3.3 点正则覆盖

由定理 2.4.6, 定理 2.4.11, 定理 3.1.7 和定理 3.2.8 可见, sn 网是描述度量空间的 1 序列覆盖映象的恰当的集族性质, 它的优点在于利用我们熟知的收敛序列和网来刻画空间的拓扑与处理集族问题. 一些与弱基相关的问题可转化为与 sn 网相关的问题来讨论并且降低空间对弱第一可数性的要求, 如 Hoshina[1970]关于具有点可数弱基的空间的映射刻画问题就是在首先获得了具有点可数 sn网空间的映射刻画的情况下得到解决的(定理 2.4.6). 同时, 它也启发林寿[1996c]提出 1 序列覆盖映射的概念. 另一方面, 一些关于基或弱基的结果可以利用 sn 网给出更丰富的信息, 相关的结果可见葛英[2000]; 李进金[2000a]; 李克典[1998]; 林寿[1996c, 1997a]; 林寿, 燕鹏飞[2001a, 2001b]. 先引入几个概念.

定义 3.3.1(Alexandroff[1960]) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的点正则覆盖, 若 $x\in U\in\tau$, 则$\{P\in(\mathcal{P})_x : P\not\subset U\}$是有限的.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的一致覆盖, 若 $x\in X$, 如果 $\mathcal{P}'$是$(\mathcal{P})_x$的可数无限子集, 则 $\mathcal{P}'$是 x 在 X 中的网.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的正则覆盖, 若 $x\in U\in\tau$, 则存在 x 在 X 中的开邻域 V 使得$\{P\in(\mathcal{P})_V : P\not\subset U\}$是有限的.

显然, 空间 X 的正则覆盖是点正则覆盖, X 的点正则覆盖(一致覆盖)的子覆盖仍是 X 的点正则覆盖(一致覆盖).

从 §3.2 知点有限覆盖列的点星网刻画了度量空间的确定商紧映象. Arhangel'skii[1962]证明了具有一致基的空间等价于度量空间的开紧映象. Ikeda, 刘川和 Tanaka[2002]也证明了空间 X 是度量空间的序列覆盖的商紧映象当且仅当 X 具有点正则弱基. 这些结果不仅仅反映了点有限的点星网, 点正则覆盖, 一致覆盖与度量空间的紧映象之间的联系, 而且也从另一角度说明了点星网与点正则覆盖之间的必然联系, 激发了人们发现它们之间进一步关系的兴趣. 如 Ikeda, 刘川和 Tanaka[2002]提出了下述问题.

问题 3.3.2 (1) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs 网的序列空间.

(2) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs*网的序列空间.

本节的主要内容是利用 sn 网刻画度量空间的序列覆盖的紧映象和可分度量空间的紧覆盖的紧映象. 由此可获得问题 3.3.2(1)的肯定回答.

下面几个引理建立了点正则覆盖、一致覆盖、点星网之间的初步联系.

引理 3.3.3 对于空间 X 的覆盖 $\mathcal{P}$, 下述条件相互等价:

(1) $\mathcal{P}$ 是 X 的一致覆盖.

(2) 对于每一 $x\in X$, 若$\langle P_n\rangle$是$(\mathcal{P})_x$ 的无限子集且 U 是 x 在 X 中的序列邻域, 那么存在 $m\in N$ 使得当 $n>m$ 时有 $P_n\subset U$.

(3) $\mathcal{P}$ 是σ X 的点正则覆盖.

(4) $\mathcal{P}$ 是 X 的点正则覆盖.

证明. 只须证(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3), 而(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(1)是显然的.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的一致覆盖, $x\in X$, $\langle P_n\rangle$是$(\mathcal{P})_x$ 的无限子集, 并且 U 是 x 在 X 中的序列邻域. 若不存在 $m\in N$ 使得当 $n>m$ 时有 $P_n\subset U$, 则存在$\langle P_n\rangle$的无限子集$\langle P_{n_k}\rangle$使得每一 $P_{n_k}\not\subset U$. 对于每一 $k\in N$, 取 $x_k\in P_{n_k}\setminus U$, 由于$\langle P_{n_k}\rangle$的任何无限子集都是 x 在 X 中的网, 于是序列$\{x_k\}$收敛于 $x\in U$, 矛盾. 所以(1)$\Rightarrow$(2)成立. 设 $\mathcal{P}$满足(2), 并且 U 是 x 在σ X 中的开邻域, 那么 U 是 X 的序列开集, 于是$\{P\in(\mathcal{P})_x : P\not\subset U\}$是有限集, 从而 $\mathcal{P}$ 是σ X 的点正则覆盖. 因此(2)$\Rightarrow$(3)成立. ▮

引理 3.3.4 空间 X 的点有限加细的点星网的并是 X 的一致覆盖.

证明. 设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的点有限加细的点星网, 让 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$. 对于每一 $x\in X$, 若$\langle P_m\rangle$是$(\mathcal{P})_x$ 的无限子集, 则对于 $k\in N$, 存在 $P_{m_k}\in\mathcal{P}_{n_k}$ 使得 $m_k<m_{k+1}$ 且 $n_k<n_{k+1}$. 那么$\langle P_{m_k}\rangle$是 x 在 X 中的网, 从而$\langle P_m\rangle$是 x 在 X 中的网, 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的一致覆盖. ▮

设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的集族列, 若$\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs 网(或 sn 网, so 网, 弱基), 则称$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的 cs 网(或 sn 网, so 网, 弱基).

引理 3.3.5 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有点有限 cs 覆盖(sn 覆盖, so 覆盖, g 覆盖)的点星网.

(2) X 具有构成 cs 网(sn 网, so 网, 弱基)的点有限加细的点星网.

(3) X 具有点有限加细的 cs 覆盖(sn 覆盖, so 覆盖, g 覆盖)的点星网.

证明. 仅证 cs 覆盖的情形, 其余情形是类似的. 设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的点有限 cs 覆盖的点星网. 对于每一 $n\in N$, 令$\mathcal{F}_n=\Lambda_{i\leq n}\mathcal{P}_i$, 那么$\{\mathcal{F}_n\}$是 X 的点有限加细的 cs 覆盖的点星网, 因而(1)$\Rightarrow$(3)成立. 由于 cs 覆盖的点星网是 cs 网, 所以(3)$\Rightarrow$(2)成立. 设$\{\mathcal{P}_n\}$既是 X 的 cs 网又是 X 的点有限

加细的点星网. 对于每一 $m\in N$, 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 不妨设所有的 $x_n\neq x$. 记$\{P\in(\mathcal{P}_n)_x : n\leq m\}\setminus\{\{x\}\}=\{P_j : j\leq k\}$. 对于每一$j\leq k$, 取$p_j\in P_j\setminus\{x\}$, 则存在$i\in N$和$P\in\mathcal{P}_i$使得$\{x_n\}$是终于 P 的且 $P\subset X\setminus\{p_j : j\leq k\}$, 这时 i>m, 从而存在$Q\in\mathcal{P}_m$使得 $P\subset Q$, 于是$\{x_n\}$是终于 Q 的. 因此, $\mathcal{P}_m$是 X 的 cs 覆盖, 所以(2)$\Rightarrow$(1)成立. ∎

对于空间 X, 记 $S(X)=\{x\in X : \{x\}$是 X 的序列开集$\}$, $\mathcal{S}(X)=\{\{x\} : x\in S(X)\}$. 显然, {x}是 X 的序列开集当且仅当 X 中不存在非平凡的序列收敛于 x.

引理 3.3.6 空间 X 的点正则 cs*网是 X 的点可数加细的 cs*覆盖的点星网.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点正则 cs*网. 由引理 3.3.3, $\mathcal{S}(X)\subset\mathcal{P}$.

(6.1) $\mathcal{P}$是点可数的.

若存在 $x\in X$ 使得$(\mathcal{P})_x$是不可数的, 由于$\mathcal{P}$的点正则性知对于 $y\neq x$, $\{P\in(\mathcal{P})_x : y\in P\}$是有限集, 于是存在$(\mathcal{P})_x$的无限子集$\langle P_n\rangle$, $x_n\in P_n\setminus\{x\}$和 $k\in N$ 使得每一 x_n恰属于$(\mathcal{P})_x$的 k 个元, 即 $ord(x_n, (\mathcal{P})_x)=k$. 由引理 3.3.3, 序列$\{x_n\}$收敛于 x. 再由 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网, 存在$(\mathcal{P})_x$的子集$\langle F_i\rangle$和$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$使得对于每一 $i\in N$ 有$\{x_{n_j} : j\geq i\}\subset F_i\subset X\setminus\{x_{n_j} : j<i\}$, 那么$ord(x_{n_i}, (\mathcal{P})_x)\geq i$, 矛盾, 因而$\mathcal{P}$是点可数的.

置$\mathcal{P}^m=\{H\in\mathcal{P}$: 若 $H\subset P\in\mathcal{P}$, 则 $P=H\}$. $\mathcal{P}'=(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}^m)\cup\mathcal{S}(X)$.

(6.2) 对于每一 $P\in\mathcal{P}$, 存在 $H\in\mathcal{P}^m$ 使得 $P\subset H$.

若不然, 则存在$\mathcal{P}$的无限子集$\langle P_n\rangle$使得$P\subset P_n\subset P_{n+1}$且$P_n\neq P_{n+1}$, 于是存在$x\neq y$ 使得$\{x, y\}\subset P_n$, 这与$\mathcal{P}$的点正则性相矛盾.

(6.3) $\mathcal{P}'$是 X 的点正则 cs*网.

设$x\in U\in\tau$且 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x, 不妨设$x\notin S(X)$, 由于$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网, 存在$\mathcal{P}$中互不相同的元C_1, C_2和 C 使得$x\in C=C_1\cap C_2\subset C_1\cup C_2\subset U$且 C 含有序列$\{x_n\}$的子序列, 于是 $C\in\mathcal{P}'$, 所以$\mathcal{P}'$是 X 的 cs*网, 从而它是 X 的点正则 cs*网.

令$\mathcal{P}_1=\mathcal{P}^m$, $\mathcal{P}_{n+1}=[(\mathcal{P}\setminus\bigcup_{i\leq n}\mathcal{P}_i)\cup\mathcal{S}(X)]^m$, $n\in N$.

(6.4) $\mathcal{P}$是 X 的点可数加细的 cs*覆盖的点星网.

由(6.1)和(6.2), $\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点可数加细的 cs*覆盖, 并且 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$. 对于每一 $x\in X$, 及 $P_n\in(\mathcal{P}_n)_x$, 若 $x\in S(X)$, 则存在 $m\in N$ 使得 $P_m=\{x\}$, 于是 $<P_n>$是 x 在 X 中的网; 若 $x\notin S(X)$, 则 $<P_n>$的各项是两两互不相同的, 由引理 3.3.3 知 $<P_n>$是 x 在 X 中的网. 因此, $\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点星网. ▌

引理 3.3.7 序列扇 S_ω 不具有一致 cs*网.

证明. 记序列扇 S_ω 为 $\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in N}T_n)$, 其中每一 T_n 作为序列收敛于 x_0. 若 $\mathcal{P}$ 是 S_ω 的 cs*网, 对于每一 $n\in N$, 存在 $x_n\in T_n\setminus\{x_0\}$和 $P_n\in\mathcal{P}$ 使得 $\{x_0, x_n\}\subset P_n\subset S_\omega\setminus\{x_i : i<n\}$, 于是 $<P_n>$的各项是两两互不相同的且 $x_0\in P_n\not\subset X\setminus<x_i>$. 然而 $<x_i>$是 X 的闭子集, 所以 $\mathcal{P}$ 不是 S_ω 的一致覆盖. 故 S_ω 不具有一致 cs*网. ▌

本节的第一个主要结果是

定理 3.3.8(林寿, 燕鹏飞[2001b]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的紧映象.

(3) X 具有点正则 cs 网.

(4) X 具有点正则 sn 网.

(5) X 具有一致 cs 网.

(6) X 具有一致 sn 网.

(7) X 具有点有限 cs 覆盖的点星网.

(8) X 具有点有限 sn 覆盖的点星网.

证明. 由定理 3.2.8, 引理 3.3.4, 引理 3.3.5 和引理 3.3.3 知 (1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(7)$\Leftrightarrow$(8)$\Rightarrow$(6)$\Leftrightarrow$(4)$\Rightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(5), 所以只须证(3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(8).

(3)$\Rightarrow$(4). 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点正则 cs 网. 由引理 3.3.3 和引理 3.3.6 知 $\mathcal{S}(X)\subset\mathcal{P}$ 且 $\mathcal{P}$ 是点可数的. 设 σX 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in U\in\tau(\sigma X)$, 不妨设所有的 $x_n\neq x$, 由于 $\mathcal{P}$ 的点可数性, $\{P\in(\mathcal{P})_x : \{x_n\}$是终于 P 的$\}$是可数无限集, 记它为$<F_n>$, 由引理 3.3.3 知存在 $n\in N$ 使得 $F_n\subset U$, 故 $\mathcal{P}$ 是 σX 的 cs 网. 由引理 3.3.7, σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω. 再由推论 2.1.12, 存

在 $\mathcal{P}$ 的有限交的某子族 $\mathcal{P}'$ 是 X 的 sn 网，从而 $\mathcal{P}'$ 是 X 的点正则 sn 网.

(4)$\Rightarrow$(8). 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点正则 sn 网. 由引理 3.3.6, $\mathcal{P}$ 是点可数的. 称 $\mathcal{P}$ 具有性质(F)，若对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $\{H\in\mathcal{P} : P\subset H\}$ 是有限集.

(8.1) $\mathcal{P}$ 有性质(F).

若不然，存在 $\mathcal{P}\setminus\{P\}$ 的无限子集 $\langle P_n\rangle$ 使得每一 $P\subset P_n$. 取 $x\in P$ 使得 P 是 x 的序列邻域，让 $x_n\in P_n\setminus P$, 由引理 3.3.3, 序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 矛盾.

置 $\mathcal{P}^m=\{H\in\mathcal{P}$：若 $H\subset P\in\mathcal{P}$, 则 $P=H\}$, $\mathcal{P}'=(\mathcal{P}\setminus\mathcal{P}^m)\cup\mathcal{S}(X)$.

(8.2) $\mathcal{P}^m$ 是 X 的点有限覆盖.

对于 $P\in\mathcal{P}$, 由性质(F), 存在 $H\in\mathcal{P}^m$ 使得 $P\subset H$, 从而 $\mathcal{P}^m$ 是 X 的覆盖. 对于 $x\in X$, 如果 $(\mathcal{P}^m)_x$ 是无限集，记它为 $\langle H_n\rangle$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 sn 网，存在 x 在 X 中的序列邻域 $P\in\mathcal{P}$. 不妨设 $P\subset H_1$，于是对于每一 $n\in N$, 存在 $x_n\in H_{n+1}\setminus H_1$，那么序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 $\langle x_n\rangle\cap P=\varnothing$，矛盾. 从而 $(\mathcal{P}^m)_x$ 是有限集，故 $\mathcal{P}^m$ 是 X 的点有限覆盖.

(8.3) $\mathcal{P}'$ 是 X 的点正则 sn 网.

设 $x\in U\in\tau$，不妨设 $x\notin S(X)$, 由引理 3.3.3, 存在 x 在 X 中的序列邻域 V, $W\in\mathcal{P}$ 和 $y\in V\setminus\{x\}$ 使得 $W\subset V\setminus\{y\}\subset V\subset U$, 于是 $W\in\mathcal{P}'$, 所以 $\mathcal{P}'$ 是 X 的 sn 网，从而它是 X 的点正则 sn 网.

令 $\mathcal{P}_1=\mathcal{P}^m$, $\mathcal{P}_{n+1}=[(\mathcal{P}\setminus\bigcup_{i\le n}\mathcal{P}_i)\cup\mathcal{S}(X)]^m$, $n\in N$.

(8.4) X 具有点有限 sn 覆盖的点星网.

由(8.1), (8.2)和引理 3.3.6 的(6.4)知, $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$ 且 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点有限加细的点星网. 由引理 3.3.5, X 具有点有限 sn 覆盖的点星网. ▌

由定理 3.3.8, 推论 3.2.9 和引理 1.4.6, 我们得到下述度量空间的序列覆盖的商紧映象的特征.

推论 3.3.9　对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖, 1 序列覆盖的商紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的商紧映象.

(3) X 具有点正则弱基.

(4) X 具有一致弱基.

(5) X 具有点有限 g 覆盖的点星网.

(6) X 是具有点正则 cs 网的序列空间. ∎

若将定理 3.3.8 证明中的"序列邻域"换为"序列开集", 应用类似的方法可获得度量空间的 2 序列覆盖的紧映象的特征.

定理 3.3.10(林寿, 燕鹏飞[2001b]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 2 序列覆盖的紧映象.

(2) X 具有点正则 so 网.

(3) X 具有一致 so 网.

(4) X 具有点有限 so 覆盖的点星网. ∎

由定理 2.4.5, 我们可获得如下具有一致基空间的经典的映射定理.

推论 3.3.11(Arhangel'skii[1962]) 空间 X 是度量空间的开紧映象当且仅当 X 具有一致基. ∎

下面讨论具有点正则 cs*网空间的部分结果. 由定理 3.2.2, 引理 3.3.4 和引理 3.3.3 知, 度量空间的子序列覆盖紧映象具有点正则 cs*网. 我们先继续 §3.1, 讨论度量空间的 s, π 映象的相关结果.

定理 3.3.12 空间 X 是度量空间的伪序列覆盖(序列商, 子序列覆盖)的 s, π 映象当且仅当 X 具有点可数 cs*覆盖的点星网.

证明. 让 f:M$\to$X 是子序列覆盖的 s, π 映射, 其中(M, d)是度量空间. 对于每一 i$\in$N, 设 $\mathcal{B}_i$ 是{B(z, 1/i) : z$\in$M}的局部有限开加细, 让 $\mathcal{P}_i$=f($\mathcal{B}_i$). 由定理 3.1.6 所证, {$\mathcal{P}_i$}是 X 的点可数 cs*覆盖的点星网.

反之, 设{$\mathcal{P}_i$}是空间 X 的点可数 cs*覆盖的点星网. 对于每一 i$\in$N, 记 $\mathcal{P}_i$={P_α : $\alpha\in\Lambda_i$}. 让(f, M, X, $\mathcal{P}_i$)为 Ponomarev 系, 由引理 3.1.5 和定理 3.1.6, f:M$\to$X 是序列商的 π 映射. 对于每一 x$\in$X, 由引理 3.1.5 关于紧映射的论证知 $f^{-1}(x)=\prod_{i\in N}\{\alpha\in\Lambda_i : x\in P_\alpha\}$, 于是 f 是 s 映射. 往证 f 是伪序列覆盖映射.

对于每一 x$\in$X 及 X 中收敛于 x 的序列{x_n}, 记 K=[x_n]. 对于每一 i$\in$N, 由于 $\mathcal{P}_i$ 是 X 的点可数的 cs*覆盖, 由引理 1.3.7 中(7.1)的证明, 存在$(\mathcal{P}_i)_x$ 的有限子集 $\mathcal{F}_i$ 使得{x_n}是终于$\cup\mathcal{F}_i$ 的. 选取 $\mathcal{P}_i$ 的有限子集 $\mathcal{G}_i$ 使得 K$\setminus\cup\mathcal{F}_i\subset\cup\mathcal{G}_i$. 令 $\mathcal{P}_i'=\mathcal{F}_i\cup\mathcal{G}_i$, 则存在 Λ_i 的有限子集 Γ_i 使得 $\mathcal{P}_i'$={P_α : $\alpha\in\Gamma_i$}. 对于每一 $\alpha\in\Gamma_i$, 取

$$K_\alpha=\begin{cases} K\cap P_\alpha, & x\in P_\alpha \\ (K\setminus\cup F_i)\cap P_\alpha, & x\notin P_\alpha \end{cases}.$$

则$\{K_\alpha : \alpha\in\Lambda_i\}$是由 K 的紧子集组成的有限覆盖，于是 $\mathcal{P}_i$’是 K 的 cfp 覆盖. 置 $L=\{(\alpha_i)\in\Pi_{i\in N}\Gamma_i : \bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}\neq\varnothing\}$. 由定理 3.2.2 所证, L 是 M 的紧子集且 f(L)=K. 故 f 是伪序列覆盖映射. ▌

由引理 3.3.6, 引理 1.4.2, 推论 3.1.10 和推论 2.1.7, 我们有

推论 3.3.13(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 设空间 X 具有点正则 cs*网，则

(1) X 是度量空间的伪序列覆盖的 s, π 映象.

(2) 若 X 是序列空间, 则 X 是度量空间的商, s, π 映象.

(3) 若 X 是 Fréchet 空间, 则 X 是具有点可数基的可展空间.

证明. 只须证明(3)成立, 而这又只须证明具有点可数基的半度量空间是可展空间.

设 $\mathcal{U}$ 是半度量空间(X, d)的点可数基. 将 X 的点良序化, 以≤表示其良序. 对于每一 $n\in N$, $x\in X$, 置

$(\mathcal{U})_x=\{U_n(x) : n\in N\}$, $V_n(x)=\mathrm{int}B(x, 1/n)$,

$h(n, x)=U_n(x)\cap V_n(x)$, $p(n, x)=\min\{y\in X : x\in h(n, y)\}$,

$g(n, x)=V_n(x)\cap(\cap\{h(i, p(i, x)) : i\le n\})\cap(\cap\{U_j(p(i, x)) : j\le n, i\le n, x\in U_j(p(i, x))\})$,

$\mathcal{G}_n=\{g(n, x) : x\in X\}$.

则$\{\mathcal{G}_n\}$是 X 的展开, 所以 X 是可展空间. ▌

类似定理 3.1.7 和定理 3.1.6 的证明, 我们有

推论 3.3.14 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的 s, π 映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的 s, π 映象.

(3) X 具有点可数 cs 覆盖的点星网.

(4) X 具有点可数 sn 覆盖的点星网. ▌

推论 3.3.15 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖的 s, π 映象当且仅当 X 具有点可数 so 覆盖的点星网. ▌

引理 3.3.16 Arens 空间 S_2 不具有正则 cs*网.

证明. 记 Arens 空间 $S_2=\{x_0\}\cup\{x_{nm}: n\in N, m\in\omega\}$, 其中序列$\{x_{n0}\}$收敛于 x_0, 并且对于每一 $n\in N$, 序列$\{x_{nm}\}_m$收敛于 x_{n0}. 设 $\mathcal{P}$ 是 S_2 的 cs*网. 由于对于每一 $n\in N$, $\{x_{nm}: m\in\omega\}$ 是 S_2 的开子集, 于是存在 $P_n\in\mathcal{P}$ 和 $m_n\in N$ 使得$\{x_{n0}, x_{nm_n}\}\subset P_n$ 且这些 P_n 是两两互不相同的. 令 $U=S_2\setminus\{x_{nm_n}: n\in N\}$, 那么 U 是 x_0的开邻域. 对于 x_0在 S_2 中的任一开邻域 V, 存在 $k\in N$ 使得当 n>k 时有 $x_{n0}\in V$, 于是 $P_n\cap V\neq\varnothing$ 且 $P_n\not\subset U$. 所以 $\mathcal{P}$ 不是 X 的正则覆盖, 故 S_2 不具有正则 cs*网. █

Sakai, Tamano 和 Yajima[1998]证明了具有正则 k 网的正则的 Fréchet 空间是可度量空间. 它的更一般形式是

定理 3.3.17 具有正则 k 网的正则的 k 空间是可度量空间.

证明. 设 X 是具有正则 k 网的正则的 k 空间. 由于 X 是正则空间, 设 X 具有正则的闭 k 网 $\mathcal{P}$. 于是 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网. 由引理 3.3.6, 引理 3.3.16 和推论 2.1.11, X 是 Fréchet 空间. 再由推论 3.3.13, 我们只须证明 X 是集态正规空间. 对于 $x\in U\in\tau(X)$, 让 $G_1(x, U)=\mathrm{int}(\cup\{P\in\mathcal{P}: x\in P\subset U\})$, 则 $G_1(x, U)$是 x 在 X 中的开邻域. 事实上, 若 $x\notin G_1(x, U)$, 则存在 $U\setminus\cup\{P\in\mathcal{P}: x\in P\subset U\}$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x. 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网, 存在 $P_1\in\mathcal{P}$ 使得 $x\in P_1\subset U$ 且 P_1含有序列$\{x_n\}$的无限项, 这与序列$\{x_n\}$的选取相矛盾. 其次, 令 $\mathcal{P}'=(\mathcal{P})_{X\setminus U}$. 若 $z\in X\setminus\cup\mathcal{P}'$, 那么 $z\in U$, 于是存在 z 在 X 中的开邻域 V 使得 V 仅与 $\mathcal{P}'$中的有限个元相交, 而 $\mathcal{P}'$的元是 X 的闭子集, 从而存在 z 在 X 中的开邻域 W 使得 $W\cap(\cup\mathcal{P}')=\varnothing$, 因此 $\cup\mathcal{P}'$是 X 的闭子集. 让 $G_2(x, U)=X\setminus\cup\{P\in\mathcal{P}': x\notin P\}$, 那么 G_2 也是 x 在 X 中的开邻域. 让 $G(x, U)=G_1(x, U)\cap G_2(x, U)$. 则对应 G: $X\times\tau(X)\to\tau(X)$满足定义 1.2.9(4)的条件(4.1)和(4.2). 对于 X 中不同的点 x, y, 选取 $z\in G_1(x, X\setminus\{y\})$, 那么存在 $P_2\in\mathcal{P}$ 使得$\{x, z\}\subset P_2\subset X\setminus\{y\}$, 因此 $z\in P_2\subset X\setminus G_2(y, X\setminus\{x\})$, 从而 $G(x, X\setminus\{y\})\cap G(y, X\setminus\{x\})=\varnothing$, 所以 G 还满足定义 1.2.9(4)的条件(4.3). 故 X 是单调正规空间, 于是 X 是集态正规空间, 所以 X 是可度量空间. █

例 3.3.18 (1) 局部紧度量空间的紧覆盖, 商紧映象 $\not\Rightarrow$ 度量空间的序列覆盖 π 映象, 度量空间的序列覆盖 s 映象.

如例 1.5.6 中的空间 X. X 是局部紧度量空间的紧覆盖的商有限到一映象. 由于 X 含有例 3.1.13(2)中的非 Cauchy 空间作为闭子空间, 所以 X 不是 Cauchy 空间. 由推论 3.1.11, X 不是度量空间的序列覆盖π 映象. 由于 X 不具有点可数 cs 网, 所以 X 不是度量空间的序列覆盖 s 映象.

(2) 具有正则 cs 网的正则的 k 空间$\not\Rightarrow$序列空间; 如极大紧化βN. █

问题 3.3.19(Tanaka, 周浩旋[1985/86]) (局部紧)度量空间的商紧映象是否具有点 G_δ 性质?

问题 3.3.20 (1) 度量空间的伪序列覆盖的 s, π 映象是否具有点正则 cs*网?

(2) 具有点正则 cs*网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖紧映象?

3.4 序列覆盖映射与 1 序列覆盖映射

从定理 3.1.7, 定理 3.2.8, 定理 3.3.8 和推论 3.3.14 可见 1 序列覆盖映射的独特性质及它与序列覆盖映射的联系. 本节继续探讨 1 序列覆盖映射的性质. 主要内容由两部分组成, 一是讨论怎样的序列覆盖映射是 1 序列覆盖映射, 二是以几个例子说明几类序列覆盖映射之间的不蕴含关系.

本节的第一部分讨论怎样的序列覆盖映射是 1 序列覆盖映射. 这也涉及林寿, 燕鹏飞[2001a]提出的下述问题.

问题 3.4.1 具有可数 cs 网的 Fréchet 空间是否是可分度量空间的序列覆盖的闭映象?

特别地, 序列扇 S_ω 既是可分度量空间的序列覆盖映象, 又是可分度量空间的闭映象, 那么 S_ω 是否是可分度量空间的序列覆盖的闭映象? 定理 3.3.8 暗示我们可以从考虑度量空间的序列覆盖的紧映射是否是 1 序列覆盖映射入手.

定理 3.4.2(林寿, 燕鹏飞[2001a]) 设 f:X$\rightarrow$Y 是序列覆盖的紧映射. 如果 X 是度量空间, 则 f 是 1 序列覆盖映射.

证明. 因为 X 是度量空间, 由定理 1.3.1, 存在 X 的局部有限的开覆盖列{$\mathcal{B}_n$}满足

(2.1) 每一 $\mathcal{B}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{B}_n$.

(2.2) {$\mathcal{B}_n$}是 X 的展开.

对于每一 n$\in$N, 置 $\mathcal{P}_n$=f($\mathcal{B}_n$). 因为 f 是序列覆盖的紧映射, $\mathcal{P}_n$ 是 Y 的点有限 cs 覆盖. 由引理 3.2.1 的(2)$\Rightarrow$(1)知 $\mathcal{P}_n$ 的某子集是 X 的 sn 覆盖. 于是

(2.3) 对于每一 $z\in Y$, 存在 $P_z\in\mathcal{P}_n$ 使得 P_z 是 z 在 Y 中的序列邻域.

对于每一 $y_0\in Y$, 置 $U_n=\{x\in X$: 对于每一 $B\in(\mathcal{B}_n)_x$, f(B)不是 y_0 在 Y 中的序列邻域$\}$. 则

(2.4) 如果 $x\in U_n$, 则$\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x\subset U_{n+1}$.

若不然, 存在点 $p\in\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x\setminus U_{n+1}$, 由 U_{n+1} 的定义, 对于某一 $B\in(\mathcal{B}_{n+1})_p$, f(B)是 y_0 在 Y 中的序列邻域. 取某一 $B_1\in(\mathcal{B}_{n+1})_x$, 则 $p\in B\cap B_1$, 于是由(2.1), 对于某一 $B_2\in\mathcal{B}_n$ 有 $B\cup B_1\subset B_2$, 因此 $B_2\in(\mathcal{B}_n)_x$ 且 $f(B_2)$是 y_0 在 Y 中的序列邻域, 故 $x\notin U_n$, 矛盾.

(2.5) $f^{-1}(y_0)\not\subset\bigcup_{n\in N}U_n$.

若不然, $f^{-1}(y_0)\subset\bigcup_{n\in N}U_n$. 由(2.4), 对于每一 $n\in N$, $U_n\subset\cup\{\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x: x\in U_n\}\subset U_{n+1}$.

因为 $f^{-1}(y_0)$是 X 的紧子集且$\cap(\mathcal{B}_{n+1})_x$是 X 的开子集, 存在 $m\in N$ 有 $f^{-1}(y_0)\subset U_m$. 由(2.3), 存在 $B\in\mathcal{B}_m$ 使得 f(B)是 y_0 在 Y 中的序列邻域, 于是$\varnothing\neq f^{-1}(y_0)\cap B\subset X\setminus U_m$, 矛盾.

现在, 固定点 $x_0\in f^{-1}(y_0)\setminus\bigcup_{n\in N}U_n$, 那么

(2.6) 如果在 Y 中的序列$\{y_i\}$收敛于 y_0, 则存在 X 中收敛于 x_0 的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_i)$.

对于每一 $n\in N$, 由于 $x_0\notin U_n$, 存在 $B_n\in(\mathcal{B}_n)_{x_0}$ 使得 $f(B_n)$是 y_0 在 Y 中的序列邻域, 于是 $\langle st(x_0, \mathcal{B}_n)\rangle$是 x_0 在 X 中递减的局部基, 且每一 $f(st(x_0, \mathcal{B}_n))$是 y_0 在 Y 中的序列邻域, 由引理 2.4.5, 存在 X 中收敛于 x_0 的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_i)$.

总之, f 是 1 序列覆盖映射. ∎

问题 3.4.3 度量空间上的序列覆盖的 π 映射是否是 1 序列覆盖映射?

下面讨论序列覆盖闭映射的情形. 对于问题 3.4.1 的探讨产生了度量空间的一个出乎意料的映射定理, 它也说明问题 3.4.1 的回答是否定的. 我们知道, 有不少的映射保持可度量性, 由定理 1.3.3 知, 完备映射或既开且闭的映射保持可度量性. §2.4 已部分说明了度量空间上的序列覆盖映射具有与开映射类似的一些良好性质. 下述定理再一次说明了序列覆盖映射与开映射的类似

性质.

定理 3.4.4(燕鹏飞, 林寿, 江守礼[2000]) 序列覆盖的闭映射保持可度量性.

证明. 设 X 是可度量空间, $f:X\to Y$ 是序列覆盖的闭映射. 由定理 1.3.3, 为证明 Y 是可度量空间, 只须证明 Y 是第一可数空间. 由 X 的可度量性及定理 1.3.1, 存在 X 的局部有限的开覆盖列$\{\mathcal{B}_n\}$满足

(4.1) 每一 $\mathcal{B}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{B}_n$.

(4.2) $\{\mathcal{B}_n\}$是 X 的展开.

对于每一$t_0\in Y$, 若 Y 中不存在非平凡的序列收敛于t_0, 由 Y 的Fréchet空间性质及引理 1.4.7, t_0是 Y 的孤立点, 从而它是 Y 的第一可数点. 现在设 t_0 是 Y 中的某一非平凡收敛序列的极限点, 取定 Y 中由互不相同点组成的序列$\{t_n\}$收敛于 t_0. 对于每一 $n\in N$, 置 $\mathcal{P}_n=\{f(B):B\in\mathcal{B}_n$ 且$\{t_n\}$是终于 $f(B)$的$\}=\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma_n\}$. 由于 f 是闭映射且 $\mathcal{B}_n$ 在 X 中是局部有限的, 所以 $\mathcal{P}_n$ 是 Y 的遗传闭包保持集族.

(4.3) $\mathcal{P}_n$ 是有限的.

若 $\mathcal{P}_n$ 是无限的, 则存在$\{t_n\}$的子序列$\{t_{n_k}\}$和 $\mathcal{P}_n$ 的无限子族$\langle P_k\rangle$使得每一 $t_{n_k}\in P_k$, 由于$\langle P_k\rangle$是遗传闭包保持的, 所以$\langle t_{n_k}\rangle$在 Y 中是离散的, 这一矛盾说明 $\mathcal{P}_n$ 是有限的.

(4.4) 存在 $B\in\mathcal{B}_n$ 使得 $f(B)$是 t_0 在 Y 中的序列邻域且对于 $f(B)$中任一收敛于 t_0 的序列 K, 存在 B 中的收敛序列 L 有 $f(L)=K$.

对于每一$\alpha\in\Gamma_n$, P_α 或者不是t_0的序列邻域, 或者是 t_0 的序列邻域. 若(4.4)不成立, 则存在 Y 中的收敛于 t_0的序列 K_α 使得或者$(K_\alpha\setminus\{t_0\})\cap P_\alpha=\varnothing$, 或者 $K_\alpha\subset P_\alpha$ 且对于 $\mathcal{B}_n$中任一使得 $f(B)=P_\alpha$ 的元 B, B 中不存在收敛序列 L_α 满足 $f(L_\alpha)=K_\alpha$. 令 $K_n=(\bigcup_{\alpha\in\Gamma_n}K_\alpha)\cup\langle t_n\rangle$. 由$\Gamma_n$的有限性知 K_n 是 Y 中收敛于 t_0的序列. 因为 f 是序列覆盖映射, 存在 X 中的收敛序列 L_n 使得 $f(L_n)=K_n$, 从而存在 $B\in\mathcal{B}_n$ 使得 L_n 是终于 B 的, 于是有$\alpha\in\Gamma_n$使得 $f(B)=P_\alpha$, 这时$(K_\alpha\setminus\{t_0\})\cap P_\alpha\neq\varnothing$且存在 B 中的收敛序列 L 有 $f(L)=K_\alpha$, 这一矛盾说明(4.4)成立.

设<$f(B_k)$>是(4.4)所获得的t_0的序列邻域族，因为Y是Fréchet空间，由引理1.4.7，每一$f(B_k)$是t_0在Y中的邻域，而且

(4.5) <$f(B_k)$>是t_0在Y中的邻域基.

因为序列$\{t_n\}$是终于每一 $f(B_k)$的，由(4.4)，存在序列$\{t_n\}$的子序列$\{t_{n_k}\}$使得每一$B_k \cap f^{-1}(t_{n_k}) \neq \varnothing$，取$a_k \in B_k \cap f^{-1}(t_{n_k})$，则由于f是闭映射知序列$\{a_k\}$在X中有聚点，于是它存在收敛于X中某点$a$的子序列$\{a_{k_i}\}$，这时$a \in f^{-1}(t_0)$. 设V是$t_0$在Y中的邻域，则$f^{-1}(V)$是$a$在X中的邻域，由(4.2)，存在自然数m使得$st(a, \mathcal{B}_m) \subset f^{-1}(V)$. 因为序列$\{a_{k_i}\}$收敛于$a$，存在自然数i>m和$B_1 \in \mathcal{B}_{m+1}$使得$a_{k_i} \in st(a, \mathcal{B}_{m+1})$且$B_{k_i} \subset B_1$. 设$a_{k_i} \in B_2 \in (\mathcal{B}_{m+1})_a$，由(4.1)，$B_1 \cup B_2 \subset st(a, \mathcal{B}_m)$，这说明$B_{k_i} \subset f^{-1}(V)$，因此$f(B_{k_i}) \subset V$，故(4.5)成立.

由此可见, Y在t_0是第一可数的. 因此Y是第一可数空间，故Y是可度量空间. ∎

S_ω是具有可数cs网的不可度量的Fréchet空间，所以S_ω不是度量空间的序列覆盖的闭映象. 因此，问题3.4.1的回答是否定的.

问题3.4.5 序列覆盖的闭映射是否保持g可度量空间?

定理3.4.6(燕鹏飞，林寿，江守礼[2000]) 设$f: X \to Y$是序列覆盖的闭映射，如果X是可度量空间，则f是1序列覆盖映射.

证明. 对于任一$t_0 \in Y$，不妨设t_0是Y中的某一非平凡收敛序列的极限点，取定Y中由互不相同点组成的序列$\{t_n\}$收敛于t_0. 因为X是可度量空间，由定理1.3.1，存在X的局部有限的开覆盖列$\{\mathcal{B}_n\}$满足

(6.1) 每一$\mathcal{B}_{n+1}$星加细$\mathcal{B}_n$.

(6.2) $\{\mathcal{B}_n\}$是X的展开.

对于每一$n \in N$，置$\mathcal{P}_n = f(\mathcal{B}_n)$. 如定理3.4.4的(4.4)知

(6.3) 存在$B \in \mathcal{B}_n$使得f(B)是t_0在Y中的序列邻域且对于f(B)中任一收敛于t_0的序列K，存在B中的收敛序列L有f(L)=K.

置 U_n ={p∈X: 对于每一 B∈$(\mathscr{B}_n)_p$, f(B)不是 t_0 在 Y 中的序列邻域}. 由定理 3.4.2 的(2.4)的证明有

(6.4) 如果 $x\in U_n$, 则 $\cap(\mathscr{B}_{n+1})_x\subset U_{n+1}$.

于是

(6.5) $\partial f^{-1}(t_0)\not\subset\bigcup_{n\in N}U_n$.

否则, $\partial f^{-1}(t_0)\subset\bigcup_{n\in N}U_n$. 由(6.4), 对于每一 $n\in N$, $U_n\subset\cup\{\cap(\mathscr{B}_{n+1})_x : x\in U_n\}\subset U_{n+1}$. 由定理 3.4.4 和定理 1.3.3, $\partial f^{-1}(t_0)$是 X 的紧子集, 而 $\cap(\mathscr{B}_{n+1})_x$ 是 X 的开子集, 所以对于某一 $m\in N$ 有 $\partial f^{-1}(t_0)\subset U_m$. 由(6.3), 存在 B∈$\mathscr{B}_m$ 使得 f(B)是 t_0 在 Y 中的序列邻域且存在 $k\in N$ 和 B 中的收敛序列 L 有 f(L)={t_n :n≥k}. 设 L 在 X 中收敛于 *l*, 则 $l\in\partial f^{-1}(t_0)\cap B\subset X\setminus U_m$, 矛盾.

现在, 固定点 $x_0\in\partial f^{-1}(t_0)\setminus\bigcup_{n\in N}U_n$. 由定理 3.4.2 的(2.6)的证明有

(6.6) 如果在 Y 中序列$\{y_i\}$收敛于 t_0, 那么存在 X 中收敛于 x_0 的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_i)$.

这表明, f 是 1 序列覆盖映射. ▌

由定理 2.4.15, 定理 3.4.6 中的 1 序列覆盖映射是几乎开映射.

几类序列覆盖映射及相关的与商映射、开映射等之间的关系, 尤其是度量空间上几类序列覆盖映射之间的关系, 已在前几章的不少定理中大量反映. 本节的最后举几个与这些结果相关的涉及序列覆盖映射的例子说明一些不蕴含关系.

例 3.4.7 (1) 紧度量空间的完备映射未必是序列覆盖映射.

设 $X=(\{0\}\cup\{1/2n : n\in N\})\oplus(\{0\}\cup\{1/2n-1 : n\in N\})$, Y=$S_1$. X, Y 都赋予实数的子空间拓扑, 则 X 和 Y 都是紧度量空间. 让 f:X→Y 是显然映射, 则 f 是完备映射, 但 f 不是序列覆盖映射.

(2) 完备映射未必是序列商映射.

设 X 是极大紧化 βN, Y=S_1. 定义 f:X→Y 使得 $f(\beta N\setminus N)=\{0\}$ 且 f(n)=1/n, 那么 f 是完备映射, 但 f 不是序列商映射.

(3) 可分度量空间到紧度量空间上的伪序列覆盖的商紧映射未必是紧覆盖映射.

我们介绍 Michael[1979]构造的例子. 对于每一 $x\in I$, 取定 O_x 是$\{x\}\times I$ 中长度为 1/4 的开区间. 令 $X=\{(x, y)\in I\times I : (x, y)\notin O_x\}$, Y=I, 则 X 是可分度量空间, Y 是紧度量空间. 定义 $f:X\rightarrow Y$ 是从 X 的点到它的第一个坐标的投影映射, 那么 f 是伪序列覆盖的商紧映射, 但 f 不是紧覆盖映射.

(4) 紧度量空间的序列覆盖闭映射未必是开映射.

设 $X=S_1\oplus(\{0\}\cup\{1/2n : n\in N\})$, $Y=S_1$. X, Y 都赋予实数的子空间拓扑, 则 X 和 Y 都是紧度量空间. 让 $f:X\rightarrow Y$ 是显然映射, 则 f 是序列覆盖的闭映射, 但 f 不是开映射.

(5) 度量空间的 2 序列覆盖映射未必是紧覆盖映射或商映射.

设 Y 是极大紧化 βN, 空间 X 是集合 βN 赋予离散拓扑, 则 X 是度量空间. 让 $f:X\rightarrow Y$ 是恒等映射, 则 f 是 2 序列覆盖映射, 但 f 既不是紧覆盖映射又不是商映射.

(6) 度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象未必是度量空间的 2 序列覆盖映象或度量空间的伪开映象.

设 X 是例 1.5.1 中的 Arens 空间 S_2, 则 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象. 由于 X 既不是 sof 可数空间又不是 Fréchet 空间, 从定理 2.4.11, 引理 1.4.3 知 X 既不是度量空间的 2 序列覆盖映象又不是度量空间的伪开映象.

(7) 度量空间的序列覆盖的伪开 s 映象未必是度量空间的 1 序列覆盖映象.

设 X 是例 1.5.2 中的序列扇 S_ω. 由于 X 是具有可数 cs 网的 Fréchet 空间, 从推论 2.4.4 和引理 1.4.2 知 X 是度量空间的序列覆盖的伪开 s 映象. 由于 X 不是 snf 可数空间, 从定理 2.4.11 知 X 不是度量空间的 1 序列覆盖映象.

(8) 可分度量空间的紧覆盖的商紧映象未必是度量空间的序列覆盖的紧映象

设 X 是例 3.1.13(2)所构造的具有可数弱基的正则的非 Cauchy 空间. 由推论 3.2.6 知 X 是可分度量空间的紧覆盖的商紧映象. 由于 X 不是 Cauchy 空间, 从推论 3.1.11 知 X 不是度量空间的序列覆盖的紧映象.

(9) 开映射未必是子序列覆盖映射.

设 $X=\{0\}\cup N^2$. 对于每一 n, $i\in N$, 令 $V(n, i)=\{(n, k)\in N^2 : k\geq i\}$. 集合 X 赋予如下拓扑:

N^2 中的点是 X 的孤立点, 点 0 的邻域基中的元形如$\{0\}\cup(\bigcup_{n\geq m}V(n, i_n))$, 其中 m, $i_n\in N$. 让 $Y=S_1$. 定义 $f:X\rightarrow Y$ 使得 f(0)=0 且 f((n, i))=1/n, 则 f 是开映射, 但 f 不是子序列覆盖映射.

(10) 度量空间上的紧覆盖映射未必是商映射.

如例 1.5.7, 设 $Y=N\cup\{p\}$是 Michael 空间, 则 Y 的所有紧子集是有限集且 Y 不是 k 空间. 让 $X=\oplus\{Z：Z$ 是 Y 的非空紧子集$\}$, 则 X 是度量空间. 定义 $f:X\rightarrow Y$ 是显然映射, 则 f 是紧覆盖映射, 但 f 不是商映射.

(11) 度量空间的序列商的伪开映射未必是伪序列覆盖映射.

如例 1.5.3 的 Gillman-Jerison 空间 $Z=\psi(N)$. 定义 $g:Z\rightarrow S_1$ 使得 $g(\psi(N)\setminus N)=\{0\}$ 且 g(n)=1/n. 由于在$\psi(N)$中 N 的任一无限子集有聚点在$\psi(N)\setminus N$中, 所以 g 是序列商映射, 但是 g 不是紧覆盖映射. 又由于 Z 是第一可数空间, 从定理 2.4.11 知存在度量空间 X 和 2 序列覆盖映射 $h:X\rightarrow Z$. 于是复合映射 $f=g\circ h:X\rightarrow S_1$ 是序列商映射. 因为 S_1 是 Fréchet 空间, 由引理 1.4.2 知 f 是伪开映射. 但 f 不是伪序列覆盖映射, 否则存在 X 的紧子集 K 使得 $f(K)=S_1$, 即 $g(h(K))=S_1$, 于是 g 是紧覆盖映射, 矛盾. ∎

问题 3.4.8 设 X 是度量空间, $f:X\rightarrow Y$ 是序列商的紧映射, 那么 f 是否是伪序列覆盖映射?