

度量空间与函数空间的拓扑

Topology of Metric Spaces and Function Spaces

林 寿 著

国家自然科学基金资助项目

献给高国士教授 85 岁寿辰

科学出版社 2004 年 5 月第一版

前 言

从 K. Weierstrass 以来, 人们久已十分关心闭区间上的连续函数列以及它们的收敛性. 在泛函分析、微分方程、代数拓扑、微分几何和概率论及数学许多分支的应用中常出现寻求函数集的极限问题, 这是数学中最常见的现象之一. 通过在函数集上定义一些自然的拓扑, 借助一般拓扑的方法, 这类问题可转化为函数空间的拓扑. 拓扑化从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续函数集的思想正是来自函数序列的点态收敛和一致收敛的概念. 早在 1878 年 U. Dini, 1883 年 G. Ascoli, 1889 年 C. Arzelà, 1897 年 J. Hadamard 就开始从事函数空间理论的研究. 1906 年 M. Fréchet 在研究连续函数集的收敛问题时引入了度量空间的概念, 并探讨了上确界度量拓扑. 在一般拓扑学发展早期, 拓扑学家讨论的函数空间拓扑首先是以分析为背景的点态收敛拓扑和一致收敛拓扑. 1945 年 R. Fox 定义了连续实值函数集合上的紧开拓扑, 引导人们关注函数空间的拓扑性质. 1976 年 A. Arhangel'skiĭ 的论文“On some topological spaces that occur in functional analysis”是一般拓扑学对于函数空间系统研究的标志. 1988 年 R. A. McCoy 和 I. Ntantu 的著作“Topological properties of spaces of continuous functions”和 1992 年 A. Arhangel'skiĭ 的著作“Topological function spaces”进一步推动了函数空间理论的研究.

1991 年作者与广西大学刘川教授在四川大学数学研究所访问期间, 与四川大学滕辉教授一同研读了 A. Arhangel'skiĭ, R. A. McCoy 和 I. Ntantu 等关于函数空间的论著, 开始在国内刊物发表论文. 1994 年项目“点集拓扑”(编号 19476010)和“函数空间的拓扑性质”(编号 19501023)获得国家自然科学基金资助强有力地支持了作者从事函数空间的研究. 本书的部分内容还来自国家自然科学基金资助项目“集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用”(编

号 19971048)的部分研究成果.

函数空间讨论的中心问题之一是寻求拓扑性质 P 和 Q 使得空间 X 具有性质 P 当且仅当函数空间 $C(X, \mathbb{R})$ 具有性质 Q . 度量空间是数学研究的主要对象之一, 函数空间理论最基本的内容是它的度量性. 20 世纪 70 年代以来广义度量空间理论和集论拓扑中的基数函数理论取得了巨大成就, 所以函数空间的广义度量性质及基数函数性质是我们探索的重点之一. 本书由二部分共六章组成. 第一部分介绍紧空间、仿紧空间、度量空间及度量空间的连续映象. 第二部分介绍连续函数空间的拓扑结构、基数函数及某些重要的广义度量性质. 由于函数空间具有较丰富的结构, 同时与泛函分析、概率论等分支有密切的联系, 限于作者的水平, 在此只能介绍一些最基本的内容, 包括了作者近年来在度量空间映象及函数空间理论的部分研究成果. 在材料的组织中, 第一部分主要参考了 R. Engelking 的“General Topology”和作者的“广义度量空间与映射”, 第二部分主要参考了 R. A. McCoy 与 I. Ntantu 的“Topological Properties of Spaces of Continuous Functions”和 A. Arhangel'skiĭ 的“General Topology III: Paracompactness, Function spaces, Descriptive theory”. 部分史料还来自 C. E. Aull, R. Lowen 主编的“Handbook of the History of General Topology”和胡作玄, 邓明立的《20 世纪数学思想》. 只要读者了解点集拓扑学的一些初步知识, 如学习了熊金城的《点集拓扑讲义》或蒲保明, 蒋继光和胡淑礼的《拓扑学》, 就可顺利地阅读本书.

近 10 年来围绕 J. van Mill 和 G. M. Reed 主编的“Open Problems in Topology”中的相关问题, 函数空间理论获得了很大的发展. 2001 年 J. van Mill 的力作“The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces”表明函数空间的研究是一般拓扑学中很有活力的研究方向. 本书的出版将使近年来活跃的“度量空间上连续映射及连续函数空间上拓扑性质”的研究方向融为一体, 希望国内有更多的年青数学工作者投身于该方向的研究, 不断提升拓扑学的研究水平, 为继续扩大我国一般拓扑学的国际影响作出更大的贡献. 本书的部分书稿曾在福建师范大学数学系 2000 级研究生及宁德师范高等专科学校的青年教师讨论班中讲授过. 感谢美国电子杂志“Topological Commentary”主编 M. Henriksen 教授提供部分拓扑学家的史料, 感谢福建师范大学对作者聘请为基础数学学科特聘教授提供宽松的工作条件. 本书的出版应特别感谢戴牧民教授、吴利生教授的热情推荐.

谨以本书献给我的导师高国士教授 85 岁寿辰.

作者

2003 年 5 月 23 日于福建师范大学

目 录

第一章 紧空间与仿紧空间

- §1.1 紧空间
- §1.2 可数紧空间
- §1.3 逆紧映射与紧化
- §1.4 仿紧空间
- §1.5 Michael 定理
- §1.6 局部紧空间
- §1.7 Čech 完全空间

第二章 度量空间

- §2.1 度量空间
- §2.2 度量空间是仿紧空间
- §2.3 度量化定理
- §2.4 Hanai-Morita-Stone 定理
- §2.5 度量空间的完全性
- §2.6 零维度量空间的映象

第三章 Ponomarev 方法

- § 3.1 弱第一可数空间
- § 3.2 商映象
- § 3.3 开映象
- § 3.4 紧覆盖映象
- § 3.5 商 s 映象
- § 3.6 闭映象

第四章 一致空间与函数空间

- §4.1 一致空间
- §4.2 拓扑群
- §4.3 集开拓扑
- §4.4 一致收敛拓扑

§4.5 自然映射

§4.6 几个经典定理

第五章 $C_\alpha(\mathbf{X}, \mathbb{R})$ 的基数函数

§5.1 网络权、稠密度与胞腔度

§5.2 伪特征、特征

§5.3 权、弱权

§5.4 Tightness、扇 tightness

§5.5 Fréchet 性质

§5.6 完全性

第六章 C_p 理论初步

§6.1 Monolithic 空间与 stable 空间

§6.2 Hurewicz 空间

§6.3 Baire 空间

参考文献

索引

第一章 紧空间与仿紧空间

拓扑空间 X 称为紧空间, 若 X 的每一开覆盖有有限的子覆盖. 紧空间是拓扑空间理论中极其重要的空间类, 分析学中的许多性质与紧性有关. 但是像人们所熟知的实数空间却不是紧空间, 所以紧性限制了人们进一步探索更广泛的数学对象. 从根本上说, 紧性所反映的“有限子覆盖”是一种“有限”性质. 突破对空间中集族有限性限制的关键是在拓扑空间论的研究中采用局部有限集族. 这导致了 1944 年法国 Bourbaki 学派的领导人之一 J. Dieudonné(1906-1992)引入了仿紧空间的概念. 紧空间和度量空间都是仿紧空间, 而 T_2 的仿紧空间是正规空间. 虽然仿紧空间的出现迟于紧空间和度量空间, 但它的建立立刻引起了拓扑学和分析学工作者的极大兴趣, 拓扑学和分析学中的许多定理或定理的证明得到深化或简化, 而局部有限集族及相关的“闭包保持集族”等概念成为研究一般拓扑学的有效和自然的工具.

仿紧空间的理论是非常丰富的, 为了本书讨论度量空间及函数空间的需要, 本章在叙述紧空间的基本性质之后, 主要介绍 1953 年, 1957 年 E. Michael 关于仿紧性的刻画及相关的逆紧映射、局部紧空间和 Čech 完全空间的部分结果.

本书中如未特别说明, 以 \mathbb{R} 表示实直线, ω , \mathbb{N} , \mathbb{I} , \mathbb{Q} 和 \mathbb{P} 分别表示 \mathbb{R} 的自然数集, 正整数子集, 单位闭区间, 有理数子集和无理数子集. ω 也表示最小的无限序数. 记 $S_1 = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. 对于集合 X , 以 $|X|$ 表示集合 X 的基数. 对于拓扑空间(简称空间) X , $\tau(X)$ (在不引起混淆时记 τ) 表示 X 上的拓扑. 对于空间 X 的子集族 \mathcal{P} , 记 $\bigcup \mathcal{P} = \bigcup \{P : P \in \mathcal{P}\}$ (\mathcal{P} 的并), $\bigcap \mathcal{P} = \bigcap \{P : P \in \mathcal{P}\}$ (\mathcal{P} 的交), $\overline{\mathcal{P}} = \{\overline{P} : P \in \mathcal{P}\}$ (\mathcal{P} 的闭包). 以符号 ■ 表示命题论证结束或命题是不证自明的.

本书的结果都是在 ZFC(Zermelo¹-Fraenkel²-Choice Axiom)系统中讨论, 使用了选择公理的一些等价形式, 如 Tukey 引理(引理 1.1.11), Zermelo 良序定理(引理 1.5.5)和 Zorn 引理(引理 3.3.6). 以 ZF 表示 Zermelo-Fraenkel 公理系统, 个别章节讨论了一些 ZF 的命题及选择公理的

¹ 德国数学家 E. Zermelo(1871-1953), 他是德国数学家 H. A. Schwarz(1843-1921)的学生.

² 德国数学家 A. Fraenkel(1891-1965), 他是德国数学家 K. Hensel(1861-1941)的学生.

作用. 特别提醒读者注意, 为了不同的需要, 本书的部分章节预先假定拓扑空间满足适当的分离性质, 如§2.3 设 T_1 分离性质, 第三章设 T_2 分离性质, 第五、六章设完全正则且 T_1 分离性质.

§1.1 紧空间

设 X 是拓扑空间, A 是 X 的子集, \mathcal{U} 是 X 的子集族. \mathcal{U} 称为 A 的覆盖(covering), 若 $A \subset \bigcup \mathcal{U}$. 若 \mathcal{U} 和 \mathcal{V} 都是 A 的覆盖且 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, 则称 \mathcal{V} 是 \mathcal{U} 的子覆盖(subcovering). 若覆盖的元是 X 的开(闭)子集, 则称这覆盖是开(闭)覆盖. 若覆盖由有限(可数)个元组成, 则称这覆盖是有限(可数)覆盖.

1894 年法国数学家 É. Borel(1871-1956)证明了实数集中闭区间的每一可数的开覆盖具有有限的子覆盖, 1903 年法国数学家 H. Lebesgue(1875-1941)证明了实数集中闭区间的每一开覆盖具有有限的子覆盖. 1923 年苏联数学家 P. S. Alexandroff(П. С. Александров, 1896-1982)和 P. S. Urysohn(П. С. Урысон, 1898-1924)³给出了紧空间的概念.

定义 1.1.1 拓扑空间 X 称为紧空间(compact space), 若 X 的每一开覆盖有有限的子覆盖.

紧空间有许多的等价刻画. 一种直接而简明的方式是借助有限交性质得到的. 集合 X 的子集族 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 称为具有有限交性质(finite intersection property), 若 \mathcal{F} 的每一有限子集之交不空, 即如果 Γ 是 Λ 的有限子集, 则 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha \neq \emptyset$.

定理 1.1.2 拓扑空间 X 是紧空间当且仅当 X 的每一具有有限交性质的闭集族之交不空.

证明 设 X 是紧空间且 $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族. 若 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \emptyset$, 则 $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的开覆盖, 于是存在 Λ 的有限子集 Γ 使得 $\{X \setminus F_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ 是 X 的覆盖, 所以 $X = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} (X \setminus F_\alpha)$, 即 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha = \emptyset$, 从而 \mathcal{F} 不具有有限交性质, 矛盾. 故 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha \neq \emptyset$. 反之, 设空间 X 的每一具有有限交性质的闭集族之交不空且 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的开覆盖, 则 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} (X \setminus U_\alpha) = \emptyset$. 由于每一 $X \setminus U_\alpha$ 是 X 的闭集, 于是存在 Λ 的有限子集 Γ 使得 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} (X$

³ 两人均是苏联数学家、莫斯科数学学派的奠基人之一 N. Luzin(Н. Лузин, 1883-1950)的学生.

$\bigcap U_\alpha = \emptyset$, 即 $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, 所以 \mathcal{U} 有有限子覆盖. 因此, X 是紧空间. ■

推论 1.1.3 紧空间的闭子集是紧的.

证明 设 X 是紧空间, F 是 X 的闭子集. 设 \mathcal{F} 是子空间 F 的具有有限交性质的闭集族, 则 \mathcal{F} 也是 X 的具有有限交性质的闭集族, 由定理 1.1.2, \mathcal{F} 的交不空, 所以 F 是 X 的紧子空间. ■

紧空间的重要性之一反映在它可获得较好的分离性质. 空间 X 称为 T_2 空间(T_2 -space) 或 Hausdorff⁴空间, 若 X 中不同的两点存在不相交的邻域.

定理 1.1.4 设 X 是 T_2 空间. 若 A 和 B 是 X 的不相交的紧子集, 则 A 和 B 在 X 中存在不相交的开邻域.

证明 固定 $x \in A$. 对于每一 $y \in B$, 由于 X 是 T_2 空间, 存在 X 中点 x 和 y 的不相交的开邻域 U_y 和 V_y , 于是 $\{V_y\}_{y \in B}$ 是 X 的紧子集 B 的开覆盖, 所以存在有限子集 $\{V_{y_i}\}_{i \leq n}$ 覆盖 B . 令 $U_x = \bigcap_{i \leq n} U_{y_i}$, $V_x = \bigcup_{i \leq n} V_{y_i}$, 则 U_x 和 V_x 分别是 x 和 B 在 X 中不相交的开邻域. 这时 $\{U_x\}_{x \in A}$ 是 X 的紧子集 A 的开覆盖, 存在有限子集 $\{U_{x_k}\}_{k \leq m}$ 覆盖 A . 令 $U = \bigcup_{k \leq m} U_{x_k}$, $V = \bigcap_{k \leq m} V_{x_k}$, 则 U 和 V 分别是 A 和 B 在 X 中不相交的开邻域. ■

空间 X 称为正规空间(normal space⁵), 若 X 中不相交的闭集存在不相交的邻域.

推论 1.1.5 紧的 T_2 空间是正规空间.

证明 设 X 是紧的 T_2 空间. 若 A 和 B 是 X 中不相交的闭集, 由推论 1.1.3, A 和 B 都是 X 的紧子集, 再由定理 1.1.4, 存在 A 和 B 在 X 中不相交的开邻域. 所以 X 是正规空间. ■

推论 1.1.6 T_2 空间的紧子集是闭集.

证明 设 X 是 T_2 空间且 K 是 X 的紧子集. 对于 X 中每一不属于 K 的点 x , 由定理 1.1.4, 存在 X 中不相交的开集 U 和 V 使得 $K \subset U$ 且 $x \in V$, 于是 $V \cap K = \emptyset$, 所以 K 是 X 的闭集. ■

上述几个结果都是在 T_2 空间中得到的. 例 1.1.7 表明紧的 T_1 空间未必是 T_2 空间. 空间 X 称为 T_1 空间(T_1 -space⁶), 若 x 和 y 是 X 中不同的点, 则分别存在 x 和 y 在 X 中的邻域 U

⁴ 德国数学家 F. Hausdorff(1868-1942), 一般拓扑学的奠基人之一.

⁵ 1923 年由奥地利数学家 H. Tietze(1880-1964)定义.

⁶ 1907 年由匈牙利数学家 F. Riesz(1880-1956)定义.

和 V 使得 $x \notin V$ 且 $y \notin U$. 空间 X 是 T_1 空间等价于 X 的每一单点集是 X 的闭子集. T_2 空间是 T_1 空间.

例 1.1.7 有限补空间(Steen, Seebach[1978]): 紧的 T_1 空间.

设 X 是一无限集. 令 $\tau = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ 是有限集}\}$. 则 τ 是 X 上的拓扑. 拓扑空间 (X, τ) 称为有限补空间(finite complement space), τ 称为 X 上的有限补拓扑(finite complement topology). 设 \mathcal{U} 是空间 X 的开覆盖, 让 U 是 \mathcal{U} 中的非空元, 则 $X \setminus U$ 是有限集, 于是存在 \mathcal{U} 的有限子集 \mathcal{U}' 覆盖 $X \setminus U$, 那么 $\mathcal{U}' \cup \{U\}$ 是 \mathcal{U} 的有限子覆盖. 故 X 是紧空间. 显然, X 的每一单点集是 X 的闭集, 所以 X 是 T_1 空间. 由于 X 中任两个非空开集必定相交, 所以 X 不是 T_2 空间. ■

紧空间的重要性之二在于它具有很好的映射性质. 在叙述紧空间的映射性质之前, 先说明几个有关函数的术语与记号. 本书中的函数(function)与映射(mapping)是不同的概念. **映射指连续的满函数.** 设 Φ 是一函数类, P 是一拓扑性质, 称 Φ 保持 P , 若 $f: X \rightarrow Y$ 是类 Φ 中的满函数, 且空间 X 具有性质 P , 则空间 Y 也具有性质 P . 设函数 $f: X \rightarrow Y$. 若 \mathcal{P} 和 \mathcal{F} 分别是集合 X 和 Y 的子集族, 记 $f(\mathcal{P}) = \{f(P) : P \in \mathcal{P}\}$, $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(F) : F \in \mathcal{F}\}$, 分别称为 \mathcal{P} 在 f 的象和 \mathcal{F} 在 f 的逆象.

定理 1.1.8 映射保持紧性.

证明 设 X 是紧空间且 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的满函数. 让 \mathcal{U} 是空间 Y 的开覆盖, 则 $f^{-1}(\mathcal{U})$ 是空间 X 的开覆盖, 于是 $f^{-1}(\mathcal{U})$ 存在有限子覆盖 \mathcal{V} , 那么 $f(\mathcal{V})$ 是 \mathcal{U} 的有限子覆盖. 故 Y 是紧空间. ■

回忆闭映射和同胚的概念. 设映射 $f: X \rightarrow Y$. f 称为闭映射(closed mapping), 若 F 是 X 的闭集, 则 $f(F)$ 是 Y 的闭集. f 称为同胚(homeomorphism), 若 f 是单(或一对一, injective)映射且 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 是映射. 同胚是闭映射, 映射未必是闭映射(练习 1.1.3). 开映射是与闭映射相对的映射. 映射 $f: X \rightarrow Y$ 称为开映射(open mapping), 若 U 是 X 的开集, 则 $f(U)$ 是 Y 的开集. 为了叙述的简明起见, 称函数 $f: X \rightarrow Y$ 是相对(relatively)闭的(相对开的), 若 F 是 X 的闭集(开集), 则 $f(F)$ 是 $f(X)$ 的闭集(开集).

推论 1.1.9 紧空间到 T_2 空间的映射是闭映射.

证明 设 X 是紧空间, Y 是 T_2 空间且 $f: X \rightarrow Y$ 是连续的满函数. 若 F 是 X 的闭集, 由推论 1.1.3, F 是 X 的紧集, 又由定理 1.1.8, $f(F)$ 是 Y 的紧集, 再由推论 1.1.6, $f(F)$ 是 Y 的闭集. 故 f 是闭映射. ■

推论 1.1.10 紧空间到 T_2 空间上的连续单射是同胚.

证明 设 X 是紧空间, Y 是 T_2 空间且映射 $f: X \rightarrow Y$ 是单射. 由推论 1.1.9, f 是闭映射, 于是 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 是映射. 故 f 是同胚. ■

紧空间的重要性之三是紧空间具有优美的积空间性质, 即 Tychonoff 积定理. 回忆 1930 年苏联数学家 A. Tychonoff⁷ (A. ТИХОНОВ, 1906-1993) 定义的积空间的概念. 设 $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是一族拓扑空间. 让 $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 是笛卡儿积集(或直积集), 每一 $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ 是投影函数(projective function), 即对于 $x = (x_\alpha) \in X$, $p_\alpha(x) = x_\alpha$. 记 $\mathcal{S} = \{p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$. 则 \mathcal{S} 是集合 X 上某拓扑 τ 的子基(subbase), 即 \mathcal{S} 中任意有限个元交的全体构成的集族 \mathcal{B} 是 X 上某拓扑 τ 的基. 则 $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha, \text{且除有限个 } \alpha \text{ 外 } U_\alpha = X_\alpha\}$. \mathcal{S} 称为 X 的基本子基(basic subbase), \mathcal{B} 中的元称为 X 的基本开集(basic open set). 拓扑空间 (X, τ) 称为拓扑空间族 $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 的积空间(或 Tychonoff 积空间, product space), 拓扑 τ 称为积拓扑(或 Tychonoff 拓扑, product topology). 这时每一投影 $p_\alpha: X \rightarrow X_\alpha$ 是开映射. 上述积拓扑简称以投影方式产生的拓扑.

Tychonoff 积定理的证明依赖 E. Zermelo 提出的选择公理(choice axiom 或 axiom of choice, Zermelo[1904]). 下面介绍的 Tukey⁸ 引理是选择公理的一种等价形式. 称集族 \mathcal{A} 是有限特征的(finite character), 如果 $A \in \mathcal{A}$ 当且仅当若 B 是 A 的有限子集则 $B \in \mathcal{A}$.

引理 1.1.11 (Tukey 引理[1940])若 \mathcal{A} 是有限特征的集族, 则 \mathcal{A} 存在极大元, 即存在 $A_0 \in \mathcal{A}$ 满足: 对于每一 $A \in \mathcal{A}$, 如果 $A_0 \subset A$, 那么 $A = A_0$. ■

定理 1.1.12 (Tychonoff 积定理[1935])一族紧空间的积空间是紧空间.

证明 设 $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是紧空间族. 让 $X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha$ 是积空间. 记 $\Phi = \{\mathcal{P}$ 是 X 的子

⁷ 苏联数学家 P. Alexandroff(1896-1982) 的学生.

⁸ 美国数学家 J. W. Tukey(1915-2000). 数学家 C. H. Dowker(加, 1916-1982), R. H. Fox(美, 1913-1973), J. W. Tukey, A. H. Stone(美, 1916-2000) 等都是美国数学家 S. Lefschetz(1884-1972) 的学生.

集族: \mathcal{P} 具有有限交性质}, 则 Φ 是有限特征的. 若 \mathcal{F} 是空间 X 的具有有限交性质的闭集族, 则 $\mathcal{F} \in \Phi$, 且由 Tukey 引理, 存在 Φ 的极大元 $\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}$. 为了证明 $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$, 只须证明 $\bigcap \overline{\mathcal{F}_0} \neq \emptyset$.

由 \mathcal{F}_0 的极大性, 有

(12.1) 若 X 的子集 B 使得对于每一 $A \in \mathcal{F}_0$ 有 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 $B \in \mathcal{F}_0$.

(12.2) 若 $\{A_n\}_{n \leq k} \subset \mathcal{F}_0$, 则 $\bigcap_{n \leq k} A_n \in \mathcal{F}_0$.

因 \mathcal{F}_0 具有有限交性质, 对于每一 $\alpha \in \Lambda$, X_α 的子集族 $\{p_\alpha(A) : A \in \mathcal{F}_0\}$ 具有有限交性质, 于是 X_α 的闭集族 $\{\overline{p_\alpha(A)} : A \in \mathcal{F}_0\}$ 也具有有限交性质, 由定理 1.1.2, 存在 $x_\alpha \in \bigcap \{\overline{p_\alpha(A)} : A \in \mathcal{F}_0\}$. 设 U_α 是 x_α 在空间 X_α 中的任一开邻域, 则对于每一 $A \in \mathcal{F}_0$, $U_\alpha \cap p_\alpha(A) \neq \emptyset$, 于是 $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap A \neq \emptyset$, 由(12.1), $p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{F}_0$. 由(12.2), 对于 Λ 的任何有限子集 Γ 有 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} p_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{F}_0$, 从而 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 与 \mathcal{F}_0 中的每一元相交. 令 $x = (x_\alpha)$, 由于 $\{\bigcap_{\alpha \in \Gamma} p_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \Gamma \text{ 是 } \Lambda \text{ 的有限子集, 且对于 } \alpha \in \Gamma, U_\alpha \text{ 是 } x_\alpha \text{ 在 } X_\alpha \text{ 中的开邻域}\}$ 是点 x 在 X 中的邻域基, 所以 x 的任何邻域与 \mathcal{F}_0 中的每一元相交, 即对于每一 $A \in \mathcal{F}_0$ 有 $x \in \overline{A}$. 故 X 是紧空间. ■

Tychonoff 积定理的证明使用了选择公理, 而美国数学家 J. L. Kelley⁹(1917-1999)[1950] 证明了一般性的 Tychonoff 积定理也蕴含选择公理. 对于空间 X 及非空集合 A , 定义积空间 $X^A = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, 其中每一 $X_\alpha = X (\forall \alpha \in A)$. 若 λ 是非零基数, 定义空间 X 的 λ 次积空间 $X^\lambda = X^A$, 其中集合 A 的基数是 λ . 在同胚意义下, X^λ 是良好定义的. 积空间 \mathbb{I}^A 称为 Tychonoff 方体(Tychonoff cube). Tychonoff 方体是紧空间.

练习

1.1.1 空间 X 称为正则空间(regular space¹⁰), 若 F 是 X 的闭集且 X 中的点 x 不属于 F , 则 x 和 F 在 X 中存在不相交的邻域. 设 X 是正则空间, A 和 B 分别是 X 的不相交的紧集和闭集,

⁹ Kelley 是美国数学家 G T. Whyburn(1904-1969)的学生.

¹⁰ 1921 年由奥地利数学家 L. Vietoris(1891-2002)定义.

则 A 和 B 在 X 存在不相交的开邻域.

1.1.2 设 U 是空间 X 的开集, $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 是 X 的闭集族, 其中至少有一个 F_α 是紧的. 如果 $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha \subset U$, 则存在 Λ 的有限子集 Γ 使得 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha \subset U$.

1.1.3 设 $f(x) = \sin x$. 证明: $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ 是开映射, 但不是闭映射.

1.1.4 利用有限补空间说明: (1) 每一 T_1 空间是紧 T_1 空间在连续单射下的逆象; (2) 紧空间到 T_1 空间上的连续单射未必是闭映射.

1.1.5 证明: n 维欧几里得空间 \mathbb{R}^n 中的子集 K 是紧的当且仅当 K 是 \mathbb{R}^n 中的有界闭集.

1.1.6 设 A_1 和 A_2 分别是空间 X_1 和 X_2 的紧子集. 若 W 是 $A_1 \times A_2$ 在积空间 $X_1 \times X_2$ 中的邻域, 则分别存在 A_1 和 A_2 在 X_1 和 X_2 中的邻域 U_1 和 U_2 使得 $U_1 \times U_2 \subset W$.

1.1.7 设 $\{X_i\}$ 是非空的有限集列. 若对于每一正整数 $n < m$, 存在函数 $p_n^m: X_m \rightarrow X_n$ 满足每一 $p_n^m = p_n^k \circ p_k^m$ ($n < k < m$), 则存在 $(x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ 使得每一 $p_n^m(x_m) = x_n$ (König¹¹引理; Kodama(儿玉之宏), Nagami(永见启应)[1974]).

§1.2 可数紧空间

本节介绍紧性的推广可数紧性, 及在分析学中广泛应用的与序列的聚点及有界函数相关的几种拓扑性质之间的关系.

定义 1.2.1 拓扑空间 X 称为可数紧空间(或列紧空间, countably compact space), 若 X 的每一可数开覆盖具有有限的子覆盖.

显然, 紧空间是可数紧空间. 但是可数紧空间未必是紧空间(例 1.2.7). 利用定理 1.1.2 同样的方法可知, 空间 X 是可数紧空间当且仅当 X 的每一具有有限交性质的可数闭集族的交不空.

紧空间和可数紧空间都是通过覆盖定义的, 历史上对于紧性起源贡献最大的是 1877 年德国数学家 K. Weierstrass(1815-1897) 在柏林大学讲学时提到的数学分析中的 Bolzano¹²-Weierstrass 定理: 有界数列含有收敛的子数列. 可数紧性与序列或集合的聚点密

¹¹ 匈牙利数学家 G. König(1849-1913), 他的儿子 D. König(1884-1944)也是数学家.

¹² 捷克数学家 B. Bolzano(1781-1848).

切相关. 设 $\{x_n\}$ 是空间 X 的序列, X 中的点 x 称为序列 $\{x_n\}$ 的聚点(accumulation point), 若 x 在 X 中的任意邻域含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项; x 称为序列 $\{x_n\}$ 的极限点(limit point)(或序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x), 若 U 是 x 在 X 中的邻域, 则 $X \setminus U$ 仅含有序列 $\{x_n\}$ 的有限项. 设 A 是 X 的子集, X 中的点 x 称为 A 在 X 中的聚点(ω 聚点), 若 x 在 X 中的每一邻域含有 A 的不同与 x 的点(含有 A 的无限个点). 对于 X 的序列 $\{x_n\}$, 应注意区别序列 $\{x_n\}$ 的聚点与集合 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的聚点.

定理 1.2.2 对于空间 X 下述条件相互等价:

- (1) X 是可数紧空间;
- (2) X 的每一序列有聚点;
- (3) X 的每一无限子集有 ω 聚点.

证明 (1) \Rightarrow (2). 设 $\{x_n\}$ 是可数紧空间 X 的序列. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 令 $F_n = \overline{\{x_i : i \geq n\}}$. 则 $\{F_n\}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集列, 于是存在 $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. 若 U 是 x 在 X 中的邻域, 那么对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $i \geq n$ 使得 $x_i \in U$, 所以 U 中含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项, 从而 x 是序列 $\{x_n\}$ 的聚点.

(2) \Rightarrow (3). 设 X 的每一序列有聚点. 若 A 是 X 的无限子集, 选取 A 中互不相同点组成的序列 $\{x_n\}$, 那么序列 $\{x_n\}$ 的聚点也是集 A 的 ω 聚点.

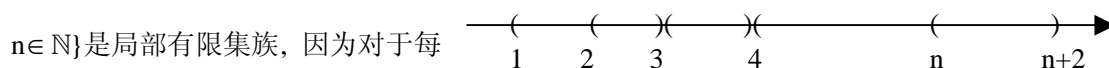
(3) \Rightarrow (1). 设 X 的每一无限子集有 ω 聚点. 若 X 存在可数的开覆盖 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 没有有限的子覆盖, 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 令 $V_n = \bigcup_{i \leq n} U_i$, 则 X 的递增的开覆盖 $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 没有有限的子覆盖, 不妨设每一 $V_{n+1} \setminus V_n \neq \emptyset$, 取定 $x_n \in V_{n+1} \setminus V_n$, 则 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是无限集, 设 x 是 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的 ω 聚点, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in V_m$ 且 V_m 中含有无限项 x_n , 然而当 $n \geq m$ 时 $x_n \notin V_m$, 矛盾. ■

P. Alexandroff[1924a]引入了局部有限集族的概念. 通过局部有限集族可刻画可数紧性.

定义 1.2.3 设 \mathcal{P} 是空间 X 的子集族. \mathcal{P} 称为 X 的局部有限族(locally finite family), 若对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与 \mathcal{P} 中有限个元相交.

显然, 空间 X 的有限集族是局部有限集族, 但是 X 的局部有限集族未必是有限集族. 如

实数空间 \mathbb{R} 的无限集族 $\mathcal{P}=\{(n, n+2) : n \in \mathbb{N}\}$ 是局部有限集族, 因为对于每



一 $x \in X$, 存在 x 在 \mathbb{R} 中的邻域 U 使

图 无限的局部有限集族

得 U 至多与 \mathcal{P} 中的 3 个元相交.

定理 1.2.4 空间 X 是可数紧空间当且仅当 X 的局部有限集族是有限的.

证明 若可数紧空间 X 存在无限的局部有限集族, 则 X 有由非空集组成的局部有限集 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 取定 $x_n \in A_n$. 由定理 1.2.2, 序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点 x . 由于 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是局部有限的, 存在 x 在 X 中的邻域 U 使得 U 仅与有限个 A_n 相交, 从而 U 中仅含有序列 $\{x_n\}$ 的有限项, 矛盾. 反之, 设空间 X 的局部有限集族是有限的, 若 A 是 X 的无限子集, 令 $\mathcal{A}=\{\{x\} : x \in A\}$, 则 \mathcal{A} 不是 X 的局部有限集族, 于是存在 X 的点 z 使得 z 在 X 中的任意邻域必与 \mathcal{A} 中的无限个元相交, 即 z 是集 A 的 ω 聚点. 由定理 1.2.2, X 是可数紧空间. ■

定义 1.2.5 空间 X 称为序列紧空间(或序列式紧空间, sequentially compact space), 若 X 中的每一序列存在收敛的子序列.

显然, 序列紧空间是可数紧空间. 在适当的附加条件下, 可数紧空间可以是序列紧空间. 空间 X 称为第一可数空间(或满足第一可数公理, first countable space), 若 X 的每一点具有可数的邻域基.

定理 1.2.6 第一可数的可数紧空间是序列紧空间.

证明 设 X 是第一可数的可数紧空间. 若 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列, 由定理 1.2.2, 设 x 是序列 $\{x_n\}$ 在 X 中的聚点. 由于 X 是第一可数空间, 存在 x 在 X 中邻域基 $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 使得每一 $V_{k+1} \subset V_k$. 这时每一 V_k 中含有序列 $\{x_n\}$ 中的无限项, 于是存在序列 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使得每一 $x_{n_k} \in V_k$, 则子序列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x (练习 1.2.5), 所以 X 是序列紧空间. ■

下述两个例子说明紧性与序列紧性互不蕴含.

回忆序拓扑(order topology)的定义. 设 $(X, <)$ 是线性序集. 记 $\mathcal{S}=\{\{x \in X : y < x\} : y \in X\} \cup \{\{x \in X : x < z\} : z \in X\}$. X 上的序拓扑是以 \mathcal{S} 作为子基生成的拓扑. 对于 $y, z \in X$, 区间 $(y, z)=\{x \in X : y < x < z\}$ 是序拓扑空间 X 的开集.

例 1.2.7 序数空间 $[0, \omega_1)$ (Steen, Seebach[1978]): 非紧的序列紧空间.

ω_1 是第一个不可数序数, 对于每一 $\beta < \alpha < \omega_1$, $(\beta, \alpha] = (\beta, \alpha + 1)$, 所以在小于 ω_1 的序数所成集 $[0, \omega_1)$ 上, 以 $\{(\beta, \alpha] : \beta < \alpha < \omega_1\} \cup \{0\}$ 为基生成 $[0, \omega_1)$ 的拓扑是序拓扑, $[0, \omega_1)$ 赋予序拓扑称为序数空间(space of ordinal numbers). $[0, \omega_1)$ 是第一可数空间. 由于 $[0, \omega_1)$ 的开覆盖 $\{[0, \alpha] : \alpha < \omega_1\}$ 没有有限子覆盖, 所以 $[0, \omega_1)$ 不是紧空间. 对于 $[0, \omega_1)$ 中的序列 $\{x_n\}$, 由于每一 $x_n < \omega_1$, 存在 $\beta < \omega_1$ 使得所有的 $x_n \leq \beta$. 因为 $[0, \beta]$ 是第一可数的紧空间, 由定理 1.2.6, 序列 $\{x_n\}$ 存在收敛的子序列. 故 $[0, \omega_1)$ 是序列紧空间. ■

例 1.2.8 Stone-Čech 紧化 $\beta\mathbb{N}$ (Čech[1937]): 非序列紧的紧空间.

考虑正整数子空间 \mathbb{N} 的 Stone¹³-Čech¹⁴ 紧化(Stone-Čech compactification)或最大紧化(maximal compactification) $\beta\mathbb{N}$. $\beta\mathbb{N}$ 的构造较复杂, 详细的性质可参考 Engelking¹⁵[1989]的 §3.6. 本书要用到的 $\beta\mathbb{N}$ 的知识仅如下两点:

(8.1) $\beta\mathbb{N}$ 是 T_2 的紧空间, \mathbb{N} 是 $\beta\mathbb{N}$ 的稠密的开子空间;

(8.2) $\beta\mathbb{N}$ 中不存在非平凡的收敛序列, 即 $\beta\mathbb{N}$ 中的收敛序列仅构成有限集.

由(8.2), $\beta\mathbb{N}$ 的序列 $\{n\}$ 不存在收敛的子序列, 所以 $\beta\mathbb{N}$ 不是序列紧空间. ■

定义 1.2.9 空间 X 称为伪紧空间(pseudo-compact space), 若 X 上的每一实值连续函数是有界函数.

定理 1.2.10 可数紧空间是伪紧空间.

证明 设 X 是可数紧空间, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是实值连续函数. 若 f 无界, 则存在 X 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $|f(x_{n+1})| > |f(x_n)| + 1$, 于是序列 $\{f(x_n)\}$ 在 \mathbb{R} 中无聚点, 由于 f 连续, 从而序列 $\{x_n\}$ 在 X 中无聚点, 矛盾. 所以 f 是有界的, 故 X 是伪紧空间. ■

Tietze(有界)扩张定理(Tietze extension theorem, Tietze[1923])表明正规空间的每一闭集上的有界实值连续函数可以扩张为整个空间上的有界实值连续函数. 它与 Urysohn 引理(Urysohn[1925a])是等价的, 即若 A, B 是正规空间 X 的不相交闭集, 则存在连续函数 $f: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $f(A) \subset \{0\}$ 且 $f(B) \subset \{1\}$. 下述引理说明 Tietze(有界)扩张定理也适用于无界的实值连续函数.

¹³ 美国数学家 M. H. Stone(1903-1998), 他是美国数学家 G. D. Birkhoff(1884-1944)的学生.

¹⁴ 捷克数学家 E. Čech(1893-1960).

¹⁵ R. Engelking 是波兰数学家 K. Kuratowski(1896-1980)的学生.

引入函数限制(restriction)的记号. 设 X, Y 是拓扑空间, 函数 $f: X \rightarrow Y$. 对于 $A \subset X$, f 在 A 的限制 $f|_A: A \rightarrow f(A)$ 定义为对于每一 $x \in A$, $f|_A(x) = f(x)$. 对于 $B \subset Y$, f 在 B 的限制 $f_B = f|_{f^{-1}(B)}: f^{-1}(B) \rightarrow B$.

引理 1.2.11 (Tietze 扩张定理) 设 F 是正规空间 X 的闭集. 若 f 是 F 到实数空间 \mathbb{R} 的连续函数, 则存在 f 到 X 上的连续扩张.

证明 复合函数 $\arctan \circ f: F \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数且满足 $|\arctan \circ f| < \pi/2$. 由 Tietze(有界)扩张定理, 存在连续函数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $g|_F = \arctan \circ f$ 且 $|g| \leq \pi/2$. 置 $G = \{x \in X : |g(x)| = \pi/2\}$, 则 F 与 G 是 X 的不相交的闭集. 由 Urysohn 引理, 存在连续函数 $h: X \rightarrow [0, 1]$ 使得 $h(F) \subset \{1\}$ 且 $h(G) \subset \{0\}$. 令 $g' = h \cdot g$, $f' = \tan \circ g'$, 则 $g': X \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $|g'| < \pi/2$, 所以 $f': X \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 且 $f'|_F = f$.

■

空间 Y 称为离散空间(discrete space), 若 Y 的每一子集是 Y 的开集. 这拓扑称为离散拓扑(discrete topology). 空间 X 的子集 F 在 X 中没有聚点当且仅当 F 是 X 的闭离散子空间.

定理 1.2.12 正规的 T_1 、伪紧空间是可数紧空间.

证明 设空间 X 是正规的 T_1 、伪紧空间. 若 X 不是可数紧空间, 由定理 1.2.2, 存在 X 的可数无限子集 $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ 使得 F 在 X 中没有 ω 聚点. 因为 X 是 T_1 空间, 所以 F 在 X 中没有聚点(练习 1.2.1), 于是 F 是 X 的闭离散子空间. 定义 $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ 使得每一 $f(x_n) = n$. 则 f 是连续函数. 由引理 1.2.11, 存在连续函数 $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $g|_F = f$, 则 g 是 X 上的无界实值连续函数, 矛盾. 故 X 是可数紧空间. ■

例 1.2.13 右序拓扑空间(Steen, Seebach[1978]): 正规、伪紧、非可数紧空间.

以实数集 \mathbb{R} 的子集族 $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ 作为基生成 \mathbb{R} 上的拓扑称为实数集 \mathbb{R} 的右序拓扑(right order topology), \mathbb{R} 赋予右序拓扑称为右序拓扑空间(right order topological space), 记为 \mathbb{R}_r . 显然, \mathbb{R}_r 不是 T_1 空间. 由于 \mathbb{R}_r 中不相交的闭集对必有一为空集, 所以 \mathbb{R}_r 是正规空间. 又由于 \mathbb{R}_r 中每一对不空的开集都相交, 所以 \mathbb{R}_r 上的任一实值连续函数是常值函数, 从而 \mathbb{R}_r 是伪紧空间. 因为 \mathbb{R}_r 的可数开覆盖 $\{(-n, +\infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$ 没有有限子覆盖, 所以 \mathbb{R}_r 不是可数紧

空间. ■

练习

1.2.1 证明: T_1 空间的聚点是 ω 聚点. 因而 T_1 空间是可数紧空间当且仅当它的每一无限子集有聚点.

1.2.2 设 $f: X \rightarrow Y$ 是闭映射. 若 X 的子集 A 和 Y 的子集 B 使得 $f|_A: A \rightarrow B$ 是单射, 则 A 在 X 中有聚点当且仅当 B 在 Y 中有聚点.

1.2.3 设 \mathcal{P} 是空间 X 的局部有限集族, 则 $\overline{\mathcal{P}}$ 也是 X 的局部有限集族.

1.2.4 设 \mathcal{P} 和 \mathcal{Q} 都是空间 X 的局部有限集族, 则 $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} = \{P \cap Q : P \in \mathcal{P}, Q \in \mathcal{Q}\}$ 都是 X 的局部有限集族.

1.2.5 证明: 对于空间 X , 下述条件相互等价: (1) X 是第一可数空间; (2) 对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的邻域列 $\{U_n(x)\}$ 使得任取 $x_n \in U_n(x)$, 序列 $\{x_n\}$ 以 x 为聚点; (3) 对于每一 $x \in X$, 存在 x 在 X 中递减的邻域列 $\{V_n(x)\}$ 使得任取 $x_n \in V_n(x)$, 序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x .

1.2.6 设 X 是 T_2 的紧空间. 证明: X 是第一可数空间当且仅当 X 的每一单点集是 G_δ 集 (G_δ -set, 即可数个开集的交集).

1.2.7 若空间 X 的每一局部有限的开覆盖有有限的子覆盖, 则 X 是伪紧空间.

1.2.8 映射是否保持可数紧性, 序列紧性或伪紧性?