\Delta_F(X)$是$\Delta_F(x)$的邻域, 所以$\Delta_F(U)$开于$\Delta_F(X)$. ∎

空间 X 称为完全正则空间(completely regular space[18]), 若对于 X 中的点 z 及其开邻域 U 存在连续函数 $f: X\to\mathbb{I}$使得 $f(z)=0$, $f(X\setminus U)\subset\{1\}$. 由 Urysohn 引理或 Tietze 扩张定理(引理 1.2.11), T_1的正规空间是完全正则空间.

定理 1.3.9 (Tychonoff 紧扩张定理[1935])空间 X 存在T_2紧化当且仅当 X 是T_1的完全正则空间.

证明 设空间 X 存在T_2紧化, 则存在T_2的紧空间 Y 和嵌入函数$f:X\to Y$ 使得 f(X)是 Y 是稠密子集. 由推论 1.1.5, Y 是正规空间, 于是 Y 是T_1的完全正则空间, 从而 f(X)是T_1的完全正则空间, 故 X 是T_1的完全正则空间.

反之, 设 X 是T_1的完全正则空间. 让$F=\{f_s\}_{s\in S}$是所有从 X 到单位闭区间$\mathbb{I}$的连续函数之集, 因为 X 是完全正则空间, 所以 F 分离 X 中的点与闭集. 由引理 1.3.8, 则对角线函数Δ_F: $X\to\mathbb{I}^S$(Tychonoff 方体)是嵌入. 再由 Tychonoff 积定理, $\mathbb{I}^S$是T_2的紧空间, 所以 X 存在T_2紧化. ∎

若空间 X 存在T_2紧化, 让$\mathscr{C}(X)$是 X 的所有T_2紧化的族. 在$\mathscr{C}(X)$上可定义偏序关系≤如下: $c_2X\le c_1X$ 当且仅当存在连续函数 $f: c_1X\to c_2X$ 使得 $fc_1=c_2$. 在此偏序关系中, 相互同胚的空间认为是相等的.

---

[18] 由 P. Urysohn[1925a]定义.

定理 1.3.10 设 c_1X, c_2X 都是空间 X 的 T_2 紧化. 如果存在连续函数 f: $c_1X \to c_2X$ 使得 $fc_1=c_2$，则 $f(c_1(X))=c_2(X)$且 $f(c_1X \setminus c_1(X))=c_2X \setminus c_2(X)$.

证明 由于 $fc_2=c_1$，所以 $f(c_1(X))=c_2(X)$. 又由于 $f(c_1X)=c_2X$, 所以 $c_2X \setminus c_2(X) \subset f(c_1X \setminus c_1(X))$. 下面证明 $f(c_1X \setminus c_1(X)) \subset c_2X \setminus c_2(X)$, 即 $f(c_1X \setminus c_1(X)) \cap c_2(X)=\varnothing$. 若存在 $z \in c_1X \setminus c_1(X)$使得 $f(z) \in c_2(X)$, 则存在 $x \in X$ 使得 $f(z)=c_2(x)$, 从而 $c_1(x) \neq z$, 于是存在 c_1X 中 z 与 $c_1(x)$的不相交的邻域 U 和 V, 从而 $z \notin \overline{V}$. 令 $Z=c_1(X) \cup \{z\}$, 则 $f(Z)=c_2(X)=f(c_1(X))$, 因为 c_1, c_2 都是嵌入函数, 所以 $f_{|c_1(X)}$ 是同胚, 于是 $f(c_1(X) \setminus V)$是 $c_2(X)$的闭集. 令 $g=f_{|Z}$，则 $g^{-1}f(c_1(X) \setminus V)=c_1(X) \setminus V$ 是 Z 的闭集. 因此 $z \notin \overline{V} \cup cl_Z(c_1(X) \setminus V) \supset cl_Z(c_1(X))=Z$, 矛盾. ∎

引理 1.3.11 设 X 是完全正则的 T_1空间, 则偏序集($\mathscr{C}$(X), ≤)的任一非空子集存在上确界.

证明 对于$\mathscr{C}$(X)的非空子集$\{c_sX\}_{s \in S}$，让 $C=\{c_s\}_{s \in S}$，则 C 分离 X 的点与闭集. 由引理 1.3.8, 对角线函数 $\Delta_C: X \to \prod_{s \in S} c_sX$ 是嵌入. 下面证明 X 的紧化 $\Delta_C X=\overline{\Delta_C(X)} \subset \prod_{s \in S} c_sX$ 是 $\{c_sX\}_{s \in S}$ 的上确界. 对于每一 $s \in S$, 投影映射 $p_s: \prod_{s \in S} c_sX \to c_sX$ 满足 $p_s\Delta_C=c_s$，所以 $c_sX \leq \Delta_C X$. 如果存在 X 的 T_2 紧化 cX 是 $\{c_sX\}_{s \in S}$ 的上界, 那么对于每一 $s \in S$, 存在连续函数 $f_s: cX \to c_sX$ 使得 $f_sc=c_s$. 令 $F=\{f_s\}_{s \in S}$，则对角线函数Δ_F: $cX \to \prod_{s \in S} c_sX$ 满足$\Delta_F c=\Delta_C$，所以$\Delta_C X \leq cX$. 故$\Delta_C X$ 是 $\{c_sX\}_{s \in S}$ 的上确界. ∎

偏序集($\mathscr{C}$(X), ≤)的最大元称为完全正则 T_1空间 X 的 Stone-Čech 紧化(Stone-Čech compactification[19])或最大紧化(maximal compactification), 记为βX. 这紧化是由 M. H. Stone[1937]和 E. Čech[1937]独立提出的, 命名来自 Dieudonné[1949], 记号来自 Čech[1937].

引理 1.3.12 设 X 是 T_1的完全正则空间, Z 是紧空间. 则每一连续函数 $f: X \to Z$ 存在连

[19] Engelking[1989]称为 Čech-Stone compactification.

续的扩张 h: $\beta X\to Z$.

证明 定义 $c:X\to\beta X\times Z$ 使得每一 $c(x)=(\beta(x), f(x))$. 因为$\{\beta\}$分离空间 X 的点与闭集, 由对角线引理, c 是嵌入函数, 于是 $cX=\overline{c(X)}\subset\beta X\times Z$ 是 X 的紧化. 由 βX 的最大性, 存在连续函数 $g:\beta X\to cX$ 使得 $g\beta=c$. 令 $h=p_2 g:\beta X\to Z$, 则 h 连续且 $h\beta=p_2 g\beta=p_2 c=f$, 所以 h 是 f 的连续扩张. ▉

下述结果说明了逆紧映射与紧化的一种关系.

定理 1.3.13 对于 T_1 的完全正则空间 X, Y, 及映射 $f:X\to Y$, 下述条件相互等价:

(1) f 是逆紧映射;

(2) 对于 Y 的每一紧化 αY, f 的扩张 $f_\alpha:\beta X\to\alpha Y$ 满足 $f_\alpha(\beta X\setminus X)\subset\alpha Y\setminus Y$;

(3) f 的扩张 $f_\beta:\beta X\to\beta Y$ 满足 $f_\beta(\beta X\setminus X)\subset\beta Y\setminus Y$;

(4) 存在 Y 的紧化 αY 使得 f 的扩张 $f_\alpha:\beta X\to\alpha Y$ 满足 $f_\alpha(\beta X\setminus X)\subset\alpha Y\setminus Y$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射. 对于空间 Y 的每一紧化 αY 及 f 的扩张 $f_\alpha:\beta X\to\alpha Y$, 则 $X\subset f_\alpha^{-1}(Y)\subset\beta X$. 若 $X\neq f_\alpha^{-1}(Y)$, 则存在 $z\in f_\alpha^{-1}(Y)\setminus X$, 令 $Z=X\cup\{z\}$, 于是 z 不属于紧集 $f^{-1}(f_\alpha(z))$, 从而存在子空间 Z 的不相交开集 U, V 使得 $z\in U$ 且 $f^{-1}(f_\alpha(z))\subset V$. 让 $g=f_{\alpha|Z}$, 由于 $f(X\setminus V)$是 Y 的闭集, 所以 $g^{-1}(f(X\setminus V))$是 Z 的闭集, 于是 $\overline{X\setminus V}$(关于 Z 的闭包)$\subset g^{-1}(f(X\setminus V))=f^{-1}f(X\setminus V)\subset X$. 因为 $z\notin\overline{V}$, 所以 X 是 Z 的闭集, 矛盾. 因此 $X=f_\alpha^{-1}(Y)$, 故 $f_\alpha(\beta X\setminus X)\subset\alpha Y\setminus Y$.

(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4)是显然的. (4)$\Rightarrow$(1). 设存在 Y 的紧化 αY 使得 f 的扩张 $f_\alpha:\beta X\to\alpha Y$ 满足 $f_\alpha(\beta X\setminus X)\subset\alpha Y\setminus Y$, 易验证 $f=(f_\alpha)_Y:f_\alpha^{-1}(Y)\to Y$ 是逆紧映射(练习 1.3.1). ▉

练习

1.3.1 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 那么对于 Y 的非空子集 B, $f_B:f^{-1}(B)\to B$ 是闭映射.

1.3.2 若 A 是空间 X 的非空闭集, 则商映射 $q:X\to X/A$ 是闭映射.

1.3.3 闭映射保持(T_1)正规性.

1.3.4 逆紧映射保持正则性.

1.3.5 证明: 逆紧映射保持局部有限集族, 即设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射, 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的局部有限集族, 则 $f(\mathcal{P})$ 是空间 Y 的局部有限集族.

1.3.6 设函数 $f:X\to Y$. 若 $A\subset X$, 则 $f(X\setminus A)=Y\setminus\{y\in Y : f^{-1}(y)\subset A\}$.

1.3.7 证明: 空间 X 的任两个一点紧化是同胚的.

1.3.8 证明: 引理 1.3.8 中的对角线函数是单射.

§1.4 仿紧空间

本节介绍紧空间的重要推广——仿紧空间. 紧性到仿紧性的推广从两方面入手, 一是“子覆盖”, 二是“有限集族”.

定义 1.4.1 设 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是空间 X 的覆盖, 称 $\mathcal{U}$ 加细 $\mathcal{V}$ 或 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的加细(refinement), 若对于每一 $U\in\mathcal{U}$ 存在 $V\in\mathcal{V}$ 使得 $U\subset V$. 若 $\mathcal{U}$ 加细 $\mathcal{V}$ 且 $\mathcal{U}$ 的每一元是 X 的开(闭)子集, 则称 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的开(闭)加细.

在空间 X 中, 若 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{V}$ 的子覆盖, 则 $\mathcal{U}$ 加细 $\mathcal{V}$. 若 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的覆盖, 则$\{\{x\} : x\in X\}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细.

利用加细和局部有限集族(定义 1.2.3)的概念, J. Dieudonné[1944]引入了仿紧空间.

定义 1.4.2 空间 X 称为仿紧空间(paracompact space), 若 X 的每一开覆盖有局部有限的开加细.

显然, 紧空间是仿紧空间, 离散空间是仿紧空间. 下面介绍仿紧空间的简单刻画和初步性质. 为此, 引入 E. Michael[1957]定义的一个重要集族性质.

定义 1.4.3 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为闭包保持族(closure-preserving family), 若对于每一 $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}$, 有 $\overline{\bigcup\mathcal{F}}=\bigcup\overline{\mathcal{F}}$.

若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的闭包保持集族, 则 $\bigcup\overline{\mathcal{P}}$ 是 X 的闭集.

引理 1.4.4 局部有限集族是闭包保持集族.

证明 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的局部有限集族. 由于 $\mathcal{P}$ 的子集仍是 X 的局部有限集族, 所以只须证明 $\overline{\bigcup\mathcal{P}}=\bigcup\overline{\mathcal{P}}$. 显然有 $\bigcup\overline{\mathcal{P}}\subset\overline{\bigcup\mathcal{P}}$ 成立. 设 $x\in\overline{\bigcup\mathcal{P}}$, 由 $\mathcal{P}$ 的局部有限性, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与 $\mathcal{P}$ 中有限个元相交, 于是存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 使得当 $P\in\mathcal{P}\setminus\mathcal{F}$ 时有 $U\cap P=\varnothing$, 从而 $U\cap(\bigcup(\mathcal{P}\setminus\mathcal{F}))=\varnothing$, 于是 $x\notin\overline{\bigcup(\mathcal{P}\setminus\mathcal{F})}$. 因为

$\overline{\bigcup\mathcal{P}} = \overline{\bigcup\mathcal{F}} \cup \overline{\bigcup(\mathcal{P}\setminus\mathcal{F})}$，所以 $x\in\overline{\bigcup\mathcal{F}}$，故存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $x\in\overline{F}$，因此 $\overline{\bigcup\mathcal{P}}\subset\bigcup\overline{\mathcal{P}}$，因而 $\overline{\bigcup\mathcal{P}}=\bigcup\overline{\mathcal{P}}$. ▮

对于实数空间$\mathbb{R}$, $\{\{0, 1/n\} : n\in\mathbb{N}\}$是$\mathbb{R}$的闭包保持集族，但它不是$\mathbb{R}$的局部有限集族. 若空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 是 X 的可数个局部有限族的并，则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ 局部有限族(σ-locally finite family). X 的可数集族是 X 的 σ 局部有限集族.

定理 1.4.5 (Michael[1953])对于正则空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖有 σ 局部有限的开加细;

(3) X 的每一开覆盖有局部有限的加细;

(4) X 的每一开覆盖有局部有限的闭加细.

证明 (1)$\Rightarrow$(2)是显然的.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的开覆盖，则 $\mathcal{U}$ 有 σ 局部有限的开加细 $\mathcal{V}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{V}_n$，其中每一 $\mathcal{V}_n$ 是 X 的局部有限集族. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$，令 $V_n=\bigcup\mathcal{V}_n$，再令 $\mathcal{W}_1=\mathcal{V}_1$，$\mathcal{W}_{n+1}=\{V\setminus\bigcup_{i\le n}V_i : V\in\mathcal{V}_{n+1}\}$, $\mathcal{W}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{W}_n$. 显然, $\mathcal{W}$ 是 X 的覆盖且加细 $\mathcal{U}$. 下面证明 $\mathcal{W}$ 是局部有限的. 对于每一 $x\in X$，存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $x\in V_n$. 对于每一 $i\le n$，由于 $\mathcal{V}_i$ 是 X 的局部有限集族，存在 x 在 X 中的邻域 W_i 使得 W_i 仅与 $\mathcal{V}_i$ 中有限个元相交. 令 $G=V_n\cap(\bigcap_{i\le n}W_i)$，则 x 的邻域 G 仅与 $\mathcal{W}$ 中有限个元相交. 故 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限加细.

(3)$\Rightarrow$(4). 设 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 对于每一 $x\in X$，存在 $U_x\in\mathcal{U}$ 使得 $x\in U_x$. 由正则性，存在 x 的开邻域 V_x 使得 $x\in V_x\subset\overline{V}_x\subset U_x$. 则 X 的开覆盖$\{V_x\}_{x\in X}$ 有局部有限的加细$\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，于是$\{\overline{W}_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 $\mathcal{U}$ 的局部有限闭加细.

(4)$\Rightarrow$(1). 设 $\mathcal{U}$ 是空间 X 的开覆盖. $\mathcal{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{U}$ 的局部有限的闭加细. 对于每一 $x\in X$，选取 x 的开邻域 V_x 仅与 $\mathcal{F}$ 中有限个元相交，于是 X 的开覆盖$\{V_x\}_{x\in X}$ 也有局部有限的闭加细 $\mathcal{H}$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$，让 $W_\alpha=X\setminus\bigcup\{H\in\mathcal{H} : H\cap F_\alpha=\varnothing\}$. 显然, $F_\alpha\subset W_\alpha$，由引理 1.4.4, W_α 是 X 的开子集，且对于每一 $H\in\mathcal{H}$ 有(*): $H\cap W_\alpha\ne\varnothing$ 当且仅当 $H\cap F_\alpha\ne\varnothing$.

取 $U_\alpha \in \mathscr{U}$ 使得 $F_\alpha \subset U_\alpha$ 且设 $G_\alpha = W_\alpha \cap U_\alpha$，则$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 由于每一 $x\in X$ 有邻域O 仅与 $\mathscr{H}$ 的有限个元 $H_i (i\le n)$相交, 于是 $O\subset \bigcup_{i\le n} H_i$，而每一$H_i$ 仅与有限个 F_α 相交, 由(*), H_i 仅与有限个W_α 相交, 从而O仅与有限个 G_α 相交, 故$\{G_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是局部有限的. 因而 $\mathscr{U}$ 有局部有限的开加细, 故 X 是仿紧空间. ▌

空间 X 称为 Lindelöf[20]空间(Lindelöf space), 若 X 的每一开覆盖有可数子覆盖. 显然, 紧空间是 Lindelöf 空间.

推论 1.4.6 正则的 Lindelöf 空间是仿紧空间. ▌

由于实数空间ℝ是正则的 Lindelöf 空间, 所以ℝ是仿紧空间.

设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的子集族. 对于 $A\subset X$, 记 $\mathscr{F}_{|A} = \{F\cap A : F\in \mathscr{F}\}$, 称为 $\mathscr{F}$ 在 A 的限制.

定理 1.4.7 仿紧空间的闭子集是仿紧空间.

证明 设 F 是仿紧空间 X 的闭子集. 让 $\mathscr{V}$ 是子空间 F 的开覆盖. 记 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 存在 X 的开集 U_α 使得 $V_\alpha = U_\alpha \cap F$. 置 $\mathscr{U}=\{X\setminus F\}\cup\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$，则 $\mathscr{U}$ 是仿紧空间 X 的开覆盖, 于是 $\mathscr{U}$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{W}$, 从而在 F 中 $\mathscr{W}_{|F}$ 是 $\mathscr{V}$ 的局部有限开加细, 所以 F 是仿紧空间. ▌

定义 1.4.8 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是互不相交的空间族. 在集 $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 上定义如下拓扑: X 的子集 O 是 X 的开集当且仅当对于每一$\alpha\in\Lambda$, $O\cap X_\alpha$ 是 X_α 的开集. 集 X 赋予上述拓扑称为空间族$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的拓扑和(topological sum), 记为$\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$.

易验证, 空间$\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$的子集 A 是闭集当且仅当对于每一$\alpha\in\Lambda$, $A\cap X_\alpha$ 是 X_α 的闭集. 于是, 每一X_α 是$\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 的既开且闭的子集(open-and-closed subset, 简称开闭子集).

定理 1.4.9 仿紧空间族的拓扑和是仿紧空间.

证明 设$\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是互不相交的仿紧空间族. 让 $\mathscr{U}$ 是拓扑和$\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 的开覆盖. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, $\mathscr{U}_{|X_\alpha}$ 是仿紧子空间 X_α 的开覆盖, 于是存在 X_α 的局部有限的开覆盖 $\mathscr{V}_\alpha$ 加细 $\mathscr{U}_{|X_\alpha}$. 令 $\mathscr{V}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{V}_\alpha$，则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细, 所以$\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 是仿紧空间. ▌

---

[20] 芬兰数学家 E. Lindelöf(1870-1946), 芬兰数学家 L. Ahlfors(1907-1996)是他的学生.

定理 1.4.10 T_2 的仿紧空间是正规空间.

证明 先证明仿紧空间 X 满足(*): 若 A 和 B 是 X 的不相交的闭集, 如果对于每一 $x\in A$, 存在 X 的分别包含{x}和 B 的不相交的开集 U_x 和 V_x, 则存在 X 的分别包含 A 和 B 的不相交的开集 U 和 V. 事实上, $\{U_x\}_{x\in A}\cup\{X\setminus A\}$是仿紧空间 X 的开覆盖, 于是存在局部有限的开加细$\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 置$\Gamma=\{\alpha\in\Lambda$: 存在 $x\in A$ 使得 $W_\alpha\subset U_x\}$, 则$A\subset\bigcup_{\alpha\in\Gamma}W_\alpha$ 且对于每一$\alpha\in\Gamma$有 $B\cap\overline{W}_\alpha=\varnothing$. 由引理 1.4.4, $\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\overline{W}_\alpha$ 是 X 的闭集. 让 $U=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}W_\alpha$, $V=X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\overline{W}_\alpha$, 则 U 和 V 是 X 的分别包含 A 和 B 的不相交的开集.

现在, 设 X 是 T_2 的仿紧空间, 由 T_2 性及(*)知 X 是正则空间, 再由正则性及(*)知 X 是正规空间. ▮

定理 1.4.10 中的 T_2 条件是重要的. 有限补空间(例 1.1.7)是非 T_2 的 T_1 仿紧空间. 为了进一步的需要, 下面再构造另一非 T_2 的 T_1 仿紧空间.

例 1.4.11 T_1 仿紧空间(林寿[1988a]).

取 $X=(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})\setminus\{(0,0)\}$. 对于每一 $n, m, k\in\mathbb{N}$, 置 $V(n,m)=\{(n,k) : k\geq m\}$. 在 X 上导入如下拓扑: $\mathbb{N}^2$ 中的点(n, m)是 X 的孤立点; 点(n, 0)在 X 中的邻域基元形如 $V_1(n,m)=\{(n,0)\}\cup V(n,m)$, $m\in\mathbb{N}$; 点(0, n)在 X 中的邻域基元形如 $V_2(n,m)=\{(0,n)\}\cup V(n,m)$, $m\geq n$. 易验证, X 是 T_1 空间. 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由于$(n,0),(0,n)\in X$, 存在 $m_n, k_n\in\mathbb{N}$和 $U_{1n}, U_{2n}\in\mathscr{U}$ 使得 $V_1(n,m_n)\subset U_{1n}$, $V_2(n,k_n)\subset U_{2n}$ 且 $k_n\geq n$. 让 $C=X\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(V_1(n,m_n)\cup V_2(n,k_n))$. 置 $\mathscr{V}=\{V_1(n,m_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{V_2(n,k_n)\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{\{x\}\}_{x\in C}$. 则 $\mathscr{V}$ 中每一形如 $V_1(n,m_n)$的元仅与 $\mathscr{V}$中一个形如 $V_2(n,k_n)$的元相交, $\mathscr{V}$ 中每一形如 $V_2(n,k_n)$的元仅与 $\mathscr{V}$中一个形如 $V_1(n,m_n)$的元相交, 所以 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细. 故 X 是仿紧空间.

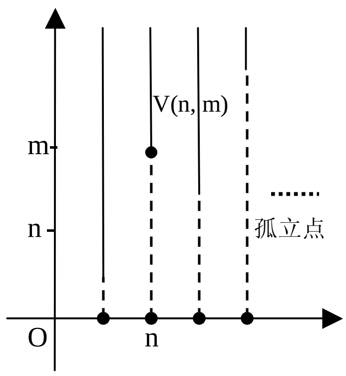

图 T_1 仿紧空间

对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 由于点(n, 0)和(0, n)在 X 中的任意邻域都

相交, 所以 X 不是 T_2 空间. ▌

定理 1.4.12　空间 X 是紧空间当且仅当 X 是可数紧的仿紧空间.

证明　显然, 紧空间是可数紧的仿紧空间. 设空间 X 是可数紧的仿紧空间, 若 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 则存在 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细 $\mathscr{V}$. 由定理 1.2.4, $\mathscr{V}$ 是有限的. 故 $\mathscr{U}$ 有有限子覆盖, 所以 X 是紧空间. ▌

定理 1.4.13　设 $f:X\to Y$ 是逆紧映射. 若 Y 是仿紧空间, 则 X 也是仿紧空间.

证明　设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 对于每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集, 存在 $\mathscr{U}$ 的有限子集 $\mathscr{U}_y$ 覆盖 $f^{-1}(y)$. 因为 f 是闭映射, 由定理 1.3.2, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V_y 使得 $f^{-1}(V_y)\subset\bigcup\mathscr{U}_y$. 这时 $\{V_y\}_{y\in Y}$ 是仿紧空间 Y 的开覆盖, 所以存在局部有限的开加细 $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 这时 $\{f^{-1}(W_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的局部有限的开覆盖. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 存在 $y_\alpha\in Y$ 使得 $W_\alpha\subset V_{y_\alpha}$, 于是 $f^{-1}(W_\alpha)\subset\bigcup\mathscr{U}_{y_\alpha}$, 从而 $\{f^{-1}(W_\alpha)\bigcap U:\ \alpha\in\Lambda, U\in\mathscr{U}_{y_\alpha}\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的开加细. 所以 X 是仿紧空间. ▌

本节的最后给出 1953 年 Michael 证明的关于仿紧空间的单位分解定理(unit partition theorem), 它不仅在拓扑学, 且在分析与微分几何学中有很大的作用.

定义 1.4.14　从空间 X 到单位闭区间$\mathbb{I}$的连续函数族 $\Phi=\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 称为 X 的单位分解(partition of unity), 如果对于每一 $x\in X$ 有 $\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi_\alpha(x)=1$. 单位分解 Φ 称为局部有限的, 如果 $\{\phi_\alpha^{-1}((0,\ 1])\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的局部有限覆盖. 单位分解 Φ 称为从属于 X 的覆盖 $\mathscr{U}$, 如果 $\{\phi_\alpha^{-1}((0, 1])\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细.

设 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 是空间 X 的覆盖, 称 $\mathscr{U}$ 精确加细(precise refinement)$\mathscr{V}$, 若 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 且每一 $U_\alpha\subset V_\alpha$. 精确加细有时也称为一一加细.

定理 1.4.15　(单位分解定理, Michael[1953])对于 T_2 空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 是仿紧空间;

(2) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部有限的单位分解从属于 $\mathscr{U}$;

(3) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有单位分解从属于 $\mathscr{U}$.

证明　(1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是 T_2 的仿紧空间并且 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖. 由 X 的仿紧性, 不妨设

$\mathscr{U}$是局部有限的，记 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

(15.1) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 具有局部有限的精确闭加细$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

由正则性，存在 X 的开覆盖 $\mathscr{V}$ 使得 $\overline{\mathscr{V}}$ 加细 $\mathscr{U}$. 再由 X 的仿紧性, $\mathscr{V}$ 具有局部有限的开加细 $\mathscr{W}$, 则 $\overline{\mathscr{W}}$ 是 $\mathscr{U}$ 的局部有限的闭加细(练习 1.2.3). 记 $\mathscr{W}=\{W_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$. 对于每一 $\beta\in\Gamma$ 存在 $\alpha(\beta)\in\Lambda$ 使得 $W_\beta\subset U_{\alpha(\beta)}$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$ 让 $F_\alpha=\bigcup\{\overline{W_\beta}:\ \beta\in\Gamma,\ \alpha(\beta)=\alpha\}$(可能某些 $F_\alpha=\varnothing$), 那么$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是$\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$的局部有限的精确闭加细.

对于每一 $\alpha\in\Lambda$，由 Urysohn 引理(或 Tietze 扩张定理 1.2.11), 存在连续函数 $f_\alpha:X\to\mathbb{I}$ 使得 $f_\alpha(F_\alpha)\subset\{1\}$ 且 $f_\alpha(X\setminus U_\alpha)\subset\{0\}$. 置 $f(x)=\sum_{\alpha\in\Lambda}f_\alpha(x)$. 由于 $\mathscr{U}$ 的局部有限性及 f_α 的定义知 $f:X\to\mathbb{R}$是连续函数(注意到，若 X 的子集 $V\cap U_\alpha=\varnothing$，则 $f_{\alpha}|_V\equiv0$). 由于$\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$是 X 的覆盖，所以对于每一 $x\in X$ 有 $f(x)\geq1$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$，令 $\phi_\alpha=f_\alpha/f$，则 $\phi_\alpha:X\to\mathbb{I}$连续且 $\phi_\alpha^{-1}((0,1])\subset U_\alpha$. 从而 $\Phi=\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的从属于 $\mathscr{U}$ 的局部有限的单位分解.

(2)$\Rightarrow$(3)是显然的，下面证明(3)$\Rightarrow$(1). 设 T_1 空间 X 的每一开覆盖具有从属于它的单位分解.

(15.2) X 是完全正则空间.

对于 X 的闭集 F 及 X 中不属于 F 的点 z，则 X 的开覆盖$\{X\setminus F,\ X\setminus\{z\}\}$具有单位分解 $\Phi=\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 从属于它. 取定 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $\phi_\alpha(z)=r>0$，则 $\phi_\alpha^{-1}((0,\ 1])\subset X\setminus F$ 且 $\phi_\alpha(F)\subset\{0\}$. 置 $f(x)=1-\min\{1,\ \phi_\alpha(x)/r\}$，则 $f:X\to\mathbb{I}$连续且 $f(z)=0$, $f(F)\subset\{1\}$. 故 X 是完全正则空间.

(15.3) X 的每一开覆盖有 σ 局部有限的开加细.

设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖，则存在 X 的单位分解 $\Phi=\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 从属于 $\mathscr{U}$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, $i\in\mathbb{N}$，置 $V_{\alpha,i}=\phi_\alpha^{-1}((1/(i+1),\ 1])$，则 $V_{\alpha,i}$ 是 X 的开集且 $\phi_\alpha^{-1}((0,\ 1])=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}V_{\alpha,i}$. 对于每一 $i\in\mathbb{N}$，令 $\mathscr{V}_i=\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in\Lambda}$，则 $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{V}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细. 下面证明每一 $\mathscr{V}_i$ 是局部有限的. 设 $z\in X$，则 $\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi_\alpha(z)=1$，存在 Λ 的有限子集 Λ' 使得 $\sum_{\alpha\in\Lambda'}\phi_\alpha(z)>1-1/(i+1)$. 令 $f=\sum_{\alpha\in\Lambda'}\phi_\alpha$，则 f 连续. 再令 $U=f^{-1}((1-1/(i+1),\ 1])$，则 U 是 z 的开邻域. 对于每一 $\beta\in\Lambda\setminus\Lambda'$，如果存在

$x\in U\bigcap V_{\beta,i}$，那么 $1=\sum_{\alpha\in\Lambda}\phi_\alpha(x)\ge f(x)+\phi_\beta(x)>1$，矛盾．故 $U\bigcap V_{\beta,i}=\varnothing$，所以 U 仅与 $\mathscr{V}_i$ 中有限个元相交. 因此 $\mathscr{V}_i$ 是局部有限的.

由(15.2), (15.3)及定理 1.4.5, X 是仿紧空间. █

练习

1.4.1 证明: 任一空间 X 的每一可数开覆盖有局部有限的加细.

1.4.2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的闭包保持集族，则 $\overline{\mathscr{P}}$ 也是 X 的闭包保持集族.

1.4.3 设 $\mathscr{P}$ 和 $\mathscr{Q}$ 都是空间 X 的闭包保持集族，则 $\mathscr{P}\bigcup\mathscr{Q}$ 是 X 的闭包保持集族.

1.4.4 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的闭包保持的闭集族, F 是 X 的闭子集，则 $\mathscr{P}_{|F}$ 也是 X 的闭包保持集族. 若 F 是 X 的开集，那么 $\mathscr{P}_{|F}$ 是否是 X 的闭包保持集族?

1.4.5 证明: 闭映射保持闭包保持集族.

1.4.6 仿紧空间与紧空间的积空间是仿紧空间.

1.4.7 设 $f:X\to Y$ 是闭映射且每一 $f^{-1}(y)$是 X 的 Lindelöf 子空间. 证明: (1) 若 L 是 Y 的 Lindelöf 子集，则 $f^{-1}(L)$是 X 的 Lindelöf 子集; (2) 若 X 是正则空间, Y 是仿紧空间，则 X 也是仿紧空间.

1.4.8 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的点有限族(point-finite family)，若 X 的每一点仅属于 $\mathscr{P}$ 中的有限个元. 证明: $\mathscr{P}$ 是 X 的局部有限的闭集族当且仅当 $\mathscr{P}$ 是 X 的点有限且闭包保持的闭集族.