文章编号:1004 - 2911(2000)02 - 0085 - 63

点可数覆盖与序列覆盖映射*

——献给宁德师范高等专科学校

林　寿

(福建省宁德师范高等专科学校数学系,福建宁德　352100)

摘要:映射与覆盖的方法是研究一般拓扑学的基本工具. 作为对可度量性与紧性一般化而形成的广义度量理论与覆盖性质理论中的许多问题涉及到对确定的点可数覆盖的研究. 与点可数覆盖相关的广义度量问题的探讨导致 k 网理论与度量空间的映射理论的发展. 本文在综述了广义度量空间理论在 90 年代的主要研究课题及国内外学者的重要贡献后,分两个部分阐述了作者(及其合作者)近 3 年在空间与映射方面的一些工作. 第一部分(本文第二、三章)讨论点可数覆盖、点有限覆盖列与度量空间的 s 映象、紧映象之间的关系. 第二部分(本文第四章)讨论著作《广义度量空间与映射》中的正则分离性条件及几个有失误的论证.

本文的第一部分围绕度量空间的几类序列覆盖映象中的一些问题开展研究,引入了序列网、点星网、sn 覆盖和 so 覆盖等概念,利用了 k 网、紧有限分解网、cs 网和 sn 网等集族性质. 主要的结果是证明了弱第一可数性与 S_2, S_ω 之间的精巧关系,建立了度量空间的序列商映象、紧覆盖映象、序列覆盖映象与 1 序列覆盖映象的特征. 其作用在于充实了序列覆盖映射的理论,深化了 Arhangel'skii, Michael, Nogura, Shibakov, Svetlichny, Velichko, Tanaka 等的一些定理,尤其是肯定地回答了下述问题.

(1) Arhangel'skii 的问题[208]: 是否每一具有权数κ的序列空间是某一具有权数κ的度量空间的商映象?

(2) Ikeda-Liu-Tanaka 的问题[89]: 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs 网的序列空间.

(3) Liu-Tanaka 的问题[149,218]: 若具有点可数 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω,那么 X 是否具有点可数基?

(4) Liu-Tanaka 的问题[147]: 若具有σ点有限 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 是否是 gf 可数空间?

(5) Tanaka 的问题[218]: 若具有点可数 cs 网的序列空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 是否具有点可数弱基?

部分地回答了下述问题.

(6) Michael-Nagami 的问题[158]: 度量空间的商 s 映象是否也是度量空间的紧覆盖商 s 映象?

(7) Velichko 的问题[231]: 寻求拓扑性质Φ使得空间 X 是具有性质Φ的度量空间的商 s 映象当且仅当 X 既是Φ空间又是度量空间的商 s 映象.

本文的第二部分围绕著作《广义度量空间与映射》中的正则分离性条件及几处论证有误的命题开展讨论,吸收了 Buhagiar 等研究纤维丛一般拓扑学的思想. 主要的结果是获得了一些 T_2 空间中的广义度量定理,拓展了对次仿紧性的研究. 例如,证明了强Σ*空间是次仿紧空间,指出了次仿紧性是完备逆象不变的,构造了不具有 G_δ^* 对角线的σ闭离散空间、不具有点可数 cs*网但有局部可数且

---

* 收稿日期:2000 - 03 - 20
作者简介:林　寿(1960 -), 男,教授
国家自然科学基金资助项目(19501023,19971048),福建省自然科学基金资助项目(A97025),福建省"百千万人才工程"人选培养基金资助项目(1999)及宁德师范高等专科学校"学术带头人专项经费"资助项目. 本文是作者的博士学位论文.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

σ离散 k 网的空间和不具有 p 序列的可展空间等几个有趣的例子. 其意义在于改进了 Burke , Gruenhage ,Junnila ,Michael ,Tanaka 等的一些结果 ,丰富了映射、覆盖性质与广义度量空间的理论.

综上所述 ,我们的工作对于发展广义度量空间理论具有显著的作用.

关键词:度量空间;点可数集族;序列覆盖映射;k 网;正则空间

2000 **美国数学评论主题分类号**:54E35 ,54E40 ,54C10 ,54D55

中图分类号:O189.1　　**文献标识码**:A

第一章　引　　言

拓扑学的中心课题是确定和研究拓扑不变量. Arhangel'skii[12]**指出: 一般拓扑学致力于拓扑空间及连续性的研究 ,有三个主要的"内在"任务 ,一是不同拓扑空间类的比较 ,二是确定类的研究 ,三是为上述目的及应用的需要定义出新的概念和空间类. 实现任务一的联结空间的映射的方法是特别地重要 ,该方法是直接建立不同空间类之间的联系 ,任务二主要涉及空间类关于运算的性质 ,而覆盖的方法对完成上述任务起重要的作用.**

由此可见 ,映射与覆盖的方法是一般拓扑学中通用的重要工具 ,通过对度量化问题、空间与映射的相互分类原则和积空间的仿紧性等一般拓扑学的重要课题的研究导致了广义度量空间理论的建立[25]**. 什么是广义度量空间? 粗略地说 ,它们是这样的一些空间类**[79]**,继承了度量空间所具有的较好的运算性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类 ,如是否关于完备映射或闭映射保持? 是否关于子空间或闭子空间遗传? 是否关于有限积或可数积封闭? 是否具有一定的可和性? 是否具有某种的覆盖性质? 从** 60 **年代起广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向 ,所涉及的与公理集合论、数理逻辑、组合数学、泛函分析、拓扑群、动力系统等分支相互交融而形成的大量问题已列入专著**《Open Problems in Topology》[159]. **过去的** 40 **年间在不同时期内所取得的广义度量空间理论的成就已先后总结在一些重要的论著中 ,如文献**[5 ,25 ,79 ,80 ,113 ,169]. **许多知名学者不断提出大量有意义的问题 ,汇同一些长期未解决的经典问题成为广义度量空间理论进一步向前发展的源泉.**

1.1　广义度量空间理论的新进展

什么是 90 **年代以来广义度量空间理论的主要研究课题? 这是一个作者难以恰当回答的问题. 我们不妨来看一看** 1990 **年以来国际上出版的几部拓扑学论著及最近两次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集中关于广义度量空间理论方面的论题.**

1990 **年由** Van Mill **和** Reed[159]**主编的**《Open Problems in Topology》**在所列举的** 1 100 **个问题中属于广义度量空间方面的问题大至有 ,**

(1.1) **度量化问题与正规** Moore **空间问题(问题** 36 **至** 41 ,79 **至** 84 ,98 ,298 **至** 315 ,348 ,376 ,1049 ,1056) .

(1.2) **点可数基空间及相关问题(问题** 120 ,313 ,320 ,322 ,366 ,375 **至** 380) .

(1.3) M_i **空间问题(问题** 321) .

(1.4) cosmic **空间问题(问题** 199) .

(1.5) MOBI **类问题(问题** 362 **至** 372) .

(1.6) **紧覆盖映射问题(问题** 392 **至** 394) .

(1.7) **单调正规空间问题(问题** 381) .

1992 **年在** Hušek **和** Van Mill[88]**主编的**《Recent Progress in General Topology》**(第** 7 **次布拉格国**

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

际拓扑学学术讨论会论文集)中由 Gruenhage[80]撰写的“Generalized metric spaces and metrization”总结了 1984 年以来在广义度量空间与度量化方面的重要成果,主要论题有,

(2.1) 对称度量空间.

(2.2) 点可数基空间.

(2.3) 单调正规空间与 M_i 空间.

(2.4) Moore 空间、可展空间与严格 p 空间.

(2.5) MOBI 类.

(2.6) Lašnev 空间、cosmic 空间与 k 网.

(2.7) Tychonoff 积与 Σ积的正规性.

1997 年 Arhangel'skii[8]在纪念 Alexandroff 诞辰 100 周年的报告“Some recent advances and open problems in general topology”中论述了在过去的 5 至 7 年来作者感兴趣的度量化理论、映射理论和函数空间理论方面的成果与问题,所涉及的广义度量空间方面的课题有,

(3.1) 点可数基空间与度量化.

(3.2) 具有 G_δ 对角线的空间与可展空间.

(3.3) cosmic 空间与 $\aleph_0$ 空间.

(3.4) 一对一映射与次可度量空间.

(3.5) 紧覆盖映射与诱导完备映射.

1997 年在 Aull 和 Lowen[13]主编的《Handbook of the History of General Topology,V1》中由 Nagata[171]撰写的“The flowering of general topology in Japan”和 Nagata[172]近来撰写的“Recent progress of general topology in Japan”中自 1990 年以来日本在广义度量空间方面的主要工作涉及,

(4.1) 度量空间的分解空间及其度量化.

(4.2) Lašnev 空间与 k 网理论.

(4.3) 具有广义度量因子 Σ积的正规性.

(4.4) 广义度量空间的万有(universal)空间.

1998 年由 Hušek[87]编辑的第 8 次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集中发表的 25 篇特邀报告中有 6 篇是广义度量空间方面的内容,主要工作涉及,

(5.1) 确定度量空间的闭映象与几乎开映象.

(5.2) 单调正规空间.

(5.3) 具有广义度量因子有限积的正规性.

在《莫斯科大学数学力学通报》1999 年第 3 期上发表的纪念 Urysohn 诞辰 100 周年的论文集中发表的 11 篇报告中有 3 篇是广义度量空间方面的内容,主要工作涉及,

(6.1) 度量化问题.

(6.2) 度量空间与映射.

(6.3) 弱第一可数性.

从以上所列的课题可见度量化问题依然是一般拓扑学的核心问题,广义度量空间研究的主要对象是具有点可数基的空间、Moore 空间、M_i 空间、单调正规空间、cosmic 空间、Lašnev 空间和 MOBI 类等,主要工具是点可数覆盖、展开列、基、网、k 网、紧覆盖映射和紧映射等. 一些重要结果有,

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

关于度量化问题

定理 1.1.1 (1) (ZF) 第二可数的正则空间是可度量化空间[77]. (回答 1963 年 Läuchli[103] 提出的问题). (2) (ZF + DC) Stone 定理不成立:存在非仿紧的度量空间[78].

定理 1.1.2 (ZFC) 存在不具有拟 G_δ 对角线的遗传仿紧完正规的 Q 集空间[16];存在非仿紧的正规可遮空间[17]. (回答文[159]的问题 57,119)

定理 1.1.3 具有一致(G)和点 G_δ 性质的空间是具有 σ 离散网的半层空间[59,168].

定理 1.1.4 存在具有 σ 离散 π 基的 Moore 空间不能稠密地嵌入任何具有 Baire 性质的 Moore 空间[50]. (回答文[159]的问题 303,及 1974 年 Reed[183]提出的问题)

关于紧覆盖映射及映射的相关论题

定理 1.1.5 可分度量空间到可数度量空间的可数紧覆盖映射是诱导完备映射[100]. (回答文[159]的问题 393)

定理 1.1.6 可分度量空间到度量空间的可数紧覆盖的紧映射未必是诱导完备映射[41]. (回答文[159]的问题 392)

定理 1.1.7 对于 $w(X)=\kappa$, X 是解析(analytic)度量空间当且仅当 X 是 Baire 空间 κ^ω 的闭子空间的几乎开 s 映象[84].

定理 1.1.8 Moore 空间的第一可数的 φ 扩张是可展空间[165].

定理 1.1.9 存在 Lindelöf 的正则空间 X 使得闭映射 $f: X \to Y$ 不是诱导不可约映射[81]. (回答 Ponomarev 的问题,见文[44,第 162 页])

关于积空间

定理 1.1.10 存在遗传正规,σ 相对离散,基数 c 的 Dowker 空间[15].

定理 1.1.11 设 Σ 是半层空间的 Σ 积. 若 Σ 的每一有限子积是仿紧空间,那么 Σ 是正规空间当且仅当它是可数仿紧空间[101].

定理 1.1.12 (CH) Lašnev 空间 S_{ω_2} 的 Σ 积不是正规空间[47]. (回答 1985 年 Kodama 的问题)

定理 1.1.13 (MA + ¬CH) 存在正规,可分,局部紧的 Moore 空间 X 使得 X^2 不是正规空间[36,160]. (回答文[159]的问题 299,300)

关于单调正规空间

定理 1.1.14 存在非 K_0 的循环(cyclic)单调正规空间[184]. (回答文[159]的问题 381)

定理 1.1.15 完备映射未必保持弹性(elastic)空间[35,72]. (回答 1971 年 Tamano 和 Vaughan[210]提出的问题)

关于基、k 网与网

定理 1.1.16 存在完全正则的具一致基的空间不具有点可数闭 k 网[53]. (回答 1984 年 Gruenhage,Michael 和 Tanaka[82]提出的问题)

定理 1.1.17 空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有由可分子集组成的点可数 k 网的 Fréchet 空间[186].

定理 1.1.18 (CH) 存在 cosmic 空间 X 使得 $\dim(X)=1$ 且 $\mathrm{ind}(X)=\mathrm{Ind}(X)=2$[8,43]. (回答 1966 年 Arhangel'skii[5]提出的问题)

定理 1.1.19 存在连通的 cosmic 空间 X 使得 X 不是连通的可分度量空间的映象[229].

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

下面我们介绍国内学者关于广义度量空间理论的贡献. 国内较早并长期从事广义度量空间理论研究的学者当属高国士教授和高智民教授. 在 70 年代末至 80 年代我国学者就已在广义度量空间理论中作出不少值得称赞的成果[150,151]. 如 1981 年王戍堂得到了有理数直线 R 能够拓扑分划任一自稠密的度量空间的有趣结果,1982 年周浩旋回答了 Hušek 提出的具有小对角线空间的度量化问题,1983 年高国士论述了至今最好的 M_1 空间的闭映射定理,1984 年周浩旋探讨了度量空间的控制族及 CW 复形的闭映象的积空间性质,1985 年孙叔豪证明了具有拟弱 G_δ 对角线的可数紧空间是紧空间,1986 年江守礼解决了"严格 p 空间问题",1987 年高智民引入了至今仍在广义度量空间理论中广泛使用、具有特别意义的"cs * 网"的概念并与 Hattori 获得了平行于"Hanai-Morita-Stone 定理"的 ℵ空间的映射定理,1989 年吴利生利用 Souslin 性质阐明了 Morita 的 P(ω) 空间的结构.

进入 90 年代我国学者每年在广义度量空间理论方面都有不少优秀的成果涌现,这首先得益于国家自然科学基金加大对基础研究的投入力度,其次得益于国内学者与日本、美国、加拿大、新西兰、芬兰等国学者的较为广泛的合作. 据不完全统计,1990 年以来四川大学(3)、山东大学(2)、西北大学(2)、首都师范大学(2)、苏州大学(1)、广西大学(1)、宁德师范高等专科学校(4)等校至少主持过 15 项与广义度量空间理论相关的国家自然科学基金资助项目的研究工作,国家自然科学基金还资助了 1993 年的苏州国际一般拓扑学学术会议、1997 年的金华国际拓扑学学术会议、1998 年的北京国际一般拓扑学学术会议以及部分学者的"国际合作与交流项目"、"资助出国参加国际学术会议项目". 这也从另一角度说明了国内关于广义度量空间理论的研究成果是极为丰富和具有相当的影响力.

我们简略报告国内学者 90 年代在广义度量空间理论方面一些具有一定影响和较多引用的工作. 1990 年至 1991 年滕辉[226～228]系统地探讨了广义度量空间的Σ积和σ积,解决了 Chiba 和 Yajima 提出的几个问题,如证明了半层空间族的Σ积是集态次正规空间. 1990 年至 1993 年恽自求[99,258～260]获得了 ℵ空间的系列结果,如他与 Junnila 证明了 ℵ空间等价于不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1} 的具有σ遗传闭包保持 k 网的空间. 1992 年王尚志与 Milner[161]建立了广义序空间的嵌入定理与度量化定理并解决了 1971 年 Lutzer[152]提出的困难问题被国际拓扑学界称为是度量化方面最有趣的结果之一. 钟宁[264～265]在困难的 M_3 空间上取得了一些进展,如 1992 年关于具有 M_3 因子的乘积空间定理及 1994 年关于"小 M_3 空间是 M_1 空间"的工作. 1993 年王延庚和王戍堂[235]研究了判断 B_r 空间的一般性方法. 1992 年至 1997 年刘川与戴牧民[38,135～141]关于遗传闭包保持集族、弱基及度量空间的紧覆盖 s 映象的工作,尤其是证明了 g 可度量空间等价于不含有闭子空间同胚于 S_ω 的具有σ遗传闭包保持 k 网的 k 空间. 从 1996 年至 1998 年刘川与 Tanaka[145～149]在星可数 k 网及相关的紧可数 k 网、σ点有限 k 网、局部可分度量空间的映象等方面完成了一系列系统的工作,如证明了空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当它是具有星可数 k 网的 Fréchet 空间. 1997 年冯秀凤与 Tamano[51]证明了可数多个 Lašnev 空间积的可数扇密度子空间是可度量空间,解决了 Arhangel'skii 提出的问题.

此外,高智民[65]关于广义度量空间的 g 函数刻画,戴牧民等[37,39]关于 D_i 空间的工作,1991 年朱建平[270]关于弱第一可数空间的工作,1993 年高智民[67]关于 g 可度量空间的工作,1994 年周浩旋与 Fitzpatrick[52]关于度量空间的拓扑完备化的工作,1995 年陈怀鹏[30]关于乘积

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

空间的 k 空间性质的工作,1996 年高印珠[59]关于 Collins-Reed-Roscoe-Rudin 度量化定理的工作,1997 年燕鹏飞[242,244]关于度量空间紧映象的工作,1998 年曹继岭等[27]关于拟一致结构和拟可度量空间的工作和周浩旋等[236]关于单调正规空间的工作,1999 年屈志斌与高智民[182]关于具有紧可数 k 网空间的工作等都是国内关于广义度量空间理论的较好工作,限于篇幅,我们不在此一一叙述.

1.2 记号与术语

我们将围绕覆盖与映射相关的一些问题进行工作,主要涉及点可数覆盖、点正则覆盖与度量空间的紧覆盖映象、序列覆盖映象及 1 序列覆盖映象. 与点可数覆盖和点正则覆盖相关的映射是 s 映射与紧映射. 从 MOBI 类的研究[18,34]可见作为对开 s 映象与开紧映象探讨深化的度量空间的商 s 映象与度量空间的商紧映象是两类重要的广义度量空间类,与 Michael-Nagami 问题[158]相关而涉及的这些映射是否是紧覆盖映射的问题是耐人寻味的. 进一步的研究导致 k 网理论及序列覆盖映射理论的发展,它们在刻画确定的广义度量空间上所显示的独特作用可见文献[113,133,218,222].

我们约定:本文所论空间均是满足 T_2 分离性公理的拓扑空间,映射指连续的满函数. N 表示自然数集. 对于集合 X 的子集族 $\mathbf{P}$, $x \in X$ 和 $A \subset X$, 记 $(\mathbf{P})_x = \{P \in \mathbf{P} : x \in P\}$, $st(x, \mathbf{P}) = \cup (\mathbf{P})_x$, $st(A, \mathbf{P}) = \cup\{P \in \mathbf{P} : P \cap A \neq \emptyset\}$, $\mathbf{P}^{<\omega} = \{\mathbf{F} \subset \mathbf{P} : \mathbf{F}$ 是有限的$\}$. 若 $x_n (n \in N)$ 是 X 中的一列点, $< x_n >$ 表示 X 的子集 $\{x_n : n \in N\}$; (x_n) 表示笛卡儿积 X^ω 中的第 n 个坐标为 x_n 的点; 象通常一样, $\{x_n\}$ 表示 X 中的第 n 项为 x_n 的序列. 对于空间 X, $\tau(X)$ (在不引起混淆时记 τ) 表示 X 上的拓扑. 以符号 ■表示命题论证结束或命题是不证自明的.

未定义的术语以文[49,113]为准. 为叙述的方便起见,在引用文献时一些在文[113]中论证过的命题有时以文[113]代替原始文献,请这些命题的作者谅解. 先回忆一些重要的映射类及覆盖族.

定义 1.2.1[49] 设映射 $f : X \to Y$.

(1) f 称为 s 映射,若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的可分子集.

(2) f 称为紧映射,若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集.

(3) f 称为商映射,若 $f^{-1}(U)$ 是 X 的开子集,则 U 是 Y 的开子集.

(4) f 称为伪开映射,若 V 是 X 的开子集且 $f^{-1}(y) \subset V$,则 $f(V)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

(5) f 称为几乎开映射,若对于 $y \in Y$,存在 $x \in f^{-1}(y)$ 使得如果 U 是点 x 在 X 中的邻域,则 $f(U)$ 是点 y 在 Y 中的邻域.

(6) f 称为开映射,若 V 是 X 的开子集,则 $f(V)$ 是 Y 的开子集.

(7) f 称为闭映射,若 F 是 X 的闭子集,则 $f(F)$ 是 Y 的闭子集.

(8) f 称为完备映射,若 f 是闭且紧的映射.

易验证,

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{开映射} & \Rightarrow & \text{几乎开映射} & & \\ & & & & \Downarrow & & \\ \text{完备映射} & \Rightarrow & \text{闭映射} & \Rightarrow & \text{伪开映射} & \Rightarrow & \text{商映射}. \end{array}$$

定义 1.2.2 设映射 $f : X \to Y$.

(1) f 称为紧覆盖映射[154],若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的象.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(2) f 称为序列商映射[19],若 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y,那么存在$\{y_n\}$的子序列$\{y_{n_i}\}$和 X 中收敛于某点 $x\in f^{-1}(y)$的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_{n_i})$.

(3) f 称为序列覆盖映射[200],若 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y,那么存在 X 中收敛于某点 $x\in f^{-1}(y)$的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(4) f 称为伪序列覆盖映射[82,89],若 Y 中的任一(含极限点的)收敛序列是 X 中某紧子集在 f 下的象.

(5) f 称为子序列覆盖映射[128],若$\{y_n\}$是 Y 中的收敛序列,那么存在 X 中的紧子集 K 使得 $f(K)$是$\{y_n\}$的子序列.

(6) f 称为 1 序列覆盖映射[114],若对于 $y\in Y$ 存在 $x\in f^{-1}(y)$满足:如果 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y,那么存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(7) f 称为 2 序列覆盖映射[114],若对于 $y\in Y$ 及 $x\in f^{-1}(y)$满足:如果 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y,那么存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

1971 年 Siwiec[200]称定义 1.2.2(3)的映射为序列覆盖映射,1984 年 Gruenhage,Michael 和 Tanaka[82]也称定义 1.2.2(4)的映射为序列覆盖映射,为不引起混淆,我们在此采用文[89]的术语称定义 1.2.2(4)的映射为伪序列覆盖映射.

易验证,

完备映射 ⇒紧覆盖映射
⇓
2 序列覆盖映射 ⇒1 序列覆盖映射 ⇒序列覆盖映射 ⇓伪序列覆盖映射 ⇒ / ⇒序列商映射⇓ 子序列覆盖映射.

定义 1.2.3　设 X 是一个空间, $P\subset X$.

(1) 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x,称$\{x_n\}$是终于 P 的,如果存在 $m\in N$ 使得$\{x\}\cup\{x_n: n\geq m\}\subset P$.

(2) P 称为 X 中的点 x 的序列邻域,若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x,则$\{x_n\}$是终于 P 的.

(3) P 称为 X 的序列开集,若 P 是 P 中每一点的序列邻域.

(4) P 称为 X 的序列闭集,若 $X\setminus P$ 是 X 的序列开集.

(5) X 称为序列空间[54],若 X 的每一序列开集是 X 的开集.

(6) X 称为 k 空间[56],若 $A\subset X$ 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K\cap A$ 是 K 的闭子集,则 A 是 X 的闭子集.

(7) X 称为 Fréchet 空间[54],若 $x\in cl(A)\subset X$,则存在 A 中点组成的序列$\{x_n\}$使得在 X 中$\{x_n\}$收敛于 x.

(8) X 称为强 Fréchet 空间[200],若$\{A_n\}$是 X 中的递减的集列且 $x\in\bigcap_{n\in N}cl(A_n)$,则存在 $x_n\in A_n(n\in N)$使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x.

显然,第一可数空间 ⇒强 Fréchet 空间 ⇒Fréchet 空间 ⇒序列空间 ⇒k 空间.

下述引理在我们的证明中将不加说明地被反复使用.

引理 1.2.4[113]　设映射 $f: X\to Y$.

(1) 若 Y 是 k 空间, f 是紧覆盖映射,则 f 是商映射.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

(2) 若 Y 是序列空间, f 是子序列覆盖映射,则 f 是商映射.

(3) 若 Y 是 Fréchet 空间, f 是商映射,则 f 是伪开映射.

(4) 若 X 是序列空间, f 是商映射,则 f 是序列商映射.

定义 1.2.5[49] 设 **P** 是空间 X 的子集族.

(1) **P** 称为 X 的点有限集族,若对于每一 $x \in X$, $(\mathbf{P})_x$ 是有限的.

(2) **P** 称为 X 的点可数集族,若对于每一 $x \in X$, $(\mathbf{P})_x$ 是可数的.

(3) **P** 称为 X 的星可数集族,若对于每一 $Q \in \mathbf{P}$, $\{P \in \mathbf{P}: P \cap Q \neq \emptyset\}$ 是可数的.

(4) **P** 称为 X 的局部有限集族,若对于每一 $x \in X$,存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\{P \in \mathbf{P}: P \cap U \neq \emptyset\}$ 是有限的.

(5) **P** 称为 X 的离散集族,若对于每一 $x \in X$,存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\{P \in \mathbf{P}: P \cap U \neq \emptyset\}$ 至多只有一个元.

(6) **P** 称为 X 的局部可数集族,若对于每一 $x \in X$,存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\{P \in \mathbf{P}: P \cap U \neq \emptyset\}$ 是可数的.

定义 1.2.6 设 **P** 是空间 X 的覆盖.

(1) **P** 称为 X 的网[3],若 X 的每一开子集是 **P** 的某子集族的并.

(2) **P** 称为 X 的 k 网[177],若对于 X 中的每个紧子集 K 及 X 中包含 K 的开集 V,存在 $\mathbf{P}' \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $K \subset \cup \mathbf{P}' \subset V$.

(3) **P** 称为 X 的 cs 网[83],若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域,则存在 $P \in \mathbf{P}$ 使得序列 $\{x_n\}$ 是终于 P 的且 $P \subset V$.

(4) **P** 称为 X 的 cs* 网[62],若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域,则存在 $P \in \mathbf{P}$ 使得序列 $\{x_n\}$ 的某子序列是终于 P 的且 $P \subset V$.

具有可数网的空间称为 cosmic 空间[154],具有可数 k 网的空间称为 $\aleph_0$ 空间[154]. 在大多数文献中,cosmic 空间与 $\aleph_0$ 空间都预先假设正则性. 由于本文所论空间是在 T_2 空间中,为了使命题更具有一般性,所以 cosmic 空间与 $\aleph_0$ 空间未预先假设正则性. 术语 cs* 网由高智民[62]引入,近年来的研究表明它是一个很重要的概念,Tanaka 在文[213]中曾记 cs* 网为条件 (C_1).

定义 1.2.7 设空间 X 的子集族 $\mathbf{P} = \cup\{\mathbf{P}_x : x \in X\}$ 满足: 对于 $x \in X$, $\mathbf{P}_x$ 是 x 在 X 中的网,即 $\mathbf{P}_x \subset (\mathbf{P})_x$ 且若 $x \in G \in \tau$,存在 $P \in \mathbf{P}_x$ 使得 $P \subset G$;并且如果 $U, V \in \mathbf{P}_x$,那么存在 $W \in \mathbf{P}_x$ 使得 $W \subset U \cap V$.

(1) **P** 称为 X 的序列邻域网[114],若每一 $\mathbf{P}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域.

(2) **P** 称为 X 的序列开网[114],若每一 $\mathbf{P}_x$ 的元是 X 的序列开集.

(3) **P** 称为 X 的弱基[5],若 $G \subset X$ 使得对于 $x \in G$ 存在 $P \in \mathbf{P}_x$,有 $P \subset G$,那么 G 是 X 的开集.

上述 $\mathbf{P}_x$ 分别称为 x 在 X 中的序列邻域网(简记为 sn 网),序列开网(简记为 so 网)和弱基(或弱邻域基). 若空间 X 的每一点都有可数的 sn 网(so 网,弱基),则称 X 是 snf 可数(sof 可数,gf 可数)空间.

在文[119]中按审稿专家的建议将 x 的序列邻域称为 sequential barrier at x, sn 网称为 universal cs-network. 我们这儿的术语似乎更加兼顾习惯. 易验证,对于空间 X 的覆盖,基 ⇒ 弱基 ⇒

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

sn 网 ⇒cs 网 ⇒cs* 网. gf 可数(第一可数) 空间等价于 snf 可数(sof 可数) 的序列空间.

为了叙述的方便,我们引述文[113]中的一个度量化定理.

定理 1.2.8　对于空间 X,下述条件相互等价:

(1)　X 是可度量空间.

(2)　X 是具有 σ 局部有限基的正则空间.

(3)　X 存在开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得对于 X 的任一紧子集 K, $\langle st(K,\mathcal{U}_n)\rangle$ 是 K 在 X 中的邻域基.

(4)　X 存在展开 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$. ■

此处, X 的开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 称为 X 的展开,若对于每一 $x\in X$, $\langle st(x,\mathcal{U}_n)\rangle$ 是 x 在 X 中的邻域基,具有展开的空间称为可展空间[49];而称 X 的覆盖 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$,若对于每一 $U\in\mathcal{U}_{n+1}$,存在 $V\in\mathcal{U}_n$ 使得 $st(U,\mathcal{U}_{n+1})\subset V$[49].

本节最后定义三个特殊的商空间 S_2、S_ω 和 S_{ω_1}.

定义 1.2.9　设序列 $T_0=\{a_n\}$ 收敛于 $x_0\notin T_0$ 且设每一序列 $T_n(n\in N)$ 收敛于 $a_n\notin T_n$. 让 T 是空间族 $\langle T_n\cup\{a_n\}\rangle$ 的拓扑和. $S_2=\{x\}\cup(\cup\{T_n:n\geq 0\})$ 是由贴合空间 $T_0\oplus T$ 中的每一 $a_n\in T_0$ 与 $a_n\in T$ 所得到的商空间. $S_\omega=\{x\}\cup\langle T_n\rangle$ 是由贴合空间 T 中所有的 $a_n\in T$ 到一点 x 所得到的商空间. 即 S_ω 是把可数多个收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间. 一般地,对于基数 $\alpha\geq\omega$, S_α 是把 α 多个收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间. 我们统称形如 S_α 的空间为扇空间.

S_2 称为 Arens 空间[2], S_ω 称为序列扇[10]. S_2 是非 Fréchet 的 gf 可数空间, S_ω 和 S_{ω_1} 都是非 gf 可数的 Fréchet 空间.

1.3　结果与结构

受高国士教授十多年的教导,这几年作者主要在广义度量空间理论方面作过一些探索性的研究,尤其偏爱空间与映射方面的课题. 广义度量空间理论从 60 年代起在国际上蓬勃发展,各个不同时期均不断有名家与名作涌现,作者的工作受 Arhangel'skii, Foged, Gruenhage, Michael 和 Tanaka 等的影响较大. 本文是作者(与合作者)近 3 年来主要研究工作的总结,它由两部分组成.

本文的第一部分(第二、三章)围绕点可数覆盖、点有限覆盖列与度量空间的确定的序列覆盖映射之间的一些问题开展研究,主要的问题有,

问题 1.3.1　(1) 是否每一具有权数 κ 的序列空间是某一具有权数 κ 的度量空间的商映象? (Arhangel'skii 的问题,见文[208])

(2) 度量空间的商 s 映象是否也是度量空间的紧覆盖商 s 映象? (Michael 和 Nagami[158] 的问题)

(3) 寻求拓扑性质 Φ 使得空间 X 是具有性质 Φ 的度量空间的商 s 映象当且仅当 X 既是 Φ 空间又是度量空间的商 s 映象. (Velichko[231] 的问题)

(4) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs 网的序列空间. (Ikeda, Liu 和 Tanaka[89] 的问题)

(5) 若具有点可数 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω,那么 X 是否具有点

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

可数基 ? (Liu 和 Tanaka[149,218]的问题)

(6) 若具有 σ 点有限 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 是否是 gf 可数空间 ? (Liu 和 Tanaka[147]的问题)

(7) 若具有点可数 cs 网的序列空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 是否具有点可数弱基 ? (Tanaka[218]的问题)

我们的工作肯定地回答了问题 1.3.1 中的(1)、(4)、(5)、(6)和(7),部分地回答了问题 1.3.1 中的(2)和(3). 主要的结果有,

定理 1.3.2 对于任意基数 κ 及任意空间 X, X 具有基数 κ 的序列网当且仅当 X 是具有权数 κ 的度量空间的序列商映象. (见定理 2.2.10)

定理 1.3.3 对于空间 X,下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖 s 映象.

(2) X 具有点可数的紧有限分解网.

(3) X 具有点可数的强 k 网. (见定理 2.3.8)

定理 1.3.4 对于空间 X,下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象.

(2) X 既是局部的 $\aleph_0$ 空间又是度量空间的序列覆盖的商 s 映象.

(3) X 是具有点可数 cs 网的局部 $\aleph_0$ 的序列空间. (见推论 2.4.9)

定理 1.3.5 对于空间 X,下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的紧映象.

(3) X 具有点正则 cs 网.

(4) X 具有点正则 sn 网.

(5) X 具有一致 cs 网.

(6) X 具有一致 sn 网.

(7) X 具有点有限 cs 覆盖的点星网.

(8) X 具有点有限 sn 覆盖的点星网. (见定理 3.1.8)

定理 1.3.6 空间 X 具有点可数弱基(基)当且仅当 X 是具有点可数 cs 网(cs * 网)的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_ω(S_2 和 S_ω). (见推论 2.1.9)

定理 1.3.7 设 $f: X \to Y$ 是序列覆盖映射,其中 X 是度量空间. 如果 f 是紧映射或闭映射,则 f 是 1 序列覆盖映射. (见定理 3.2.6 和定理 3.2.9)

本文的第二部分(第四章)对著作《广义度量空间与映射》[113]中的正则分离公理及几个论证有误的命题作几点说明. 主要结果有,

定理 1.3.8 对于空间 X,下述条件相互等价:

(1) X 是强 Σ^* 空间.

(2) X 是次仿紧的 Σ^* 空间.

(3) X 是等紧的 Σ^* 空间. (见定理 4.1.6)

定理 1.3.9 设 $f: X \to Y$ 是完备映射. 如果 Y 是次仿紧空间,则 X 是次仿紧空间. (见定理 4.1.9)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

我们也构造了一些有趣的例子.

例 1.3.10　(1) σ 闭离散空间 $\not\Rightarrow$ 具有 G_δ^* 对角线. (见例 4.2.2)

(2) 局部可数且 σ 离散 k 网 $\not\Rightarrow$ 具有点可数 cs^* 网. (见例 4.2.3)

(3) 可展空间 $\not\Rightarrow$ p 空间. (见例 4.2.3)

上述结果大部分散见于已完成的论文[21,119,123～125,131～133,179,248～250]中,一小部分是作者未发表的成果. 本文的一些内容是作者与燕鹏飞,Buhagiar,彭良雪等合作的成果以及与李进金,李克典等讨论的结果(均有注出),在此先感谢他们允许将我们合作的成果写入我的博士学位论文.

为了便于核对或更加严谨、完备起见,除一些熟知的知识与引用《广义度量空间与映射》[113]的一部分结果外,本文的证明基本上是封闭的,若干已先组织在已发表或待发表的论文中的主要结果均给出文献出处,几个近年来发表的或与合作者完成的结果也给出完整的证明,参考文献的选取亦近可能反映 90 年代以来国际上空间与映射研究的重要成果及国内若干有特色的工作,在命题的论证之外还叙述了一些研究线索及作者对空间与映射的感想,似乎有点累赘. 其目的一是增强此文的可读性与完备性,二是为进一步的工作抛砖引玉,更主要是希望在不久能以本文为骨架完成一本与《广义度量空间与映射》相衔接的姐妹篇. 我认为,本文的内容,结合作者 1994 年至 1997 年关于空间与映射的工作[114～118,120～121,127～129,142,167],刘川,Sakai 和 Tanaka 等关于星可数 k 网与 Lašnev 空间的工作[137～141,144～149,185～187,219～221],Foged[53]与 Nogura,Shibakov[175～176,192～198]关于点可数 k 网的工作以及彭良雪关于具有 σ 遗传闭包保持 k 网的空间与 $\sum^*$ 空间的工作[178～179]等将是自《广义度量空间与映射》出版以来在空间与映射方面富有成果的主线索之一.

第二章　点可数覆盖与度量空间的 s 映象

早在 20 年代 Alexandroff 和 Urysohn(见文[8])就证明了如果正则空间 X 具有由可分度量空间组成的点可数开覆盖,则 X 是度量空间. 1960 年 Ponomarev[180]用度量空间的开 s 映象刻画了具有点可数基的空间,为 Alexandroff 的空间分类思想奠定了基础,伴随着 meta-Lindelöf 等覆盖性质的进一步深入探索[24],引导了一批一般拓扑学工作者对于点可数族的浓厚兴趣. 对于由点可数覆盖所确定的广义度量空间理论较为系统研究的 3 篇重要论文是 1976 年 Burke 和 Michael[26]的"On certain point-countable covers",1984 年 Gruenhage,Michael 和 Tanaka[82]的"Spaces determined by point-countable covers"以及 1987 年 Tanaka[213]的"Point-countable covers and k-networks". 文[214]是关于点可数覆盖与度量空间的 s 映象的第一个较详细的综述报告(含有完整的证明). 这些论文的大部分结果已写入作者 1995 年出版的《广义度量空间与映射》[113]. 现在,点可数覆盖理论的研究依然是拓扑学中较活跃的课题之一,包含函数空间[45]、拓扑群[9]等在内的具有确定的点可数覆盖空间的度量化问题依然吸引着一些一般拓扑学名家的关注[8,130].

本章将围绕具有点可数 k 网的空间、具有点可数序列网的空间、具有点可数 cs^* 网的空间、具有点可数 cs 网的空间与具有点可数紧有限分解网的空间中的一些与度量空间的 s 映象相关的问题进行工作. 我们应用 Ponomarev[180]、Mišcenko[162]处理度量空间的开 s 映象与点可数覆盖的技巧,发挥 Franklin[55]定义的序列闭包拓扑"既有稳定的收敛序列又可回避空间对弱第一可数性的要求"这一优点,解决了 Arhangel'skii,刘川和 Tanaka 等提出的 4 个问题(见问题 2.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

1.2 ,问题 2.2.1(1)) ,部分地回答了 Michael ,Nagami 和 Velichko 等提出的 2 个问题(见问题 2.3.1 ,问题 2.4.1) ,深化了 Michael ,Nogura ,Shibakov ,Svetlichny ,Tanaka 等的一些结果.

度量空间的几类序列覆盖 s 映象与点可数覆盖的一些重要结果可归纳如下,

定理 2.0.1 (1) 空间 X 是度量空间的伪序列覆盖(序列商 ,子序列覆盖) 的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 cs * 网[113].

(2) 空间 X 是度量空间的序列覆盖的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 cs 网[115].

(3) 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 sn 网[114].

(4) 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 so 网[114].

(5) 空间 X 是度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cs * 网的序列空间[213].

(6) 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 具有点可数弱基[114].

(7) 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 具有点可数基[114]. ■

2.1 k 网与 Liu-Tanaka 的问题

在由点可数覆盖所确定的广义度量空间类中 ,具有点可数 k 网的空间所具有的魅力仅次于具有点可数基的空间. 研究 M 空间的度量化[82]、度量空间的 s 映象[213]与完备逆象[82]、乘积空间的弱第一可数性[142,175,194,219] ,CW 复形[146,216]、函数空间[153]、广义序空间[143]、具广义度量条件的拓扑群的度量化[143,196]及具有点可数基空间的性质[129]等均与具有点可数 k 网的空间有关. 由此可见 ,具有点可数 k 网的空间是较典型的广义度量空间类[222].

具有点可数 k 网空间研究的主旋律之一是它们与由点可数覆盖确定的空间之间的转化 ,适当的弱第一可数性是一个合适的媒介. 已知的结果有,

定理 2.1.1 (1) 具有点可数 k 网的紧空间是可度量化空间[82].

(2) 具有点可数 cs 网的 gf 可数空间具有点可数弱基[129].

(3) 具有点可数 cs * 网的强 Fréchet 空间具有点可数基[113].

(4) 具有点可数 k 网的正则的强 Fréchet 空间具有点可数基[82]. ■

刘川和 Tanaka 提出,

问题 2.1.2 (1) 若具有点可数 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω,那么 X 是否具有点可数基[149,218] ?

(2) 若具有点可数 cs 网的序列空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 是否具有点可数弱基[218] ?

(3) 若具有 σ 点有限 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 是否是 gf 可数空间[147] ?

从定理 2.1.1 可见 ,问题 2.1.2 的实质是在具有点可数 k 网的空间中 S_2, S_ω 与弱第一可数性的关系. 1983 年 Tanaka[212]证明了局部可分度量空间的正则的商 s 映象是可度量化空间当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω; 1994 年刘川和戴牧民[138]证明了对于具有点可数闭 k 网的正则的 k 空间 X ,若 X 具有点 G_δ 性质且不含有闭子空间同胚于 S_ω,则 X 是 gf 可数空间; 1995 年 Nogura 和 Shibakov[175]证明了对于具有点可数 k 网的 Fréchet 空间 X ,若 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,则 X 是第一可数空间. 受这些工作的启发 ,我们利用序列闭包拓扑减弱了空间对弱第一可数性的要求 ,同时引入梳和扇的概念 ,推广了戴牧民 ,刘川 ,Nogura ,Shibakov 和

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

Tanaka 等的一系列工作,并且肯定地回答了问题 2.1.2.

先引进几个概念与记号. 与 k 网和 cs*网相关的概念是 wcs*网和燕鹏飞在文[249]引入的条件(A)和(B). 对于空间 X 的子集族 **F**,令 $Int_s(\mathbf{F}) = \{x : \cup\mathbf{F}$ 是点 x 在 X 中的序列邻域$\}$. 对于 $A \subset X$, X 的子集族 **F** 称为 A 的序列邻域,如果 $A \subset Int_s(\cup\mathbf{F})$,即 $\cup\mathbf{F}$ 是 A 中每一点在 X 中的序列邻域. 应注意它与空间中点的序列邻域(见定义 1.2.3)的区别.

定义 2.1.3 设 **P** 是空间 X 的覆盖.

(1) **P** 是 X 的 wcs*网[129],如果$\{x_n\}$是 X 中收敛于 x 的序列且 $x \in U \in \tau$,则存在 $P \in \mathbf{P}$ 和$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$使得 $\langle x_{n_i}\rangle \subset P \subset U$.

(2) 称 **P** 具有(A)[249],如果 $x \in U \in \tau$,则存在 $\mathbf{F} \in \mathbf{P}^{<\omega}$使得 $x \in Int_s(\cup\mathbf{F}) \subset \cup\mathbf{F} \subset U$.

(3) 称 **P** 具有(B)[249],如果 $x \in U \in \tau$,则存在 $\mathbf{F} \in \mathbf{P}^{<\omega}$使得 $x \in Int_s(\cup\mathbf{F}) \subset \cup\mathbf{F} \subset U$,且 $x \in \cap\mathbf{F}$.

术语 wcs*网由作者与 Tanaka 在文[129]中引入,它的更早描述是在文[213]中记为条件(C_2).

每一拓扑空间(X,τ)可重新定义一拓扑 σ_τ: $O \in \sigma_\tau$ 当且仅当 O 是(X,τ)的序列开集. 空间(X,σ_τ)称为空间(X,τ)的序列闭包拓扑空间,简记为 σX[55]. 显然,σX 是序列空间,X 和 σX 有相同的收敛序列. 对于空间 X 及 $A \subset X$,记 $cl_\sigma(A) = cl_{\sigma X}(A)$, $cl_s(A) = \{x \in X$:存在 A 中的序列在 X 中收敛于点 $x\}$.

对于空间 X,及点 $x \in X$. 称 X 的子集 C 是空间 X(在点 x)的梳[119],如果 $C = \{x\} \cup \langle x_n\rangle \cup \{x_{nm} : n, m \in N\}$,其中序列$\{x_n\}$收敛于 x,对于每一 $n \in N$,序列$\{x_{nm}\}$收敛于点 x_n,且 x, x_n 及 x_{nm}的各项是两两互不相同. 设 C 是 X 的梳,C 的子集 D 称为 C 的对角,如果 D 是 C 的收敛序列且 D 与无限多个关于 n 的序列$\{x_{nm}\}$相交. 称 X 的子集 F 是空间 X(在点 x)的扇[119],如果 $F = \{x\} \cup \{x_{nm} : n, m \in N\}$,其中对于每一 $n \in N$,序列$\{x_{nm}\}$收敛于点 x,且 x 及 x_{nm}的各项是两两互不相同的. 设 F 是 X 的扇,F 的子集 D 称为 F 的对角,如果 D 是 F 的收敛序列且 D 与无限多个关于 n 的序列$\{x_{nm}\}$相交. 空间 X 称为α_4 空间[6,7,174],如果对于 $x \in X$, X 的每一在 x 的扇有对角收敛于 x.

S_2 是没有对角的梳,S_ω 是没有对角的扇. 梳,扇和对角的概念在文[119]中定义. 确切地说,它们是文[119]的审稿专家在修改意见中提出的概念. 文[176]中也出现扇及收敛对角的概念. 而α_4 空间是采用 Nogura[174]的术语,Arhangel'skii[6,7]在讨论 Fréchet 空间的乘积性质时把这空间命名为类$\langle 4\rangle$. 易验证,对于空间 X 的覆盖,

$$\begin{array}{ccccccc} \text{sn 网} & \Rightarrow & (B) & \Rightarrow & (A) & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{cs 网} & \Rightarrow & \text{cs}^*\text{网} & \Rightarrow & \text{wcs}^*\text{网} & \Leftarrow & \text{k 网}. \end{array}$$

X 是 snf 可数空间 $\Rightarrow X$ 是α_4 空间 $\Leftrightarrow \sigma X$ 是α_4 空间 $\Rightarrow \sigma X$ 不含有闭子空间同胚于 $S_\omega \Rightarrow X$ 不含有闭子空间同胚于 S_ω,且空间 X 是强 Fréchet 空间当且仅当 X 是 Fréchet 的α_4 空间.

为了说明上述覆盖的进一步关系,我们先证明一个与著名的 Miščenko[162]引理类似的有趣结果,它主要是由燕鹏飞证明的.

引理 2.1.4[249] 如果 **P** 是空间 X 的点可数覆盖,那么 X 的每一子集仅有至多可数多个

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

由 **P** 的元组成的极小有限的序列邻域.

证明. 对于每一 $\mathbf{F}\in\mathbf{P}^{<\omega}$,让 $\mathbf{H}(\mathbf{F})=\{H\subset X:\mathbf{F}$ 是 H 的极小的序列邻域$\}$. 设 $A\subset X$,如果存在不可数多个 $\mathbf{F}\in\mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $A\in\mathbf{H}(\mathbf{F})$,则存在 $m\in N$ 和 $\mathbf{P}^{<\omega}$ 的不可数子集 $\wedge$ 使得对于每一 $\mathbf{F}\in\wedge$ 有 $|\mathbf{F}|=m$ 且 $A\in\mathbf{H}(\mathbf{F})$.

设 $\mathbf{R}$ 是 $\mathbf{P}$ 的满足对于不可数多个 $\mathbf{F}\in\wedge$ 有 $\mathbf{R}\subset\mathbf{F}$ 的极大子集,那么 $0\leq|\mathbf{R}|<m$. 让 $\Gamma=\{\mathbf{F}\in\wedge:\mathbf{R}\subset\mathbf{F}\}$. 如果 $\mathbf{F}\in\Gamma$,则 $A\not\subset Int_s(\cup\mathbf{R})$. 选取 $x\in A\setminus Int_s(\cup\mathbf{R})$,则存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得所有的 $x_n\notin\cup\mathbf{R}$. 让 $L=<x_n>$,由于 $\cup\mathbf{F}$ 是 x 的序列邻域,于是 L 与 $\mathbf{F}$ 的某些元相交. 因为 $\mathbf{P}$ 是点可数的且 Γ 是不可数的,所以存在 $P\in\mathbf{P}$ 使得 $L\cap P\neq\varnothing$ 且有 Γ 的不可数多个元含有 P,于是 $P\notin\mathbf{R}$ 且有 Γ(因而 $\wedge$)的不可数多个元含有 $\mathbf{R}\cup\{P\}$,这与 $\mathbf{R}$ 的极大性矛盾. 故仅有至多可数多个 $\mathbf{F}\in\mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $A\in\mathbf{H}(\mathbf{F})$. ■

引理 2.1.5 对于空间 X,考虑下述条件:

(1) X 有点可数覆盖满足(B).

(2) X 是具有点可数 cs * 网的 α_4 空间.

(3) X 是具有点可数 wcs * 网的 α_4 空间.

(4) X 有点可数覆盖满足(A).

那么$(1)\Leftrightarrow(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)$. 若更设 X 是正则空间,那么$(4)\Rightarrow(1)$.

证明 $(1)\Rightarrow(2)\Rightarrow(3)$ 是显然的.

$(3)\Rightarrow(4)$. 设 X 是 α_4 空间,且 $\mathbf{P}$ 是 X 的点可数的 wcs * 网. 若 $\mathbf{P}$ 不具有(A),则对于某一 $x\in U\in\tau$ 不存在 $\mathbf{F}\in\mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in Int_s(\cup\mathbf{F})\subset\cup\mathbf{F}\subset U$. 对于 U 的每一可数子集 C,让 $\mathbf{P}(C)=\{P\in\mathbf{P}:P\cap C\neq\varnothing,P\subset U\}=<P_i(C)>$. 让 $C_0=\{x\}$,那么 $P_1(C_0)$ 不是 x 在 X 中的序列邻域,存在 $U\setminus P_1(C_0)$ 中收敛于点 x 的序列$\{x_{1n}\}$. 让 $C_1=<x_{1n}>$,因为 $\mathbf{P}$ 是 X 的 wcs * 网,存在 $n_1\in N$ 和 C_1 的无限子集 C_1' 使得 $C_1'\subset\cup\{P_i(C_j):1\leq i\leq n_1,0\leq j\leq1\}$. 不失一般性,我们可以设 $C_1'=C_1$,那么 $\cup\{P_i(C_j):1\leq i\leq n_1,0\leq j\leq1\}$ 不是 x 在 X 中的序列邻域. 继续上述的过程,对于每一 $m\in N$,可以归纳地选取 $C_m=\{x_{nm}:n\in N\}\subset U$ 和递增的序列$\{n_m\}$使得序列$\{x_{nm}\}_n$ 收敛于 x,且 $C_m\subset\cup\{P_i(C_j):1\leq i\leq n_m,1\leq j\leq m\}\setminus\cup\{P_i(C_j):1\leq i\leq n_{m-1},0\leq j\leq m-1\}$. 这说明每一 $P\in\mathbf{P}$ 仅与有限多个 C_m 相交. 让 $S=\{x\}\cup<C_m>$,则 S 是 X 在点 x 的扇. 因为 X 是 α_4 空间,S 有对角收敛于 x,从而存在 $P\in\mathbf{P}$ 使得 $P\subset U$ 且 P 与无限多个 C_m 相交,矛盾. 故 $\mathbf{P}$ 有(A),所以 X 有点可数覆盖满足(A).

$(2)\Rightarrow(1)$. 设 X 是具有点可数 cs * 网的 α_4 空间. 让 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的点可数的 cs * 网. 对于任一 $x\in U\in\tau$,置 $\mathbf{R}_x=\{\cup\mathbf{P}'_x:\mathbf{P}'_x\in(\mathbf{P})_x^{<\omega}$ 且 $\cup\mathbf{P}'_x$ 是 x 在 X 中的序列邻域$\}$. 如果 $\mathbf{R}_x$ 不是 x 在 X 中的网,那么存在 X 的开子集 G 使得 $x\in G$ 且对于每一 $F\in\mathbf{R}_x$ 有 $F\not\subset G$. 记$\{P\in\mathbf{P}_x:P\subset G\}=\langle P_i\rangle$,$F_n=\cup\{P_i:i\leq n\}$,$n\in N$. 则每一 F_n 不是 x 在 X 中的序列邻域. 因为$(\mathbf{P})_x$ 是 x 在 X 中的 cs * 网,对于每一 $i\in N$,存在 X 中收敛于 x 的序列 T_i 和 $n_i\in N$ 使得 $T_i\subset P_{n_{i+1}}\setminus F_{n_i}$ 且 $n_{i+1}>n_i$. 置 $T=\{x\}\cup<T_i>$. 那么 T 是 x 在 X 的扇. 因为 X 是 α_4 空间,T 有对角$\{x_k\}$收敛于 x,于是存在 $i\in N$ 使得 P_i 含有$\{x_k\}$的子序列$\{x_{k_m}\}$. 从而存在 $m,j\in N$ 使得 $j\geq i$ 且 $x_{k_m}\in T_j$,因些,$x_{k_m}\in P_i\cap(X\setminus F_{n_j})=\varnothing$,矛盾. 故 $\mathbf{R}_x$ 是 x 在 X 中的可数的 sn 网. 从而,存在 $\mathbf{F}\in\mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in Int_s(\cup\mathbf{F})\subset\cup\mathbf{F}\subset U$,且 $x\in\cap\mathbf{F}$. 因此,$\mathbf{P}$ 满足条件(B).

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(4) ⇒(1). 设 X 是正则空间且 $\mathbf{P}$ 是 X 的满足(A)的点可数覆盖. 对于每一 $\mathbf{F} \in \mathbf{P}^{<\omega}$,置 $M(\mathbf{F}) = \{x \in X: \cup\mathbf{F}$ 是$\{x\}$的极小序列邻域$\}$. 对于每一 $P \in \mathbf{P}$. 让 $P' = P \cup (\cup\{M(\mathbf{F}): \mathbf{F} \in \mathbf{P}^{<\omega}, P \in \mathbf{F}\})$. 那么 $P' \subset cl(P)$. 事实上,对于每一 $x \in M(\mathbf{F})$ 和 $P \in \mathbf{F}$ 有 $x \in Int_s(\cup\mathbf{F})$,而 $x \notin Int_s(\cup(\mathbf{F} \setminus \{P\}))$,于是存在 P 中收敛于点 x 的序列,因此 $x \in cl(P)$,所以 $P' \subset cl(P)$. 让 $\mathbf{P}' = \{P': P \in \mathbf{P}\}$. 对于每一 $x \in X$,置 $\mathbf{A}_x = \cup\{\mathbf{F} \in \mathbf{P}^{<\omega}: x \in M(\mathbf{F})\}$,由引理 2.1.4,仅对至多可数多个 $\mathbf{F} \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 有 $x \in M(\mathbf{F})$,所以 $\mathbf{A}_x$ 是可数的. 因为 $x \in P'$ 当且仅当 $x \in P$,或 $x \in M(\mathbf{F})$ 且 $P \in \mathbf{F}$,于是 $P \in \mathbf{A}_x$,故 $\mathbf{P}'$ 是点可数的. 对于每一 $x \in W \in \tau$,由于 X 的正则性,存在 $U \in \tau$ 使得 $x \in U \subset cl(U) \subset W$. 选取 $\mathbf{F}_0 \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $x \in Int_s(\cup\mathbf{F}_0) \subset \cup\mathbf{F}_0 \subset U$. 不妨设 $x \in M(\mathbf{F}_0)$. 让 $\mathbf{F}_0' = \{P': P \in \mathbf{F}_0\}$,那么对于每一 $P' \in \mathbf{F}_0'$ 有 $x \in P'$. 另一方面,$x \in Int_s(\cup\mathbf{F}_0') \subset \cup\mathbf{F}_0' \subset cl(\cup\mathbf{F}_0') \subset cl(U) \subset W$. 所以 $\mathbf{P}'$ 满足(B). ■

引理 2.1.6　对于空间 X,考虑下述条件:

(1) X 有点可数 cs* 网且 X 的每一紧子集是序列紧的.

(2) X 有点可数 wcs* 网且 X 的每一紧子集是序列紧的.

(3) X 有点可数 k 网.

那么(1) ⇒(2) ⇔(3). 若更设 X 是正则的 α_4 空间,那么(2) ⇒(1).

证明　显然,(1) ⇒(2). 由定义 2.1.3 及定理 2.1.1(1) 知(3) ⇒(2). 若 X 是正则的 α_4 空间,由引理 2.1.5 知(2) ⇒(1).

(2) ⇒(3). 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的点可数的 wcs* 网且 X 的每一紧子集是序列紧的. 对于 X 的紧子集 $K \subset U \in \tau$ 和 $x \in K$,记 $\mathbf{H} = \{P \in \mathbf{P}: P \subset U\}$, $(\mathbf{H})_x = \langle P_n(x) \rangle$. 若不存在 $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{<\omega}$ 使得 $K \subset \cup\mathbf{F}$,则可选取 K 中的序列$\{x_k\}$使得当 $n, j < k$ 时有 $x_k \notin P_n(x_j)$,这时每一 $P_n(x_j)$ 仅含有$\{x_k\}$的有限多项. 因为 K 是序列紧的,所以序列$\{x_k\}$存在收敛的子序列$\{x_{k_i}\}$. 设$\{x_{k_i}\}$收敛于 $a \in K$,由于 $\mathbf{P}$ 是 X 的 wcs* 网,于是存在 $P \in \mathbf{H}$ 使得 P 含有无限多个 x_{k_i},矛盾. 故存在 $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{<\omega}$ 使得 $K \subset \cup\mathbf{F}$,这说明 $\mathbf{P}$ 是 X 的 k 网. (3) 成立. ■

引理 2.1.5 和引理 2.1.6 是文[249]的主要结果,引入条件(A)和(B)的目的是想寻求从点可数 k 网到点可数 cs* 的过渡条件. 它的必要性反映在,正如本节开头所述,点可数 k 网是众多问题所关注的焦点,而点可数 cs* 网恰刻画了度量空间的伪序列覆盖的 s 映象(定理 2.0.1(1)),另一方面,这也涉及刘川[130]提出的下述问题:若具有点可数 k 网的 Fréchet 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1},那么 X 是否具有点可数的 cs* 网? 引理 2.1.6 表明,具有点可数 k 网的正则的 α_4 空间具有点可数的 cs* 网. 在对该问题的讨论中,我们意外地发现问题 2.1.2(3) 被肯定地回答. 为此,下面说明 S_2, S_ω 与弱第一可数性的关系.

定理 2.1.7　设空间 X 具有点可数 wcs* 网,那么

(1) 如果 σX 不含有闭子空间同胚于 S_2,则 σX 是 Fréchet 空间.

(2) 如果 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω,则 σX 是 gf 可数空间.

证明. 让 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的点可数 wcs* 网.

(1) 我们用反证法证明(1)成立. 设 σX 不是 Fréchet 空间. 易验证,对于空间 Z, σZ 是 Fréchet 空间当且仅当对于每一 $A \subset Z$, $cl_s(A)$ 在 σZ 中是闭的. 于是存在 X 的子集 A 使得 $cl_s(A)$ 在 σX 中不是闭的. 因为 σX 是序列空间,存在 $cl_s(A)$ 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x \in X \setminus cl_s(A)$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

不妨设 $<x_n>$ 的各项是两两互不相同的且所有的 $x_n \notin A$. 由于 X 是 T_2 空间,存在 X 中两两互不相交的开子集列 $\{V_n\}$ 使得每一 $x_n \in V_n$. 对于每一 $n \in N$,存在 $A \cap V_n$ 中的序列 $\{x_{nm}\}$ 收敛于点 x_n. 置 $C = \{x\} \cup <x_n> \cup \{x_{nm} : n, m \in N\}$,则 C 是 x 在 X 中的梳. 如果 σC 不同胚于 S_2,因为 σC 是序列空间,所以它的拓扑由收敛序列所确定,故 C 有对角. 让 $\{y_k\}$ 是 C 中收敛于某点 y 的对角. 由于 $x \notin cl_s(A)$,所以 $y \neq x$,从而对于某个 $i \in N$ 有 $y \in V_i$,于是存在 $j \in N$ 使得当 $k \geq j$ 时有 $y_k \in V_i$,这与 $\{V_n\}$ 是两两互不相交的相矛盾,故 σC 同胚于 S_2. 置 $K = \{x\} \cup <x_n>$, $\mathbf{R} = \{P \in \mathbf{P} : P \cap \{x_{nm} : n, m \in N\} \neq \varnothing, cl(P) \cap K = \varnothing\}$. 则 $\mathbf{R}$ 是可数的. 让 $\mathbf{R} = <P_k>$. 对于每一 $n \in N$,存在 $m_n \in N$ 使得 $\{x_{nm} : m \geq m_n\} \subset X \setminus \bigcup_{k \leq n} cl(P_k)$. 取 $S = K \cup \{x_{nm} : n \in N, m \geq m_n\}$. 那么 σS 同胚于 S_2. 如果 σS 不是 σX 的闭子集,存在 S 中的序列 $\{x_{n_i m_i}\}$ 收敛于 $x' \notin S$. 我们可以假设 $n_{i+1} > n_i$. 置 $K_1 = \{x'\} \cup \{x_{n_i m_i} : i \in N\}$. 那么 $K_1 \cap K = \varnothing$,存在 X 中的开集 U 使得 $K_1 \subset U \subset cl(U) \subset X \setminus K$,由于 $\mathbf{P}$ 是 X 的 wcs * 网,存在 $P \in \mathbf{P}$ 使得 $P \cap K_1$ 是无限的且 $P \subset U$,从而有 $j \in N$ 使得 $P = P_j$,由 m_n 的选取知对于每一 $n_i > j$ 有 $x_{n_i m_i} \notin P$,矛盾. 故 σS 在 σX 中是闭的,所以 σX 含有闭子空间同胚于 S_2. (1) 成立.

(2) 设 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

首先,我们证明 X 是 α_4 空间. 若 X 不是 α_4 空间,则存在 X 中的点 x 及 X 中在 x 的扇 F 使得 F 没有对角收敛于 x. 置 $F = \{x\} \cup \{x_{nm} : n, m \in N\}$, $\mathbf{R} = \{P \in \mathbf{P} : P \cap \{x_{nm} : n, m \in N\} \neq \varnothing, x \notin cl(P)\} = <P_k>$. 对于每一 $n \in N$ 存在 $m_n \in N$ 使得 $\{x_{nm} : m \geq m_n\} \subset X \setminus \bigcup_{k \leq n} cl(P_k)$. 取 $T = \{x\} \cup \{x_{nm} : n \in N, m \geq m_n\}$. 则 T 是 x 在 X 中的扇且没有对角收敛于 x. 如果存在 T 中的序列 $\{x_{n_i m_i}\}$ 收敛于 $x' \neq x$. 不妨设 $n_{i+1} > n_i$,那么存在 $P \in \mathbf{R}$ 使得 $P \cap <x_{n_i m_i}>$ 是无限的,这与 m_n 的选取相矛盾. 因此 σT 是 σX 的闭子集且同胚于 S_ω,矛盾,故 X 是 α_4 空间.

其次,证明 X 是 snf 可数空间. 对于任一 $x_0 \in X$,在 X 上作新拓扑 τ^* 如下:对于 $x \neq x_0$, $\{x\} \in \tau^*$,点 x_0 的邻域基取为原拓扑 τ 在 X 中的邻域基,那么 τ^* 是正则空间且具有点可数的 wcs * 网 $\mathbf{P} \cup \{\{x\} : x \in X\}$. τ^* 是 α_4 空间. 设 $x \in X$ 且 F 是 τ^* 在 x 的扇,那么 $x = x_0$. 由于 τ 与 τ^* 在点 x_0 有相同的收敛序列,于是 F 在 τ^* 中有对角收敛于 x,故 τ^* 是 α_4 空间. 由引理 2.1.5, τ^* 具有点可数覆盖满足条件 (B),于是 τ^* 在点 x_0 具有可数的 sn 网,从而 τ 在点 x_0 也具有可数的 sn 网,故 X 是 snf 可数空间.

最后,证明 σX 是 gf 可数空间. 对于每一 $x \in X$,设 $\{R_n\}$ 是 X 在点 x 的递减的 sn 网. 显然,每一 R_n 是 σX 在 x 的序列邻域. 若 G 是 X 中点 x 的序列邻域,如果每一 $R_n \not\subset G$,则存在序列 $\{r_n\}$ 使得每一 $r_n \in R_n \setminus G$,于是 $\{r_n\}$ 在 X 中收敛于点 x,从而 $\{r_n\}$ 是终于 G 的,矛盾. 因此,存在 $n \in N$ 使得 $R_n \subset G$. 这说明 $\{R_n\}$ 是 σX 在 x 的 sn 网. 所以 σX 是 snf 可数的序列空间,即 σX 是 gf 可数空间. ■

下述两个推论肯定地回答了问题 2.1.2.

推论 2.1.8 设 X 是具有点可数 wcs * 网的序列空间,那么

(1) X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2.

(2) X 是 gf 可数空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(3) X 是第一可数空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

若更设 X 是正则空间,那么

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(4) X 具有点可数基当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

证明　由定理 2.1.7 及 Fréchet 的 gf 可数空间是第一可数空间知(1)～(3)成立. 若更设 X 是正则空间. 如果 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 由(3), 引理 2.1.6 和定理 2.1.1(3)可得(4). ■

推论 2.1.9　(1) 空间 X 具有点可数的 sn 网当且仅当 X 具有点可数 cs 网且 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(2) 空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(3) 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是具有点可数 cs^* 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

证明　(1) 设空间 X 具有点可数的 cs 网且 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω. 由定理 2.1.7, σX 是 gf 可数空间. 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数的 cs 网, 我们证明 $\mathbf{P}$ 的某子族构成 X 的 sn 网. 对于每一 $x \in X$, 设 $< V_n >$ 是点 x 在 X 中的递减的 sn 网. 置 $\mathbf{P}_x = \{P \in \mathbf{P}$: 存在 $n \in N$ 使得 $V_n \subset P\}$. 那么 $\mathbf{P}_x$ 是点 x 在 X 中的关于有限交封闭的序列邻域族. 若 $\mathbf{P}_x$ 不是 x 在 X 中的 sn 网, 则存在 x 在 X 中的开邻域 G 使得 $\mathbf{P}_x$ 中的每一元都不含于 G 中. 记 $\{F \in \mathbf{P} : x \in F \subset G\} = < F_m >$, 那么每一 $V_m \not\subset F_m$. 取定 $x_{nm} \in V_n \setminus F_m$. 对于 $n \geq m$, 令 $y_k = x_{nm}$, 其中 $k = m + \frac{n(n-1)}{2}$, 则序列$\{y_k\}$收敛于 x, 于是存在 $m, i \in N$ 使得$\{y_k : k \geq i\} \subset F_m$. 取 $k \geq i$ 使得对于某个 $n \geq m$ 有 $y_k = x_{nm}$, 那么 $x_{nm} \in F_m$, 矛盾. 从而, $\cup\{\mathbf{P}_x : x \in X\}$是 X 的点可数的 sn 网. (1)成立.

由(1), 或推论 2.1.8(2)和定理 2.1.1(2)可得(2). 由推论 2.1.8(3)和定理 2.1.1(3)可得(3). ■

注 2.1.10　(1) Burke 和 Michael[26]证明了对于空间 X, 下述条件相互等价:

(10.1) X 有点可数基.

(10.2) X 有点可数覆盖 $\mathbf{P}$ 使得如果 $x \in U \in \tau$, 则存在 $\mathbf{F} \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 有 $x \in (\cup \mathbf{F})^0 \subset \cup \mathbf{F} \subset U$ 且 $x \in \cap \mathbf{F}$.

若更设 X 是正则空间, 则它们也等价于,

(10.3) X 是 k 空间且有点可数覆盖 $\mathbf{P}$ 使得如果 $x \in U \in \tau$, 则存在 $\mathbf{F} \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 有 $x \in (\cup \mathbf{F})^0 \subset \cup \mathbf{F} \subset U$.

然而 X 有点可数覆盖满足(B) $\not\Rightarrow$ X 有点可数 cs 网. 由文[113]的例 2.9.27, 存在具有点可数 k 网的正则的 gf 可数空间 X (于是 X 具有点可数覆盖满足(B)) 不具有点可数的 cs 网.

(2) X 有点可数 sn 网 $\not\Rightarrow$ X 有点可数 k 网; 例如极大紧化 βN.

(3) X 既有点可数覆盖满足(A)又有点可数 k 网 $\not\Rightarrow$ X 有点可数 cs^* 网. 由本文的例 4.2.3, 半园盘拓扑空间 X 是第一可数的 T_2 空间, 既有点可数覆盖满足(A)又有点可数 k 网, 但是 X 不具有点可数的 cs^* 网. 这表明引理 2.1.5、引理 2.1.6 和推论 2.1.8 中空间的正则性是必不可少的.

(4) X 有点可数 cs 网 $\not\Rightarrow$ X 有点可数覆盖满足(A); 例如序列扇 S_ω.

(5) X 有点可数 k 网 $\not\Rightarrow$ X 有点可数 cs^* 网, 或 X 有点可数覆盖满足(A); 例如空间 S_{ω_1}.

(6) X 有点可数 cs 网且不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω $\not\Rightarrow$ σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω; 例如文[119]的例 3.19 中的空间 T. ■

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

本节的内容主要取材于文[119,249]. 在材料的组织过程中对原文的结果做了一些改进,一是将文[119]中关于 k 网的条件减弱为 wcs * 网,二是利用 Nogura 和 Shibakov[175]的局部正则化技巧将文[119,249]中的几个与正则分离性条件相关的命题减弱为在 T_2 空间中成立. 但我还是有问题:具有点可数覆盖满足条件(A)的空间是否是 α_4 空间?

注 2.1.11 近来发现上述问题的回答是肯定的,即拓扑空间 X 有点可数覆盖满足(A)当且仅当 X 是具有点可数 wcs * 网的 α_4 空间. 引理 2.1.5 已证明了具有点可数 wcs * 网的 α_4 空间有点可数覆盖满足(A),而条件(A)蕴含 wcs * 网,所以只须证若空间(X,τ)有点可数覆盖 **P** 满足(A),则 X 是 α_4 空间. 对于任一 $x_0 \in X$,在 X 上作新拓扑 τ^* 如下:对于 $x \neq x_0$, $\{x\} \in \tau^*$,点 x_0 的邻域基取为原拓扑 τ 在 X 中的邻域基,那么 τ^* 是正则空间. 让 $\mathbf{P}^* = \mathbf{P} \cup \{\{x\} : x \in X\}$,则 $\mathbf{P}^*$ 在空间 (X, τ^*) 是点可数覆盖且满足(A). 事实上,设 $x \in U \in \tau^*$,若 $x \neq x_0$,则 $\{x\} \in \mathbf{P}^*$ 且 $x \in Int_{\tau^*}(\{x\}) = \{x\} \subset U$. 若 $x = x_0$,则存在 $\mathbf{P}' \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $x \in Int_{\tau}(\cup \mathbf{P}') \subset U$. 因为 $\cup \mathbf{P}'$ 是点 x 在 (X, τ) 中的序列邻域. 于是 $\cup \mathbf{P}'$ 是 (X, τ^*) 的序列开集,所以 $x \in Int_{\tau^*}(\cup \mathbf{P}') = \cup \mathbf{P}' \subset U$,故 $\mathbf{P}^*$ 有性质(A). 由引理 2.1.5(4) ⇒(1)知 (X, τ^*) 具有点可数覆盖满足(B),所以 (X, τ^*) 是 snf 可数空间,故 (X, τ) 在 x_0 是 snf 可数空间. 因此 (X, τ) 是 α_4 空间. ■

2.2 序列网与 Arhangel'skii 的问题

众所周知,空间 X 是序列空间当且仅当 X 是度量空间的商映象(见文[113]定理 2.3.6). 关于度量空间的确定的商映象,Arhangel'skii 提出下列问题,

问题 2.2.1 (1)是否每一具有权数 κ 的序列空间是某一具有权数 κ 的度量空间的商映象[208]?

(2)刻画度量空间的商 s 映象[5].

问题(1)是 Svetlichny 在文[208]中介绍的由 Arhangel'skii 在莫斯科拓扑学会议上提出的问题. Svetlichny[208]利用集论公理(MA + ¬CH)否定了该问题,并由此引入了序列基(本节重新定义为序列拟基,见定义 2.2.2)的概念,证明了对于任意基数 κ,空间 X 是具有权数 κ 的度量空间的商映象当且仅当 X 是具有基数 κ 的序列基,给出了与问题 2.2.1(1)相关的具有确定权数的度量空间商映象的内在特征. 问题 2.2.1(2)是 Arhangel'skii[5]在名著"Mappings and spaces"中提出的,Hoshina[86],Gruenhage,Michael 和 Tanaka[82]都曾给出它的解,Tanaka 在文[213]中用具有点可数的 cs * 网的序列空间给出较好的回答. 由此可见,序列基及 cs * 网的共同作用之一在于刻画度量空间的确定的商映象. 受此启发,可以推测序列基与 cs * 网这两个概念之间一定存在着某种必然的联系.

本节引入了序列网的概念,建立了它与序列基,cs * 网之间的较为精确的关系,证明了在一定条件下一个空间的序列基与 cs * 网是相互等价的,进而获得了具有确定权数的度量空间的序列商映象以及度量空间的序列商 s 映象的刻画,利用序列网的概念回答了 Arhangel'skii 提出的寻求确定权数的度量空间的商映象以及度量空间的商 s 映象的问题 2.2.1,深化了 Svetlichny 和 Tanaka 的已有结果. 本节的内容主要取材于文[124]. 对于空间 X 的子集族 **P**,记 $\mathbf{P}^{\omega}$ 为 **P** 的 ω 次积.

定义 2.2.2[124] 对于空间 X,设 X 的子集族 **P** 满足对于每一 $x \in X$ 存在 $\mathbf{P}_x \subset \mathbf{P}^{\omega}$ 具有性质:如果 $(P_n) \in \mathbf{P}_x$,那么 $< P_n >$ 是 x 在 X 中的递减的网. 简记为 $\mathbf{P} \approx \cup\{\mathbf{P}_x : x \in X\}$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(1) **P** 称为 X 的序列网,如果 $P\subset X$ 且对于任意的 $x\in P$, $(P_n)\in \mathbf{P}_x$ 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$,则 P 是 X 的序列开集.

(2) **P** 称为 X 的序列拟基,如果 $P\subset X$ 且对于任意的 $x\in P$, $(P_n)\in \mathbf{P}_x$ 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$,则 P 是 X 的开集.

(3) **P** 称为 X 的 Fréchet 拟基,如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的 $(P_n)\in \mathbf{P}_x$ 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$,则 P 是 x 在 X 中的邻域.

我们之所以将满足条件(1)的集族定义为序列网是因为对于任意的空间 X, X 的收敛序列的全体组成的集族构成了 X 的网且满足条件(1). 序列拟基在文[208]中称之为序列基,由于 P 的元一般不是 X 的开集,所以我们改称"拟基"而不用"基". Fréchet 拟基是仿照序列拟基及 Fréchet 空间命名的. 事实上,序列拟基与 Fréchet 拟基的概念都源于 Sirois-Dumais[199]定义的弱拟第一可数空间与拟第一可数空间. 沿用定义 2.2.2 的术语与记号,设 $\mathbf{P}\approx\bigcup\{\mathbf{P}_x: x\in X\}$,称空间 X 是弱拟第一可数的(拟第一可数的),如果 X 具有序列拟基(Fréchet 拟基) **P** 使得每一 $\mathbf{P}_x$ 是可数的. 定义这两类空间的目的是作为第一可数空间的推广将它们表示为度量空间的确定的商映象.

我们先建立定义 2.2.2 中的几个概念之间的简单联系. 显然,对于空间 X 的子集族 **P**, **P** 是 X 的第一可数基 ⇒**P** 是 X 的 Fréchet 拟基 ⇒**P** 是 X 的序列拟基 ⇒**P** 是 X 的序列网.

引理 2.2.3　对于空间 X 的子集族 **P**. 设 $\mathbf{P}\approx\bigcup\{\mathbf{P}_x: x\in X\}$,那么 **P** 是 X 的序列网当且仅当如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的 $(P_n)\in \mathbf{P}_x$ 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$,则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

证明　只须证必要性. 设 $\mathbf{P}\approx\bigcup\{\mathbf{P}_x: x\in X\}$ 是空间 X 的序列网. 如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的 $(P_n)\in \mathbf{P}_x$ 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$,往证 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x,假设存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得所有的 $x_{n_i}\notin P$. 让 $Q = X\setminus\langle x_{n_i}\rangle$,易验证,对于任意的点 $z\in Q$, $(P_n)\in \mathbf{P}_z$ 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset Q$,于是 Q 是 X 的序列开集,这与 $\{x_n\}$ 收敛于 $x\in Q$ 相矛盾. 因此,存在 $\{x_n\}$ 的子序列含于 P 中,从而 P 是 x 的序列邻域. ■

引理 2.2.4　(1) 空间 X 是序列空间当且仅当 X 具有序列拟基.

(2) 空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 具有 Fréchet 拟基.

证明　易验证,空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 中每一点的序列邻域是该点在 X 中的邻域. 设 X 是序列(Fréchet)空间,让 **P** 是 X 的所有收敛序列组成的集族,则 **P** 是 X 的序列(Fréchet)拟基. 反之,设 $\mathbf{P}\approx\bigcup\{\mathbf{P}_x: x\in X\}$ 是 X 的序列(Fréchet)拟基. 如果 X 的子集 P 是 X 的序列开集且 $x\in P$(点 x 在 X 中的序列邻域),对于任意的 $(P_n)\in \mathbf{P}_x$,若存在 X 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in P_n\setminus P$,因为 $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中的网,所以序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x,这与 P 是 x 的序列邻域相矛盾,因而存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$,于是 P 是 X 的开集(x 在 X 中的邻域),故 X 是序列(Fréchet)空间. ■

推论 2.2.5　(1) **P** 是空间 X 的序列拟基当且仅当 X 是序列空间且 **P** 是 X 的序列网.

(2) **P** 是空间 X 的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是 Fréchet 空间且 **P** 是 X 的序列网. ■

其次,我们着重讨论序列网与 cs*网之间较为精细的联系. 先叙述文[113]引理 2.7.4 中关于点可数 cs*网的一个性质.

引理 2.2.6　设 **P** 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs*网. 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x,则存在 **P** 的有限子集列 $\{\mathbf{P}_n\}$ 满足:

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(6.1) 对于每一 $n \in N$, $< x_n > \subset \cup \mathbf{P}_n$ 且 $\mathbf{P}_{n+1}$ 加细 $\mathbf{P}_n$.

(6.2) 若 $x \in P_n \in \mathbf{P}_n$, 则 $< P_n >$ 是 x 在 X 中的网.

(6.3) 对于某一 $P' \in \mathbf{P}_k$, 若 P' 含有 $\{x_n\}$ 的子序列, 则 $x \in P'$. ■

定理 2.2.7[124] (1) 若 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的序列网, 则 $\mathbf{P}$ 是 X 的 cs*网.

(2) 若 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs*网, 则 $\mathbf{P}$ 是 X 的序列网.

证明 (1) 让 $\mathbf{P} \approx \cup\{\mathbf{P}_x : x \in X\}$ 是空间 X 的序列网. 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x 且 G 是 x 在 X 中的开邻域, 因为 $\mathbf{P}$ 是 X 的网, 不妨设所有的 $x_n \neq x$. 置 $H = G \setminus < x_n >$, 则 H 不是 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 2.2.3, 存在 $(P_n) \in \mathbf{P}_x$ 使得对于任意的 $n \in N$ 有 $P_n \not\subset H$, 并且存在 $m_0 \in N$ 使得 $P_{m_0} \subset G$. 对于每一 $k \geq m_0$, 记 $Q_k = P_k \cap < x_n >$, 那么 $Q_k \neq \varnothing$. 若有 $k_0 \geq m_0$ 使得 Q_{k_0} 是一有限集, 则存在 $m_1 > k_0$ 使得 $P_{m_1} \subset X \setminus Q_{k_0}$, 于是 $Q_{m_1} = \varnothing$, 矛盾. 从而当 $k \geq m_0$ 时, Q_k 为无限集. 因此, P_{m_0} 含有 $\{x_n\}$ 的子序列且 $P_{m_0} \subset G$, 故 $\mathbf{P}$ 是 X 的 cs*网.

(2) 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs*网. 对于每一 $x \in X$, 置 $\mathbf{P}_x = \{(P_n) \in \mathbf{P}^{\omega} : < P_n >$ 是点 x 在 X 中的递减的网$\}$, 则 $\mathbf{P}_x \neq \varnothing$. 设 $x \in P \subset X$, 如果对于任意的 $(P_n) \in \mathbf{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 往证 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x, 不妨设所有的 $x_n \neq x$. 由引理 2.2.6, 存在 $\mathbf{P}$ 的有限子集列 $\{\mathbf{P}_n\}$ 满足条件 (6.1) ～ (6.3). 记 $\mathbf{P}_n' = \{P' \in \mathbf{P}_n : P'$ 含有 $\{x_n\}$ 的子序列$\}$, 那么 $\mathbf{P}_n'$ 非空且 $\mathbf{P}_{n+1}'$ 加细 $\mathbf{P}_n$, 由文 [102] 引理 37.4 (Köing 引理), 对于每一 $n \in N$ 存在 $P_n \in \mathbf{P}_n'$ 使得 $P_{n+1} \subset P_n$. 这时 $x \in P_n$, 从而 $(P_n) \in \mathbf{P}_x$, 于是存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$. 故存在 $\{x_n\}$ 的子序列含于 P 中, 所以 P 是 x 的序列邻域. 由引理 2.2.3, $\mathbf{P}$ 是 X 的序列网. ■

定理 2.2.7 引出的问题是: 若 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的 cs*网, 那么 $\mathbf{P}$ 是否是 X 的序列网? 下面说明该问题的回答是否定的.

定理 2.2.8[124] 空间 X 是第一可数空间当且仅当若 $\mathbf{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的 cs*网, 则 $\mathbf{P}$ 是 X 的序列网.

证明 设 X 是第一可数空间, $\mathbf{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的 cs*网. 对于每一 $x \in X$, 设 x 在 X 中的递减的可数局部基为 $< V_{x,n} >$. 置 $\mathbf{P}_x = \{(P_n) \in \mathbf{P}^{\omega} : x \in P_{n+1} \subset P_n \subset V_{x,n}\}$. 则 $\mathbf{P}_x \neq \varnothing$ 且对于任意的 $(P_n) \in \mathbf{P}_x$, $< P_n >$ 是点 x 在 X 中的递减的网, 往证 $\mathbf{P} \approx \cup\{\mathbf{P}_x : x \in X\}$ 是 X 的序列网. 如果 $x \in P \subset X$ 且对于任意的 $(P_n) \in \mathbf{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 不妨设所有的 $x_n \neq x$ 且 $< x_n > \subset V_{x,1}$. 由于 $\mathbf{P}$ 是 X 的 cs*网, 存在 $Q_1 \in \mathbf{P}$ 和 $\{x_n\}$ 的无限子集 Z_1 使得 $cl(Z_1) \subset Q_1 \cap V_{x,2} \subset V_{x,1}$, 于是又存在 $Q_2 \in \mathbf{P}$ 和 Z_1 的无限子集 Z_2 使得 $cl(Z_2) \subset Q_2 \cap V_{x,3} \subset V_{x,2}$, …: 因此, 我们可归纳地构造 $< x_n >$ 的无限子集列 $\{Z_n\}$ 以及 $(Q_n) \in \mathbf{P}^{\omega}$ 使得对于每一 $n \in N$ 有 $cl(Z_{n+1}) \subset cl(Z_n) \subset Q_n \cap V_{x,n+1} \subset V_{x,n}$. 令 $P_n = \cap_{i \leq n} Q_i$, 则 $(P_n) \in \mathbf{P}_x$, 那么存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 从而 $cl(Z_m) \subset P$, 所以 P 是点 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 2.2.3, $\mathbf{P}$ 是 X 的序列网.

反之, 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的基, 则 $\mathbf{P}$ 是 X 的 cs*网, 于是 $\mathbf{P}$ 是 X 的序列网. 由定义 2.2.2, X 的每一点具有可数的局部基, 所以 X 是第一可数空间. ■

设 X 是任意的非第一可数的拓扑空间, 由定理 2.2.8, X 的拓扑是 X 的 cs*网, 但它不是 X 的序列网.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

本节的最后一部分利用上面获得的序列网的性质给出度量空间的确定商映象一些新刻画,特别地,刻画了度量空间的序列商映象以及度量空间的序列商 s 映象.

引理 2.2.9　设 $f: X \to Y$ 是序列商映射. 若 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的序列网,则 $f(\mathbf{P})$ 是空间 Y 的序列网.

证明　设 $\mathbf{P} \approx \cup\{\mathbf{P}_x : x \in X\}$. 对于每一 $y \in Y$,记 $\mathbf{R}_y = \{(f(P_n)) : (P_n) \in \mathbf{P}_x, x \in f^{-1}(y)\}$,则 $\mathbf{R}_y \in f(\mathbf{P})^{\omega}$. 由于 f 的连续性,如果 $< P_n >$ 是点 x 在 X 中的递减的网,则 $< f(P_n) >$ 是点 $f(x)$ 在 Y 中的递减的网. 设 $R \subset Y$ 且对于任意的 $y \in R$, $(R_n) \in \mathbf{R}_y$ 存在 $m \in N$ 使得 $R_m \subset R$,那么对于任意的 $x \in f^{-1}(R)$, $(P_n) \in \mathbf{P}_x$,有 $f(x) \in R$ 且 $(f(P_n)) \in \mathbf{R}_{f(x)}$,所以存在 $m \in N$ 使得 $f(P_m) \subset R$,于是 $P_m \subset f^{-1}(R)$,因而 $f^{-1}(R)$ 是 X 的序列开集. 因为 f 是序列商映射,故 R 是 Y 的序列开集,所以 $f(\mathbf{P})$ 是 Y 的序列网. ■

定理 2.2.10[124]　对于任意基数 κ 及任意空间 X, X 具有基数 κ 的序列网当且仅当 X 是具有权数 κ 的度量空间的序列商映象.

证明　由引理 2.2.9,只须证必要性. 不妨设 $\kappa \geq \omega$. 设 $\mathbf{P} \approx \cup\{\mathbf{P}_x : x \in X\}$ 是空间 X 的基数为 κ 的序列网. 对于每一 $x \in X$,记 $\mathbf{R}_x = \{(R_n) \in \mathbf{P}^{\omega}$: 存在 $(P_n) \in \mathbf{P}_x$ 和 $i \in N$ 使得当 $n \geq i$ 时 $R_n = P_n$ 且 $\{x\} \in \bigcap_{n<i} R_n\}$. 再记 $\mathbf{P} = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 对于每一 $n \in N$,让 Λ_n 是集合 Λ 赋予离散拓扑的空间. 定义 $M = \{\beta = (\alpha_n) \in \prod_{n \in N} \Lambda_n$: 存在 $x(\beta) \in X$ 使得 $(P_{\alpha_n}) \in \mathbf{R}_{x(\beta)}\}$. 则 M 是权数不超过 κ 的度量空间,并且对于每一 $\beta \in M$, $x(\beta)$ 是唯一确定的,于是可以定义函数 $f: M \to X$ 使得 $f(\beta) = x(\beta)$. 显然, f 是满函数. 设 P 是 X 的开集并且 $f((\alpha_n)) \in P$,那么存在 $m \in N$ 使得 $P_{\alpha_m} \subset P$. 置 $\Gamma = \{\beta \in M : \beta$ 的第 m 个坐标是 $\alpha_m\}$. 则 Γ 是 M 的开集, $(\alpha_n) \in \Gamma$ 且 $f(\Gamma) \subset P_{\alpha_m} \subset P$,于是 f 是连续函数. 如果 $P \subset X$ 且 $f^{-1}(P)$ 是 M 的序列开集,对于任意的 $x \in P$, $(P_{\alpha_n}) \in \mathbf{P}_x$,有 $(\alpha_n) \in f^{-1}(P)$. 因为 $f^{-1}(P)$ 是 M 的开集,存在 $\prod_{n \in N} \Lambda_n$ 的基本开集 $\prod_{n \in N} \Gamma_n$ 使得 $(\alpha_n) \in M \cap \prod_{n \in N} \Gamma_n \subset f^{-1}(P)$. 不妨设当 $n \leq m$ 时 $\Gamma_n = \{\alpha_n\}$,当 $n > m$ 时 $\Gamma_n = \Lambda_n$. 对于 $y \in P_{\alpha_m}$,取定 $(\mathbf{P}_{\gamma_n}) \in \mathbf{P}_y$,定义 $\gamma = (\tilde{\gamma}_n) \in \prod_{n \in N} \Lambda_n$ 使得当 $n \leq m$ 时 $\tilde{\gamma}_n = \alpha_n$,当 $n > m$ 时 $\tilde{\gamma}_n = \gamma_n$,那么 $(P_{\tilde{\gamma}_n}) \in \mathbf{R}_y$,从而 $\gamma \in M \cap \prod_{n \in N} \Gamma_n$,于是 $y = f(\gamma)$,故 $P_{\alpha_m} \subset f(M \cap \prod_{n \in N} \Gamma_n) \subset P$,所以 P 是 X 的序列开集,因此 f 是序列商映射.

以上我们证明了 X 是权数不超过 κ 的度量空间 M 的序列商映象,从而 X 也是与 M 同胚的 κ 个空间的拓扑和的序列商的映象,故 X 是权数 κ 的度量空间的序列商的映象. ■

推论 2.2.11[208]　对于任意基数 κ 及任意空间 X, X 具有基数 κ 的序列拟基当且仅当 X 是具有权数 κ 的度量空间的商映象. ■

由定理 2.2.7 及定理 2.0.1(1),我们可利用序列网给出问题 2.2.1(2) 的另一个解.

定理 2.2.12[124]　对于空间 X,下述条件相互等价:

(1) X 具有点可数的序列网.

(2) X 具有点可数的 cs* 网.

(3) X 是度量空间的序列商的 s 映象. ■

推论 2.2.13　(1) 空间 X 具有点可数的序列拟基当且仅当 X 是度量空间的商 s 映象.

(2) 空间 X 具有点可数的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映象. ■

2.3　紧有限分解网与 Michael-Nagami 的问题

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

Michael *和* Nagami *在文*[158]*中对于度量空间的紧覆盖映射进行了系统的研究, 证明了空间* X **是度量空间的开 s 映象当且仅当** X **是度量空间的紧覆盖开 s 映象, 提出了下述问题,**

问题 2.3.1　**度量空间的商 s 映象是否也是度量空间的紧覆盖的商 s 映象?**

从文献[32, 41～42, 82, 100, 122, 157]**可见, 问题** 2.3.1 **诱导了紧覆盖映射、序列覆盖映射、诱导完备映射等映射理论, 点可数覆盖理论, 集论拓扑等课题的发展, 现已成为一般拓扑学的著名问题而激发很多有趣的工作. 毫无疑问, 寻求度量空间的紧覆盖商 s 映象与度量空间的商 s 映象的内在特征并试图证明它们的等价性是回答问题的路径之一.** Gruenhage, Michael **和** Tanaka[82]**证明了度量空间的商 s 映象是度量空间的伪序列覆盖的商 s 映象(见定理** 2.0.1(1)), **而** Tanaka[213]**利用** cs* **网的概念使** Arhangel'skii **提出的度量空间的商 s 映象的刻画问题(见问题** 2.2.1(2))**得以完满解决(见定理** 2.0.1(5)), **但是度量空间的紧覆盖 s 映象的刻画问题更加困难. 利用简洁的闭 k 网和 cs 网的概念可构造度量空间的紧覆盖 s 映象, 刘川和戴牧民**[140]**引入强 k 网的概念(见定义** 2.3.3(2))**给出了度量空间的紧覆盖 s 映象的第一个刻画, 相关的结果有,**

定理 2.3.2　(1) **具有点可数闭 k 网的空间是度量空间的紧覆盖的 s 映象**[155].

(2) **具有点可数 cs 网且每一紧子集可度量化的空间是度量空间的紧覆盖的 s 映象**[115].

(3) **空间** X **是度量空间的紧覆盖的 s 映象当且仅当** X **具有点可数的强 k 网**[140]. ■

但强 k 网因形式较为复杂难以进一步发挥作用, 而闭 k 网和 cs 网的条件又都严格强于 Michael-Nagami **问题中所需要的集族性质, 所以用弱于闭 k 网和 cs 网且较为简单的概念来代替强 k 网应是解决** Michael-Nagami **问题的方向之一. 为此, 燕鹏飞在文**[248]**中引入了紧有限分解网的概念作为闭 k 网、cs 网和强 k 网的深化, 本节证明了一个空间是度量空间的紧覆盖 s 映象当且仅当它是具有点可数的紧有限分解网的空间, 这不仅仅给出了度量空间的紧覆盖商 s 映象的一个较为简单的内在刻画, 同时可导出近年来关于度量空间的 s 映象研究方面的系列结论, 而且为最终解决** Michael-Nagami **问题提供了有效的途径.**

定义 2.3.3　**设** K **是空间** X **的紧子集. 由** K **的闭子集组成的** K **的有限覆盖称为** K **的紧有限分解. 若** K **在** X **中的有限覆盖** $\mathbf{F}$ **存在** K **的紧有限分解一一加细, 则称** $\mathbf{F}$ **是** K **的** *CFP* **覆盖**[242].

设 $\mathbf{P}$ **是空间** X **的覆盖.**

(1) $\mathbf{P}$ **称为** X **的紧有限分解**[242], **若对于** X **中的每个紧子集** K, **存在** $\mathbf{P}'\in\mathbf{P}^{<\omega}$ **使得** $\mathbf{P}'$ **是** K **的** *CFP* **覆盖.**

(2) $\mathbf{P}$ **称为** X **的强 k 网**[140], **若对于** X **中的每个紧子集** K, **存在** $\mathbf{P}$ **的可数子族** $\mathbf{P}(K)$ **满足: 对于** K **的任意紧子集** L **及** X **中包含** L **的开集** V, **存在** $\mathbf{P}'\in\mathbf{P}(K)^{<\omega}$ **使得** $\mathbf{P}'$ **是** L **的** *CFP* **覆盖且** $\cup\mathbf{P}'\subset V$.

(3) $\mathbf{P}$ **称为** X **的紧有限分解网**[248], **若对于** X **中的每个紧集** K **及包含** K **的开集** V, **存在** $\mathbf{P}'\in\mathbf{P}(K)^{<\omega}$ **使得** $\mathbf{P}'$ **是** K **的** *CFP* **覆盖且** $\cup\mathbf{P}'\subset V$.

显然, 空间的闭 k 网或强 k 网都是紧有限分解网. 为进一步说明它们之间的关系, 下述主要由燕鹏飞证明的点可数覆盖的 *CFP* **性质是我们理解紧有限分解网的关键, 它与著名的** Miščenko[162]**引理类似.**

引理 2.3.4[248]　**如果** $\mathbf{P}$ **是空间** X **的点可数覆盖, 那么** X **的每一非空紧子集仅有至多可**

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

数多个由 **P** 的元组成的极小 *CFP* 覆盖.

证明　设 K 是空间 X 的非空紧子集且 $\{\mathbf{P}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是由 **P** 的元组成的 K 的极小 *CFP* 覆盖全体. 若引理不成立, 则存在 $n\in N$ 使得集族 $\mathbf{R}=\{\mathbf{P}_\alpha:\alpha\in A, |\mathbf{P}_\alpha|=n\}$ 是不可数的. 对于 $P\in\mathbf{P}$, 令 $\mathbf{R}(P)=\{\mathbf{P}_\alpha: P\in\mathbf{P}_\alpha\in\mathbf{R}\}$. 取 $x_1\in K$, 则 $\mathbf{R}=\cup\{\mathbf{R}(P): x_1\in P\in\mathbf{P}\}$. 由于 **P** 是点可数的, 于是存在 $P\in\mathbf{P}$ 使得 $x_1\in\mathbf{P}_1$ 且满足 $|\mathbf{R}(P_1)|>\omega$. 若 $n=1$, 则 $|\mathbf{R}(P_1)|=1$, 矛盾, 故 $n>1$. 设 $\mathbf{R}(P_1)=\{\mathbf{P}_\alpha:\alpha\in A_1\}$, 其中每一 $\mathbf{P}_\alpha=\{\mathbf{P}_{\alpha i}: i\le n\}$ 被 K 的紧有限分解 $\mathbf{F}_\alpha=\{\mathbf{F}_{\alpha i}: i\le n\}$ 一一加细且 $P_{\alpha 1}=P_1$. 我们先证明 $\{\cup_{2\le i\le n}F_{ai}: a\in A_1\}$ 具有有限交性质. 任取 $\{\mathbf{F}_\alpha:\alpha\in A_1\}$ 的有限子族 $\{\mathbf{F}_{\beta_j}: j\le m\}$, 则有 $\cup_{j\le m}\mathbf{F}_{\beta_j1}\subset P_1$, 由于 $\mathbf{P}_{\beta_j}$ 是 K 的极小 *CFP* 覆盖, 因而存在 $x\in K\setminus\cup_{j\le m}\mathbf{F}_{\beta_j1}$, 故 $x\in\cap_{j\le m}(\cup_{2\le i\le n}F_{\beta_j i})$, 所以集族 $\{\cup_{2\le i\le n}F_{ai}: a\in A_1\}$ 具有有限交性质, 于是它具有非空的交. 取 $x_2\in\cap_{a\in A_1}(\cup_{2\le i\le n}F_{ai})$. 令 $\mathbf{R}(P_1,P)=\{\mathbf{P}_\alpha: P\in\mathbf{P}_\alpha\in\mathbf{R}(P_1)\}$, 则 $\mathbf{R}(P_1)=\cup\{\mathbf{R}(P_1,P): x_2\in P\in\mathbf{P}\}$. 事实上, 任取 $\mathbf{P}_a\in\mathbf{R}(P_1)$, 由于 $x_2\in\cup_{2\le i\le n}F_{ai}$, 存在 $i_o>1$ 使得 $x_2\in F_{ai_o}\subset P_{ai_o}$, $P_{ai_o}\ne P_1$ 且 $\mathbf{P}_a\in\mathbf{R}(\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_{ai_o})$. 因此, 存在 $P_2\in\mathbf{P}$ 使得 $x_2\in P_2$, $P_2\ne P_1$ 且 $|\mathbf{R}(P_1,P_2)|>\omega$. 重复上述过程可得到点集 $\{x_i\}_{i\le n}$ 及集族 $\{P_i\}_{i\le n}$ 满足: 每一 $x_i\in P_i\in\mathbf{P}$, 当 $i\ne j$ 时 $P_i\ne P_j$ 且 $|\mathbf{R}(P_1,P_2,\cdots,P_n)|>\omega$, 但是 $|\mathbf{R}(P_1,P_2,\cdots,P_n)|=1$, 矛盾. 故, 由 **P** 的元组成的 K 的极小 *CFP* 覆盖至多是可数的. ■

下面几个引理说明紧有限分解网与 cs 网、强 k 网的关系.

引理 2.3.5　若空间 X 的每一紧子集是序列紧的, 则 X 的点可数 cs 网也是 X 的紧有限分解网.

证明　设 **P** 是空间 X 的点可数 cs 网, K 是 X 的紧子集, V 是 X 中包含 K 的开子集. 由引理 2.1.6 和定理 2.1.1(1), K 是第一可数的. 对于每一 $x\in K$, 设 $<V_n>$ 是点 x 在 K 中的递减的局部基. 置 $\mathbf{F}=\{P\cap K: P\in\mathbf{P}, P\subset V$ 并且存在 $n\in N$ 使得 $V_n\subset P\cap K\}$. 那么 **F** 是点 x 在 K 中的邻域族. 由推论 2.1.9(1) 所证, **F** 是 x 在 K 中的网, 从而 F 是 x 在 K 中的邻域基. 于是存在 $F\in\mathbf{F}$ 使得 $x\in Int_K(F)$, 即存在 $P_x\in\mathbf{P}$ 使得 $x\in Int_K(P_x\cap K)\subset P_x\subset V$, 从而存在 K 的开子集 V_x 使得 $x\in V_x\subset cl(V_x)\subset Int_K(P_x\cap K)$. 这时 K 的开覆盖 $\{V_x: x\in K\}$ 存在有限的子覆盖 $\{V_{x_i}: i\le n\}$, 于是 $K=\cup\{cl(V_{x_i}): i\le n\}$ 且每一 $cl(V_{x_i})\subset P_{x_i}$. 让 $\mathbf{P}'=\{P_{x_i}: i\le n\}$, 则 $\mathbf{P}'\in\mathbf{P}^{<\omega}$, $\mathbf{P}'$ 是 K 的 *CFP* 覆盖且 $\cup\mathbf{P}'\subset V$, 故 **P** 是 X 的紧有限分解网. ■

引理 2.3.6　设 **P** 是空间 X 的点可数覆盖, 若 **P** 是 X 的紧有限分解网, 则 **P** 也是 X 的强 k 网.

证明　设 K 是 X 的非空紧子集. 由引理 2.3.4, 记由 **P** 的元组成的 K 的极小 *CFP* 覆盖族为 $\mathbf{F}=<\mathbf{P}_i>$, 则 $\mathbf{P}(K)=\cup\mathbf{F}$ 是 **P** 的可数子集族. 对于 K 的任意非空紧子集 L 及 X 中包含 L 的开集 V, 存在 L 在 K 中的开邻域 W 使得 $cl_K(W)\subset V$, 于是存在 $\mathbf{P}'\in\mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathbf{P}'$ 是 $cl_K(W)$ 的 *CFP* 覆盖且 $\cup\mathbf{P}'\subset V$. 由于紧集 $K\setminus W\subset X\setminus L$, 又存在 $\mathbf{P}''\in\mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathbf{P}''$ 是 $K\setminus W$ 的 *CFP* 覆盖且 $\cup\mathbf{P}''\subset X\setminus L$. 令 $\mathbf{P}^*=\mathbf{P}'\cup\mathbf{P}''$, 则 $\mathbf{P}^*$ 是 K 的 *CFP* 覆盖, 从而存在 $k\in N$ 使得 $\mathbf{P}_k\subset\mathbf{P}^*$. 设 $\mathbf{P}_k=\{\mathbf{P}_i: i\le n\}$ 被 K 的紧有限分解 $\{F_i: i\le n\}$ 一一加细, 让 $\mathbf{R}=\{P_i\in\mathbf{P}_k: F_i\cap L\ne\emptyset\}$, 那么 **R** 是 L 的 *CFP* 覆盖且 $\cup\mathbf{R}\subset V$, 所以 **P** 是 X 的强 k 网. ■

引理 2.3.7　具有点可数的紧有限分解网的空间是度量空间的紧覆盖 s 映象.

证明　设 **P** 是空间 X 的点可数的紧有限分解网. 记 $\mathbf{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, Λ 赋予离散拓扑, 令 $M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^\omega: <P_{\alpha_i}>$ 构成某点 x_α 在 X 中的网$\}$. 则 M 是度量空间, 并且对于每一

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$\alpha \in M$, x_α 是唯一确定的, 于是可以定义函数 $f: M \to X$ 使得 $f(\alpha) = x_\alpha$. 容易验证, f 是从 M 到 X 上的 s 映射, 下面证明 f 是紧覆盖映射.

设 K 的 X 的非空紧子集. 由引理 2.3.4, 记由 **P** 的元组成的 K 的极小 CFP 覆盖族为 $\mathbf{F} = \langle \mathbf{P}_i \rangle$, 其中每一 $\mathbf{P}_i = \{P_\alpha: \alpha \in \Lambda_i\}$ 被 K 的紧有限分解 $\mathbf{F}_i = \{F_\alpha: \alpha \in \Lambda_i\}$ 一一加细. 置 $L = \{(\alpha_i) \in \Pi_{i \in N}\Lambda_i: \cap_{i \in N} F_{\alpha_i} \neq \varnothing\}$. 那么

(7.1) L 是紧子集 $\Pi_{i \in N}\Lambda_i$ 的闭子集, 从而 L 是 Λ^ω 的紧子集.

设 $\alpha = (\alpha_i) \in \Pi_{i \in N}\Lambda \setminus L$, 则 $\cap_{i \in N} F_{\alpha_i} \neq \varnothing$, 从而存在 $i_o \in N$ 使得 $\cap_{i \leq i_o} F_{\alpha_i} \neq \varnothing$, 令 $W = \{(\beta_i) \in \Pi_{i \in N}\Lambda_i: \forall i \leq i_o, \beta_i = \alpha_i\}$, 则 W 是 $\Pi_{i \in N}\Lambda_i$ 中含有点 α 的开集且 $W \cap L = \varnothing$ (7.1)成立.

(7.2) $L \subset M$ 且 $f(L) \subset K$.

设 $\alpha = (\alpha_i) \in L$. 取定 $x \in \cap_{i \in N} F_{\alpha_i}$, 如果我们证明了 $\langle P_{\alpha_i} \rangle$ 是点 x 在 X 中的网, 那么 $\alpha \in M$ 且 $f(\alpha) = x \in K$, 于是有 $L \subset M$ 且 $f(L) \subset K$. 设 V 是 x 在 X 中的开邻域, 则存在 x 在 K 中的开邻域 W 使 $cl_K(W) \subset V$, 于是存在 $\mathbf{P}' \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathbf{P}'$ 是 $cl_K(W)$ 的 CFP 覆盖且 $\cup \mathbf{P}' \subset V$. 由于紧集 $K \setminus W \subset X \setminus \{x\}$, 又存在 $\mathbf{P}'' \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathbf{P}''$ 是 $K \setminus W$ 的 CFP 覆盖且 $\cup \mathbf{P}'' \subset X \setminus \{x\}$. 令 $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}' \cup \mathbf{P}''$, 则 $\mathbf{P}^*$ 是 K 的 CFP 覆盖, 于是存在 $k \in N$ 使得 $\mathbf{P}_k \subset \mathbf{P}^*$. 因为 $x \in F_{\alpha_i} \subset P_{\alpha_k} \in \mathbf{P}_k$, 所以 $P_{\alpha_k} \in \mathbf{P}'$, 故 $P_{\alpha_k} \subset V$, 从而 $\langle P_{\alpha_i} \rangle$ 是点 x 在 X 中的网.

(7.3) $K \subset f(L)$.

设 $x \in K$, 对于每一 $i \in N$, 存在 $\alpha_i \in \Lambda_i$ 使得 $x \in F_{\alpha_i}$, 令 $\alpha = (\alpha_i)$, 则 $\alpha \in L$ 且由(7.2)所证知 $f(\alpha) = x$, 因此 $K \subset f(L)$.

综上所述, f 是紧覆盖 s 映射. ■

由引理 2.3.7 和引理 2.3.5 立刻可得到定理 2.3.2 的(1)和(2).

定理 2.3.8[248] 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖 s 映象.

(2) X 具有点可数的紧有限分解网.

(3) X 具有点可数的强 k 网.

证明 由引理 2.3.6 和引理 2.3.7 知(3) $\Leftrightarrow$(2) $\Rightarrow$(1). 设空间 X 是度量空间 M 在紧覆盖 s 映射 f 下的象. 由定理 1.2.8, 让 **P** 是 M 的 σ 局部有限基, 则 **P** 是 M 的紧有限分解网. 由于 f 是紧覆盖的 s 映射, 于是 f(**P**) 是空间 X 的点可数的紧有限分解网. 故(1) $\Rightarrow$(2). ■

推论 2.3.9 (1) 空间 X 是度量空间的紧覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数的紧有限分解网的 k 空间.

(2) 空间 X 是度量空间的紧覆盖, 序列覆盖的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 cs 网且 X 的每一紧子集可度量化.

证明 由定理 2.3.8 和引理 1.2.4(1)可得到(1), 由定理 2.0.1(2)、引理 2.3.5 和引理 2.3.7 可得到(2). ■

本节的结果主要取材于文[248], 部分取自文[115, 133]. 燕鹏飞在文[242]中为获得度量空间的紧覆盖的紧映象的刻画引入了紧有限分解的概念. 1997 年初我在读燕鹏飞寄给我的文[242]的手稿后与燕鹏飞谈到是否可参考刘川与戴牧民[140]关于度量空间的紧覆盖的 s 映象的工作, 利用紧有限分解建立度量空间的紧覆盖的 s 映象的较简单的内在特征? 1997 年 6 月燕

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

鹏飞基本上证明了定理 2.3.8, 于是在 1997 年 7 月的金华国际拓扑学学术会议期间, 我们就有了文[248]的第一个原稿. 从定理 2.3.8, 很自然的问题是, 空间的点可数的紧有限分解网是否就是强 k 网? 我在文[133]证实了这一点, 即引理 2.3.6. 近来, 刘川告诉我陈怀鹏[31]已否定地回答了 Michael-Nagami 问题 2.3.1(参考文[222]). 这样, 具有点可数 cs*网的序列空间就严格地弱于具有点可数紧有限分解网的 k 空间, 具有点可数紧有限分解网的 k 空间就是度量空间的紧覆盖的商 s 映象的实质的内在特征, 而类"每一紧子集是可度量化的且具有点可数的 cs 网的序列空间"是含有度量空间的紧覆盖的商 s 映象的较好的空间类.

2.4　cs 网与 Velichko 的问题

本节讨论局部可分度量空间的商 s 映象、序列覆盖的商 s 映象以及它们的分解定理, 乘积空间的 k 空间性质[145, 194, 219], CW 复形的映射性质[146]等与此有关. 1924 年 Alexandroff 就已把局部可分度量空间分解为可分度量空间的拓扑和(见文[49]的 4.4.F), 1956 年 A. H. Stone 研究了局部可分度量空间的开 s 映象与商 s 映象的度量化问题(见文[49]的 4.5.17 和 4.5.18). 可分度量空间的商映象, 度量空间的商 s 映象都已有很好的内在刻画, 作为介于这两者之间的局部可分度量空间的商 s 映象我们在文[128]给出了如下的特征: 空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是序列空间且存在 X 的点可数覆盖$\{X_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$满足: 每一 X_α 有可数网 $\mathbf{P}_\alpha$ 使得对于 X 的任一收敛序列 S 有 $\beta\in\Lambda$ 使得 $\mathbf{P}_\beta$ 是 S 的某子序列的 cs 网. 这是一个较复杂的内在刻画, 寻求局部可分度量空间的简单的商 s 映象的内有刻画还是一个尚未解决的问题[145, 224]. 与此相关的是 Velichko[231]提出的关于度量空间的商 s 映象的有趣问题.

问题 2.4.1　寻求拓扑性质 Φ 使得空间 X 是具有性质 Φ 的度量空间的商 s 映象当且仅当 X 既是 Φ 空间又是度量空间的商 s 映象.

与局部可分度量空间的商 s 映象问题及 Velichko 的问题相关的结果有,

定理 2.4.2　(1) 空间 X 是局部可分度量空间的序列覆盖 s 映象当且仅当 X 是具有由 cosmic 子空间组成的点可数的 cs 网[224].

(2) 空间 X 是局部可分度量空间的伪开 s 映象当且仅当 X 是局部可分空间且是度量空间的伪开 s 映象 [113, 231]. ■

从引理 1.2.4(3), 定理 2.4.2(2) 可改叙为局部可分的 Fréchet 性质是问题 2.4.1 的一个解. 我们将证明如果把商映射加强为序列覆盖的商映射, 局部 $\aleph_0$ 性质将是 Velichko 的问题的又一个解, 同时它可导出定理 2.4.2 的证明. 本节的内容主要取材于文[131], 我们先探讨与可分性相关的序列可分性.

定义 2.4.3[40]　空间 X 称为是序列可分的, 如果存在 X 的可数子集 D 使得对于每一 $x\in X$ 有 D 中的序列$\{x_n\}$使得序列$\{x_n\}$在 X 中收敛于 x. 这时 D 称为 X 的序列稠子集.

易验证, 映射保持序列可分性, 每一可分的 Fréchet 空间是序列可分空间, 但是可分的序列空间未必是序列可分的空间(见文[113]的例 2.8.16). 定理 2.4.2(1) 的证明思路之一是利用"每一具有点可数 cs 网的 cosmic 空间是 $\aleph_0$ 空间"[147], 而该命题证明的关键步骤是利用"cosmic 空间是序列可分的". Michael[154]曾证明"空间 X 是 cosmic 空间当且仅当 X 是可分度量空间的映象". 本节的第一部分是证明序列可分空间有与 cosmic 空间相类似的结果.

定理 2.4.4[131]　对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是序列可分空间.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(2) X 是第一可数的可分空间的映象.

(3) X 是可展的可分空间的映象.

证明 由于可展空间是第一可数空间, 可分的第一可数空间是序列可分空间且映射保持序列可分性, 所以(3) ⇒(2) ⇒(1).

(1) ⇒(3). 设 (X, τ) 是序列可分空间. 由于每一可数空间是可数离散空间的映象, 不妨设 X 是不可数空间. 让 $D = \langle d_n \rangle$ 是 X 的可数的序列稠子集. 对于每一 $x \in X$, 取定 $S_x = \langle d_{x,n} \rangle \subset D$ 使得序列 S_x 在 X 中收敛于 x. 如果 $x \in D$, 不妨设每一 $d_{x,n} = x$; 如果 $x \in X \setminus D$, 不妨设 $\langle d_{x,n} \rangle$ 的各项是两两互不相同的. 集合 X 的新拓扑 τ^* 定义如下: 对于每一 $x \in U \subset X$, U 是点 x 在 (X, τ^*) 的邻域当且仅当对于某个 $m \in N$ 有 $\{d_{x,n}: n \geq m\} \subset U$. 那么 τ^* 是 X 上的拓扑.

(4.1) τ^* 是可分, 局部紧且 T_2 的.

D 是 τ^* 的可数稠子集, 并且对于每一 $x \in X$, $m \in N$, $\{x\} \cup \{d_{x,n}: n \geq m\}$ 是 x 在 (X, τ^*) 中的紧邻域.

(4.2) τ^* 是可展的.

我们可以设 $\cup\{S_x : x \in X \setminus D\} = D$. 对于每一 $n \in N$, 置 $F_n = \{d_i : i \leq n\}$, $\mathbf{U}_n = \{\{x\} \cup (S_x \setminus F_n) : x \in X \setminus D\} \cup \{\{x\} : x \in F_n\}$. 则 $\mathbf{U}_n$ 是 X 的开覆盖且对于每一 $x \in X$, $st(x, \mathbf{U}_n) = \begin{cases} \{\{x\} \cup (S_x \setminus F_n) : x \in X \setminus D\} \\ \{x\} \quad , x \in F_n \end{cases}$. 于是 $\langle st(x, \mathbf{U}_n) \rangle$ 是 x 在 (X, τ^*) 中的局部基. 因此 $\{\mathbf{U}_n\}$ 是 (X, τ^*) 的展开, 故 (X, τ^*) 是可展空间.

因为 $\tau \subset \tau^*$, 恒等映射 $id_X : (X, \tau^*) \to (X, \tau)$ 是连续的, 于是 X 是可展的可分空间的映象. ■

由于 cosmic 空间是可分度量空间的映象, 所以有,

推论 2.4.5 每一 cosmic 空间是序列可分的. ■

我在学习文[147]时注意到了"序列可分性"这一性质并在 1998 年 10 月与李进金在杭州交流了我的一些想法, 后来李进金告诉我在文[206]中这一性质称为"序列可分性", 1999 年 6 月在修改文[131]时我发现早在 1984 年 Davis[40]已定义这一性质为"序列可分性". 不知是否有关于它的更早的出处. 下面转入讨论局部可分度量空间的映象与 Velichko 的问题 2.4.1.

定义 2.4.6[132] 设 **P** 是空间 X 的覆盖.

(1) **P** 称为 X 的 cs 覆盖, 若 X 中的每一收敛序列是终于 **P** 中的某元.

(2) **P** 称为 X 的 sn 覆盖(so 覆盖, g 覆盖), 若 **P** 中的每一元是 X 中某点的序列邻域(序列开集, 弱邻域)且对于任意的 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的序列邻域(序列开集, 弱邻域) $P \in \mathbf{P}$.

术语 cs 覆盖在文[89]中称为条件 (c_3).

引理 2.4.7 设 **P** 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数的 cs 网, 如果 **U** 是 X 的 sn 覆盖, 置 $\mathbf{P}' = \{P \in \mathbf{P}$: 对于某一 $U \in \mathbf{U}$ 有 $P \subset U\}$. 则 $\mathbf{P}'$ 仍是 X 的 cs 网.

证明 设 $x \in W$ 且 W 是 X 的开子集. 如果 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于点 x 的序列, 置 $\mathbf{P}_x = \{P \in \mathbf{P} : x \in P \subset W$ 且序列 $\{x_n\}$ 是终于 P 的$\} = \langle P_n \rangle$. 对于每一 $n \in N$, 令 $Q_n = \cap_{i \leq n} P_i$, 那么 $Q_n \in \mathbf{P}_x$. 让 $U_x \in \mathbf{U}$ 是点 x 在 X 中的序列邻域. 如果存在序列 $\{q_n\}$ 使得每一 $q_n \in Q_n \setminus U_x$, 设 G

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

是 X 的开子集且 $x \in G$, 由于 **P** 是 X 的 cs 网, 那么对于某一 $k \in N$ 有 $P_k \subset G$, 于是当 $n \geq k$ 时有 $q_n \in Q_n \subset P_k \subset G$, 从而序列$\{q_n\}$收敛于 x, 这与 U_x 是 x 的序列邻域相矛盾. 因此对于某一 $m \in N$ 有 $Q_m \subset U_x$, 于是 $Q_m \in$**P**′. 故 **P**′是 X 的 cs 网. ■

引理 2.4.7 中覆盖 **P** 的点可数性是本质的. 让 $X = N \cup \{p\}$, 其中 $p \in \beta N \setminus N$. 设 **P** 是 X 的基且 **U** $= \{\{x\}: x \in X\}$. 由于 X 中没有非平凡的收敛序列, 于是 **U** 是 X 的 so 覆盖. 置 **P**′ $= \{P \in$ **P** : 对于某一 $U \in$ **U** 有 $P \subset U\}$. 那么 **P**′ $= \{\{x\}: x \in N\}$不是 X 的 cs 网.

定理 2.4.8[131]　对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖 s 映象.

(2) X 有由 cosmic 子空间组成的点可数的 cs 网.

(3) X 有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数的 cs 网.

(4) X 既有点可数的 cs 网又有由 $\aleph_0$ 子空间组成的 so 覆盖.

证明　(1) ⇒(2). 让 $f: M \to X$ 是序列覆盖的 s 映射, 其中 M 是局部可分的度量空间. 由定理 1.2.8, 设 **B** 是 M 的由可分子集组成的 σ 局部有限基. 置 **P** $= f($**B**$)$. 那么 **P** 是 X 的由 cosmic 子空间组成的点可数的 cs 网.

(2) ⇒(4). 设 **P** 是 X 的由 cosmic 子空间组成的点可数的 cs 网. 对于每一 $P \in$ **P**, 由推论 2.4.5, 让 $D(P)$ 是 P 的可数的序列稠子集. 对于每一 $x \in X$, 置 **P**$(x, 1) = \{P \in$ **P** $: x \in P\}$, $D(x, 1) = \cup\{D(P): P \in$ **P**$(x, 1)\}$. 对于每一 $n \geq 2$, 归纳地定义 **P**$(x, n) = \{P \in$ **P** : **P** $\cap D(x, n-1) \neq \emptyset\}$, $D(x, n) = \cup\{D(P): P \in$ **P**$(x, n)\}$. 让 **P**$(x) = \cup\{$**P**$(x, n): n \in N\}$, $U(x) = \cup$**P**(x). 为完成(4)的证明只须说明 $U(x)$是 X 的序列开子集且可数子族 **P**(x)是 $U(x)$的 cs 网. 如果 X 中的序列$\{y_n\}$收敛于 $y \in U(x) \cap W$, 其中 W 是 X 的开子集, 则对于某一 $m \in N$ 和 $P \in$ **P**(x, m)有 $y \in P$, 于是存在 $D(P)$中的序列$\{z_n\}$在 X 中收敛于 y, 从而对于某一 $k \in N$ 和 $Q \in$ **P** 有$\{y\} \cup \{y_n, z_n: n \geq k\} \subset Q \subset W$, 因此 $Q \in$ **P**$(x, m+1) \subset$ **P**(x)且$\{y\} \cup \{y_n: n \geq k\} \subset Q \subset U(x) \cap W$. 这表明 $U(x)$是 X 的序列开子集且 **P**(x)是 $U(x)$的 cs 网.

(4) ⇒(3). 由引理 2.4.7.

(3) ⇒(1). 设 X 有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数的 cs 网 **P**. 让 **P** $= \{P_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$. 对于每一 $\alpha \in \Lambda$, 由定理 2.0.1(2), 存在可分度量空间 M_α 和序列覆盖映射 $f_\alpha: M_\alpha \to P_\alpha$. 置 $M = \oplus_{\alpha \in \Lambda} M_\alpha$, $Z = \oplus_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$且 $f = \oplus_{\alpha \in \Lambda} f_\alpha: M \to Z$. 那么 M 是局部可分的度量空间且 f 是序列覆盖映射. 定义 $h: Z \to X$ 是自然映射, 且让 $g = hf: M \to X$. 那么 g 是序列覆盖的 s 映射. ■

定理 2.4.8 中的(1) ⇔(2)在文[224]中被证明, (1) ⇔(3)在文[104]中被证明. (4)的作用之一是由它可获得局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象的下述分解定理. 这是问题 2.4.1 的部分解. 它也与文[128]中提出的下述问题相关: 局部可分度量空间的商 s 映象是否等价于度量空间的商 s 映象且每一第一可数的子空间是局部可分的? 若该问题的回答是肯定的, 那么性质"第一可数的子空间是局部可分的"将是问题 2.4.1 的一个解.

推论 2.4.9　对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象.

(2) X 既是局部的 $\aleph_0$ 空间又是度量空间的序列覆盖的商 s 映象.

(3) X 是具有点可数 cs 网的局部 $\aleph_0$ 的序列空间. ■

现在, 我们进一步研究在定理 2.4.8(4)中"so 覆盖"是点可数的情形.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

引理 2.4.10 设 **P** 是空间 X 的星可数的 wcs * 网, 则 $\mathbf{P}=\cup\{\mathbf{P}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, X 是 $\aleph_0$ 子空间族 $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的互不相交的并, 且每一 $\mathbf{P}_\alpha$ 是 X_α 的可数 k 网.

证明 记空间 X 的星可数的 wcs * 网 **P** 为 $\{P_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$. 对于 $\gamma,\delta\in\Gamma$ 定义 $\gamma\sim\delta$ 当且仅当存在 $P_1, P_2, \cdots, P_n\in\mathbf{P}$ 使得 $P_\gamma\cap P_1\neq\varnothing$, $\cdots$, $P_i\cap P_{i+1}\neq\varnothing$, $\cdots$, $\cdots$, $P_n\cap P_\delta\neq\varnothing$. 由这定义的等价关系将指标集 Γ 分解为两两互不相交的子集族 $\{\Gamma_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的并. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 令 $\mathbf{P}_\alpha=\{P_\gamma:\gamma\in\Gamma_\alpha\}$, $X_\alpha=\cup\mathbf{P}_\alpha$. 则 $\mathbf{P}=\cup\{\mathbf{P}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, X 是 $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的互不相交的并, 且 $\mathbf{P}_\alpha$ 是 X_α 的可数 wcs * 网. 这时 $\mathbf{P}_\alpha$ 也是 X_α 的可数网, 所以 X_α 的每一紧子集是可度量化的, 由引理 2.1.6, $\mathbf{P}_\alpha$ 是 X_α 的 k 网. ■

定理 2.4.11[131] 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 有星可数的 cs * 网(cs 网).

(2) X 有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数的 so 覆盖.

(3) X 有由 $\aleph_0$ 子空间组成的互不相交的 so 覆盖.

证明 (1) ⇒(3). 设 **P** 是空间 X 的星可数的 cs * 网. 由引理 2.4.10, $\mathbf{P}=\cup\{\mathbf{P}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, X 是 $\aleph_0$ 子空间族 $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的互不相交的并, 且每一 $\mathbf{P}_\alpha$ 是 X 的可数的 cs * 网. 我们还要证明每一 X_α 在 X 中是序列开的. 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $x\in X_\alpha$, 令 $(\mathbf{P})_x=\langle P_i\rangle$, 因为 **P** 是 X 的 cs * 网, 由引理 2.2.6, 存在 $m, k\in N$ 使得 $\{x_n: n\geq m\}\subset\cup_{i\leq k}P_i$, 这时 $\cup_{i\leq k}P_i\subset X_\alpha$, 于是序列 $\{x_n\}$ 是终于 X_α 的, 故 X_α 是序列开的. 因此, $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的由 $\aleph_0$ 子空间组成的互不相交的 so 覆盖.

(3) ⇒(2). 显然.

(2) ⇒(1). 设 **P** 是空间 X 的由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数的 so 覆盖. 置 $\mathbf{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 对于每一 $\beta\in\Lambda$, 以 D_β 表示 P_β 的可数的序列稠子集. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 因为 P_α 是序列开的, 所以 $D_\beta\cap P_\alpha\neq\varnothing$ 当且仅当 $D_\beta\cap P_\alpha\neq\varnothing$. 于是 $\{P_\alpha\in\mathbf{P}: P_\beta\cap P_\alpha\neq\varnothing\}$ 是可数的. 即, **P** 是星可数的. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 设 $\mathbf{P}_\alpha$ 是 P_α 的可数的 cs 网, 易验证, $\cup\{\mathbf{P}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的星可数的 cs 网. ■

推论 2.4.12 对于序列空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 有星可数的 cs * 网(cs 网).

(2) X 有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数的开覆盖.

(3) X 是 $\aleph_0$ 空间族的拓扑和. ■

由此可导出定理 2.4.2(2).

图 2.4.13 本节中讨论的一些集族间的关系如下图.

$\aleph_0$ 空间族的拓扑和	⇒	局部可数的 cs 网	⇒	星可数的 cs 网	⇒	星可数的 cs * 网	⇒	由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数的 cs 网
⇑		⇓				⇓		⇓
由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数的开覆盖	⇒	局部可数的 k 网	⇒	星可数的 k 网	⇒	星可数的 wcs * 网	⇒	点可数的 wcs * 网
		⇓						
		局部 $\aleph_0$ 空间.						

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

例 2.4.14　图 2.4.13 所叙空间之间的不蕴含关系由下述例子说明.

(1) 具有局部可数 cs 网 $\aleph_0$ ⇏ 空间族的拓扑和; 例如文[113]的例 2.8.17.

(2) 具有星可数 cs 网的空间 ⇏ 具有星可数 k 网的空间或局部 $\aleph_0$ 空间; 例如极大紧化 βN.

(3) 局部可分度量空间的商 s 映象 ⇏ 局部可分空间或具有点可数的 cs 网; 例如文[113]的例 2.9.27.

(4) 具有星可数 k 网 ⇏ 局部可分空间或具有点可数的 cs 网; 例如扇空间 S_{ω_1}.

(5) 具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数 cs 网的序列空间 ⇏ 具有由 cosmic 子空间组成的点可数 so 覆盖或具有星可数的 wcs * 网; 例如文[113]的例 2.8.16.

(6) 局部 $\aleph_0$ 空间 ⇏ 具有点可数的 wcs * 网; 例如赋予序拓扑的空间 ω_1.

(7) 具有局部可数 k 网 ⇏ 具有点可数的 cs * 网; 例如本文的例 4.2.3.

(8) 定理 2.4.11 中的条件“$\aleph_0$ 子空间”不可以由“cosmic 子空间”代替, 因为 cosmic 空间 ⇏ 具有点可数 cs 网; 例如文[113]的例 1.8.3. ■

问题 2.4.15[131]　若可分空间 X 是度量空间的序列覆盖的商 s 映象, 那么 X 是否是局部 $\aleph_0$ 空间?

第三章 点有限覆盖列与度量空间的紧映象

围绕正规 Moore 空间猜测, 1960 年 Alexandroff[1] 引进了一致基的概念. Arhangel'skii[4] 证明了具有一致基的集态正规空间是可度量化空间, 且空间 X 具有一致基当且仅当 X 是度量空间的开紧映象. 近来发现一致覆盖与 Collins-Reed-Roscoe-Rudin 的度量化定理[168], 具确定 k 网空间的度量化问题[89,187], 度量空间的商紧映象[89,132] 及具有广义度量因子的乘积空间的正规性[98] 等课题的联系, 更为人们研究一致覆盖提供了广阔的空间.

设 $f: X \to Y$ 是紧映射, 其中 X 是度量空间. 由定理 1.2.8, 让 $\{\mathbf{B}_n\}$ 是空间 X 的局部有限的开覆盖序列且满足: 对于 X 的非空紧子集 K, $\langle st(K, \mathbf{B}_n)\rangle$ 是 K 在 X 中的邻域基, 则 $\{f(\mathbf{B}_n)\}$ 是空间 Y 的点有限覆盖序列且满足: 对于 $y \in Y$, $\langle st(y, f(\mathbf{B}_n))\rangle$ 是 y 在 Y 中的网. 具有这种性质的空间 Y 是本章研究的重点.

定义 3.0.1　设 $\mathbf{P} = \bigcup\{\mathbf{P}_n: n \in N\}$ 是空间 X 的子集族, 其中每一 $\mathbf{P}_n$ 是 X 的覆盖.

(1) $\{\mathbf{P}_n\}$ 称为 X 的点星网, 若对于 $x \in X$, $\langle st(x, \mathbf{P}_n)\rangle$ 是 x 在 X 中的网.

(2) 若 X 的点星网 $\{\mathbf{P}_n\}$ 使得每一 $\mathbf{P}_n$ 具有性质 C, 则 $\{\mathbf{P}_n\}$ 称为 X 的 C 点星网.

(3) 若 X 的点星网 $\{\mathbf{P}_n\}$ 使得每一 $\langle st(x, \mathbf{P}_n)\rangle$ 是 x 在 X 中的具有性质 D 的网, 则 $\{\mathbf{P}_n\}$ 称为 X 的点星 D 网.

术语“点星网”首次在此使用, 它借用在覆盖理论中广泛使用的“点星加细”概念[93], 具有这种性质的空间早已引起人们的重视, 特殊的情形可追溯至可展空间(可重新定义为具有开点星网的空间). 点星网在文[33, 201]中被称为“半加细”而用以研究度量空间的确定的商映象, 在文[215]中被记为条件$(A)^*$用以研究度量空间的序列覆盖商映象和对称度量空间, 在文[89]中又被称为 σ 强网用以研究度量空间的商紧映象, cs 覆盖的点星网在文[89]中被称为条件(s_3). 使用术语“点星网”似乎更加形象. 显然, $\{\mathbf{P}_n\}$ 是空间 X 的点星网当且仅当对于 x

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

$\in X$ 和任意取定的 $P_n \in (\mathbf{P}_n)_x$，$\langle P_n \rangle$ 是 x 在 X 中的网.

定义 3.0.2[1] 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathbf{P}$ 称为 X 的点正则覆盖，若 $x \in U \in \tau$，则 $\{P \in (\mathbf{P})_x : P \not\subset U\}$ 是有限的.

(2) $\mathbf{P}$ 称为 X 的一致覆盖，若对于 $x \in X$，如果 $\mathbf{P}'$ 是 $(\mathbf{P})_x$ 的可数无限子集，则 $\mathbf{P}'$ 是 x 在 X 中的网.

显然，空间 X 的点正则覆盖(一致覆盖)的子覆盖仍是 X 的点正则覆盖(一致覆盖).

本章将围绕度量空间的序列覆盖紧映射开展工作，应用空间的点星网、点正则覆盖、一致覆盖等概念，建立了度量空间的序列覆盖紧映射的刻画，将作者在文[114]中引入的 1 序列覆盖映射与 2 序列覆盖映射的性质更加发扬光大，发现了度量空间上特定的序列覆盖映射就是 1 序列覆盖映射，证明了序列覆盖的闭映射保持可度量性，解决了 Ikeda，Liu，Tanaka[89]和作者与燕鹏飞[131]提出的两个问题.

与定理 2.0.1 相平行，关于度量空间的紧映象的相关结果有，

定理 3.0.3 (1) 空间 X 是度量空间的序列商(伪序列覆盖)的紧映象当且仅当 X 具有点有限的点星 sn 网[89，242].

(2) 空间 X 是度量空间的紧覆盖的紧映象当且仅当 X 具有点有限的紧有限分解的点星网[242].

(3) 空间 X 是度量空间的序列覆盖的紧映象当且仅当 X 具有点有限 cs 覆盖的点星网[89，244].

(4) 空间 X 是度量空间的商紧映象当且仅当 X 具有点有限的点星弱邻域网[113，230]当且仅当 X 具有点正则弱基[89].

(5) 空间 X 是度量空间的开紧映象当且仅当 X 具有点正则基[4].

(6) 设 X 是具有星可数 k 网的 k 空间，则 X 是局部可分度量空间的商紧映象当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω[148] ■

3.1 sn 网与 Ikeda - Liu - Tanaka 的问题

sn 网(即序列邻域网)是描述度量空间的 1 序列覆盖映象的恰当的集族性质，它的优点在于利用我们熟知的收敛序列和网来刻画空间的拓扑与处理集族问题. 一些与弱基相关的问题可转化为与 sn 网相关的问题来讨论并且降低空间对弱第一可数性的要求，如 Hoshina[86]关于具有点可数弱基的空间的映射刻画问题就是在首先获得了具有点可数 sn 网的空间的映射刻画的情况下得到解决的[114]. 同时，它也启发作者在文[114]中提出 1 序列覆盖映射的概念. 另一方面，一些关于基或弱基的结果可以利用 sn 网给出更富有一般性的命题，相关的结果可见文献[76，104，108，114，119，131，132，245].

本节的主要内容取材于文[131，132]. 我在写文[113]的π映象与紧映象(第 2 章第 9 节)中关于度量空间的商紧映象时就想刻画更一般的度量空间的伪序列覆盖的紧映象. 后来，燕鹏飞[242]和 Ikeda 等[89]获得了这一特征. 定理 3.0.3 基本上反映了点有限覆盖列，尤其是点有限的点星网，点正则覆盖，与度量空间的紧映象之间的联系. 这也从另一角度说明了点星网与点正则覆盖之间的必然联系，引起人们发现它们之间进一步关系的兴趣. 如 Ikeda，Liu 和 Tanaka[89]提出了下述问题，

问题 3.1.1 (1) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs 网的序列空间.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(2) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs*网的序列空间.

本节的主要内容是利用 sn 网刻画度量空间的序列覆盖的紧映象和可分度量空间的紧覆盖的紧映象. 由此可获得问题 3.1.1(1)的肯定回答. 先定义几个术语.

定义 3.1.2　设 $\mathbf{P} = \cup\{\mathbf{P}_n : n \in N\}$是空间 X 的子集族, 其中每一 $\mathbf{P}_n$ 是 X 的覆盖.

(1) $\{\mathbf{P}_n\}$称为 X 的 cs 网(sn 网, so 网, 弱基), 若 $\mathbf{P}$ 是 X 的 cs 网(sn 网, so 网, 弱基).

(2) $\{\mathbf{P}_n\}$称为 X 的(点有限, 局部有限)加细, 若每一($\mathbf{P}_n$ 是点有限的且, $\mathbf{P}_n$ 是局部有限的且) $\mathbf{P}_{n+1}$加细 $\mathbf{P}_n$.

下面几个引理建立了点正则覆盖、一致覆盖、点星网之间的初步联系.

引理 3.1.3　对于空间 X 的覆盖 $\mathbf{P}$, 下述条件相互等价:

(1) $\mathbf{P}$ 是 X 的一致覆盖.

(2) 对于 $x \in X$, 若 $< P_n >$是$(\mathbf{P})_x$的无限子集并且 U 是 x 在 X 中的序列邻域, 那么存在 $m \in N$ 使得当 $n > m$ 时有 $P_n \subset U$.

(3) $\mathbf{P}$ 是 σX 的点正则覆盖.

(4) $\mathbf{P}$ 是 X 的点正则覆盖.

证明　只须证(1) ⇒(2) ⇒(3), 而(3) ⇒(4) ⇒(1)是显然的.

设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的一致覆盖, $x \in X$, $< \mathbf{P}_n >$是$(\mathbf{P})_x$的无限子集, 并且 U 是 x 在 X 中的序列邻域. 若不存在 $m \in N$ 使得当 $n > m$ 时有 $P_n \subset U$, 则存在 $< P_n >$的无限子集 $< P_{n_k} >$使得每一 $P_{n_k} \not\subset U$. 对于每一 $k \in N$, 取 $x_k \in P_{n_k} \setminus U$, 由于 $< P_{n_k} >$的任何无限子集都是 x 在 X 中的网, 于是序列$\{x_k\}$收敛于 $x \in U$, 矛盾. 所以(1) ⇒(2)成立. 设 $\mathbf{P}$ 满足(2), 并且 U 是 x 在σX 中的开邻域, 那么 U 是 X 的序列开集, 于是$\{P \in (\mathbf{P})_x : P \not\subset U\}$是有限集, 从而 $\mathbf{P}$ 是 σX 的点正则覆盖. 因此(2) ⇒(3)成立. ■

引理 3.1.4　空间 X 的点有限加细的点星网的并是 X 的一致覆盖.

证明　设$\{\mathbf{P}_n\}$是空间 X 的点有限加细的点星网, 让 $\mathbf{P} = \cup_{n \in N} \mathbf{P}_n$. 对于 $x \in X$, 若 $< P_m >$是$(\mathbf{P})_x$ 的无限子集, 则对于 $k \in N$, 存在 $P_{m_k} \in \mathbf{P}_{n_k}$使得 $m_k < m_{k+1}$且 $n_k < n_{k+1}$. 那么 $< \mathbf{P}_{m_k} >$是 x 在 X 中的网, 从而 $< \mathbf{P}_m >$是 x 在 X 中的网, 故 $\mathbf{P}$ 是 X 的一致覆盖. ■

引理 3.1.5　序列扇不具有一致 cs 网.

证明　记序列扇 X 为$\{x\} \cup < X_n >$, 其中每一 X_n 作为序列收敛于 x. 若 $\mathbf{P}$ 是 X 的 cs 网, 对于 $n \in N$, 存在 $x_n \in X \setminus \{x\}$和 $P_n \in \mathbf{P}$ 使得$\{x, x_n\} \subset P_n \subset X \setminus \{x_i : i < n\}$, 于是 $< P_n >$的各项是两两互不相同的且 $x \in P_n \not\subset X \setminus < x_i >$. 然而 $< x_i >$是 X 的闭子集, 所以 $\mathbf{P}$ 不是 X 的一致覆盖, 故序列扇不具有一致 cs 网. ■

引理 3.1.6　对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有点有限 cs 覆盖(sn 覆盖, so 覆盖, g 覆盖)的点星网.

(2) X 具有构成 cs 网(sn 网, so 网, 弱基)的点有限加细的点星网.

(3) X 具有点有限 cs 覆盖(sn 覆盖, so 覆盖, g 覆盖)加细的点星网.

证明　仅证 cs 覆盖的情形, 其余情形是类似的. 设$\{\mathbf{P}_n\}$是空间 X 的点有限 cs 覆盖的点星网. 对于 $n \in N$, 令 $\mathbf{F}_n = \wedge_{i \le n}\mathbf{P}_i$, 那么$\{\mathbf{F}_n\}$是 X 的点有限 cs 覆盖加细的点星网, 因而(1) ⇒(3)成立. 由于 cs 覆盖的点星网是 cs 网, 所以(3) ⇒(2)成立. 设$\{\mathbf{P}_n\}$既是 X 的 cs 网又是 X 的点有限加细的点星网. 对于 $m \in N$, 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 由于 $\mathbf{P}_m$ 是 X 的覆盖, 可

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

以设所有的 $x_n \neq x$. 记$\{P \in (\mathbf{P}_i)_x : n \le m\} \setminus \{\{x\}\} = \{P_j : j \le k\}$. 对于每一 $j \le k$, 取 $p_j \in P_j \setminus \{x\}$, 则存在 $i \in N$ 和 $P \in \mathbf{P}_i$ 使得$\{x_n\}$是终于 P 的且 $P \subset X \setminus \{p_j : j \le k\}$, 这时 $i > m$, 从而存在 $Q \in \mathbf{P}_m$ 使得 $P \subset Q$, 于是$\{x_n\}$是终于 Q 的. 因此, $\mathbf{P}_m$是 X 的 cs 覆盖, 所以(2) ⇒(1) 成立. ■

引理 3.1.7 设 $f: X \to Y$. 如果 $< B_n >$ 是 X 中某点 x 的下降的网且每一 $f(B_n)$ 是 $f(x)$ 在 Y 中的序列邻域, 若 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于点 y, 那么存在 X 中收敛于点 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

证明 对于 $n \in N$, 由于 $f(B_n)$ 是 $f(x)$ 的序列邻域, 存在 $i_n \in N$ 使得当 $i \ge i_n$ 时有 $y_i \in f(B_n)$, 那么 $f^{-1}(y_i) \cap B_n \neq \emptyset$. 不妨设 $1 < i_n < i_{n+1}$. 对于 $j \in N$, 置 $x_j \in \begin{cases} f^{-1}(y_j), j < i_1, \\ f^{-1}(y_j) \cap B_n, i_n \le j < i_{n+1}, n \in N, \end{cases}$ 那么 $x_j \in f^{-1}(y_j)$,且序列$\{x_i\}$收敛于点 x. ■

对于空间 X, 记 $S(X) = \{x \in X : \{x\}$是 X 的序列开集$\}$, $\mathbf{S}(X) = \{\{x\} : x \in S(X)\}$. 显然, $\{x\}$是 X 的序列开集当且仅当 X 中不存在非平凡的序列收敛于点 x. 本节的第一个主要结果是,

定理 3.1.8[132] 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的紧映象.

(3) X 具有点正则 cs 网.

(4) X 具有点正则 sn 网.

(5) X 具有一致 cs 网.

(6) X 具有一致 sn 网.

(7) X 具有点有限 cs 覆盖点星网.

(8) X 具有点有限 sn 覆盖的点星网.

证明 只须证(2) ⇒(3) ⇒(4) ⇒(8) ⇒(1) , 而(1) ⇒(2) , (8) ⇒(7) ⇒(5) ⇔(3) , (6) ⇔(4) 由定义或引理是显然成立的.

(2) ⇒(3) . 设 $f: M \to X$ 是序列覆盖的紧映射, 其中 M 是度量空间. 由定理 1.2.8, 让$\{\mathbf{B}_n\}$是 M 的局部有限的开加细且满足: 对于 M 的非空紧子集 K, $< st(K, \mathbf{B}_n) >$ 是 K 在 M 中的邻域基, 则$\{f(\mathbf{B}_n)\}$是 X 的点有限加细的点星网. 由引理 3.1.3、引理 3.1.4 及序列覆盖映射保持 cs 网知 X 具有点正则 cs 网.

(3) ⇒(4) . 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的点正则 cs 网. 不妨设 $\mathbf{S}(X) \subset \mathbf{P}$.

先证 $\mathbf{P}$ 是点可数的. 对于 $x \in X$, 若$(\mathbf{P})_x$是不可数的, 由于 $\mathbf{P}$ 的点正则性知对于 $y \neq x$, $\{P \in (\mathbf{P})_x : y \in P\}$是有限集, 于是存在$(\mathbf{P})_x$的无限子集 $< P_n >$, $x_n \in P_n \setminus \{x\}$和 $k \in N$ 使得每一 x_n 恰属于$(\mathbf{P})_x$的 k 个元, 即 $ord(x_n, (\mathbf{P})_x) = k$. 由引理 3.1.3, 序列$\{x_n\}$收敛于 x. 再由 $\mathbf{P}$ 是 X 的 cs 网, 存在$(\mathbf{P})_x$ 的子集 $< F_i >$ 和$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$使得对于每一 $i \in N$ 有$\{x_n : n \ge n_i\} \subset F_i \subset X \setminus \{x_{n_j} : j < i\}$, 那么 $ord(x_{n_i}, (\mathbf{P})_x) \ge i$, 矛盾, 因而 $\mathbf{P}$ 是点可数的.

其次证明 $\mathbf{P}$ 是 σX 的 cs 网. 设 σX 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x \in U \in \tau(\sigma X)$, 不妨设 $x \notin S(X)$, 由于 $\mathbf{P}$ 的点可数性, $\{P \in (\mathbf{P})_x : \{x_n\}$是终于 P 的$\}$是可数无限集, 记它为 $< F_n >$, 由引

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

理3.1.3知存在 $n\in N$ 使得 $F_n\subset U$,故 **P** 是 σX 的cs网.

最后证明 X 具有点正则的sn网. 由前所证知 **P** 是 σX 的点正则cs网,从引理3.1.5、推论2.1.9(2),存在 **P** 的有限交的某子族 **P**′是 σX 的弱基,而弱邻域是序列邻域,从而 **P**′是 X 的点正则sn网.

(4) ⇒(8). 设 **P** 是空间 X 的点正则sn网.

先证明 **P** 有性质(F):对于 $P\in\mathbf{P}$,$\{R\in\mathbf{P}: P\subset R\}$是有限集. 若不然,存在 $\mathbf{P}\setminus\{P\}$的无限子集 $<P_n>$ 使得每一 $P\subset P_n$. 如果 P 是单点集,那么 P 是 X 的序列开集,由引理3.1.3,存在 $n\in N$ 使得 $P_n\subset P$,矛盾. 如果 P 不是单点集,设 P 含有不同的点 x 和 y,那么存在 $n\in N$ 使得 $x\in P_n\subset X\setminus\{y\}$,矛盾. 由性质($F$),不难验证 $\mathbf{S}(X)\subset\mathbf{P}$. 置 $\mathbf{P}^m=\{R\in\mathbf{P}$:若 $R\subset P\in\mathbf{P}$,则 $P=R\}$.

其次证明 $\mathbf{P}^m$ 是 X 的点有限覆盖. 对于 $P\in\mathbf{P}$,由性质(F),存在 $R\in\mathbf{P}^m$ 使得 $P\subset R$,从而 $\mathbf{P}^m$ 是 X 的覆盖. 对于 $x\in X$.,由(3) ⇒(4)所证知$(\mathbf{P}^m)_x$是可数的. 如果$(\mathbf{P}^m)_x$ 是无限集,记它为 $<R_n>$,由于 **P** 是 X 的sn网,存在 x 在 X 中的序列邻域 $P\in\mathbf{P}$,不妨设 $P\subset R_1$,于是对于每一 $n\in N$,存在 $x_n\in R_{n+1}\setminus R_1$,那么序列$\{x_n\}$收敛于 x 且 $<x_n>\cap P=\varnothing$,矛盾,从而$(\mathbf{P}^m)_x$是有限集,故 $\mathbf{P}^m$ 是 X 的点有限覆盖. 置 $\mathbf{P}'=(\mathbf{P}\setminus\mathbf{P}^m)\cup\mathbf{S}(X)$.

再次证明 **P**′仍是 X 的点正则sn网. 事实上,设 $x\in U\in\tau$,不妨设 $x\notin S(X)$,由引理3.1.3,存在 x 在 X 中的序列邻域 V,$W\in\mathbf{P}$ 和 $y\in V\setminus\{x\}$使得 $W\subset V\setminus\{y\}\subset V\subset U$,于是 $W\in\mathbf{P}'$,所以 **P**′是 X 的sn网,从而它是 X 的点正则sn网.

令 $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}^n$,$\mathbf{P}_{n+1}=[(\mathbf{P}\setminus\cup\{\mathbf{P}_i: i\le n\})\cup\mathbf{S}(X)]^m$,$n\in N$.

最后证明 X 具有点有限sn覆盖的点星网. 显然,$\{\mathbf{P}_n\}$是 X 的点有限加细,并且由性质(F)知 $\mathbf{P}=\cup_{n\in N}\mathbf{P}_n$. 对于 $x\in X$,及 $P_n\in(\mathbf{P}_n)_x$,若 $x\in S(X)$,则存在 $m\in N$ 使得 $P_m=\{x\}$,于是 $<P_n>$ 是 x 在 X 中的网;若 $x\notin S(X)$,则 $<P_n>$ 的各项是两两互不相同的,由引理3.1.3知 $<P_n>$ 是 x 在 X 中的网. 因此,$\{\mathbf{P}_n\}$是 X 的点星网. 由引理3.1.6,X 具有点有限sn覆盖的点星网.

(8) ⇒(1). 设 X 具有点有限sn覆盖的点星网$\{\mathbf{P}_n\}$. 对于 $n\in N$,记 $\mathbf{P}_n=\{P_\alpha:\alpha\in A_n\}$. 置 $M=\{\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A_i:<P_{\alpha_i}>$ 是 X 中某点 $x(\beta)$ 在 X 中的网$\}$,并且赋予 M 是离散空间族 $<A_i>$ 的积空间所诱导的子空间拓扑,则 M 是度量空间且通过 $f(\beta)=x(\beta)$ 所定义的函数 $f: M\to X$ 是从 M 到 X 上的映射.

(8.1) f 是紧映射.

对于每一 $x\in X$,$i\in N$,置 $B_i=\{\alpha\in A_i: x\in P_\alpha\}$. 那么 $\prod_{i\in N}B_i$ 是 $\prod_{i\in N}A_i$ 的紧子集且 $f^{-1}(x)=\prod_{i\in N}B_i$,所以 f 是紧映射.

(8.2) f 是1序列覆盖映射.

对于每一 $x\in X$,$n\in N$,由于 $\mathbf{P}_n$ 是 X 的sn覆盖,存在 $\alpha_n\in A_n$ 使得 P_{α_n}是点 x 在 X 中的序列邻域. 让 $\beta=(\alpha_n)$,则 $\beta\in f^{-1}(\alpha)$. 对于 $n\in N$,置 $F_n=\{(\gamma_i)\in M$:对于 $i\le n$ 有 $\gamma_i=\alpha_i\}$. 那么 $<F_n>$ 是 β 在 M 中下降的邻域基,且对于 $n\in N$ 有 $f(F_n)=\cap_{i\le n}P_{\alpha_i}$. 事实上,设 $\gamma=(\gamma_i)\in F_n$,那么 $f(\gamma)=\cap_{i\in N}P_{\gamma_i}\subset\cap_{i\le n}P_{\alpha_i}$,所以 $f(F_n)\subset\cap_{i\le n}P_{\alpha_i}$. 再设 $z\in\cap_{i\le n}P_{\alpha_i}$,选取 **P** 的子族 $<P_{\delta_i}>$ 使得每一 $\delta_i\in A_i$,当 $i\le n$ 时有 $\delta_i=\alpha_i$,且 $<P_{\delta_i}>$ 是点 z 在 X 中的网,令 δ

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$=(\delta_i)\in\Pi_{i\in N}A_i$, 那么 $z=f(\delta)\in f(F_n)$, 于是 $\cap_{i\le n}P\alpha_i\subset f(F_n)$. 因此 $f(F_n)=\cap_{i\le n}P\alpha_i$. 现在, 设在 X 中序列$\{x_j\}$收敛于 x, 由于 $f(F_n)$是 x 的序列邻域, 再由引理 3.1.7 知在 M 中存在$\beta_j\in f^{-1}(x_j)$, 且在 M 中$\beta_j\to\beta$, 故 f 是 1 序列覆盖映射.

综上所述, X 是度量空间的 1 序列覆盖的紧映象. ■

由定理 3.1.8 和引理 1.2.4, 我们得到如下度量空间的序列覆盖的商紧映象的特征.

推论 3.1.9 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的商紧映象.

(3) X 具有点正则弱基.

(4) X 具有一致弱基.

(5) X 具有点有限 g 覆盖的点星网.

(6) X 是具有点正则 cs 网的序列空间. ■

若将定理 3.1.8 证明中的"序列邻域"换为"序列开集", 应用类似的方法可获得度量空间的 2 序列覆盖紧映象的特征.

定理 3.1.10[132] 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 2 序列覆盖紧映象.

(2) X 具有点正则 so 网.

(3) X 具有一致 so 网.

(4) X 具有点有限 so 覆盖的点星网. ■

下面继续第 2.4 节, 讨论局部可分度量空间的紧映象的刻画.

定理 3.1.11 [131]对于正则空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是可分度量空间的序列商的紧映象.

(2) X 是可分度量空间的紧覆盖的紧映象.

(3) X 具有可数的 sn 网.

证明 (2) ⇒(1). 显然.

(1) ⇒(3). 设 $f:M\to X$ 是序列商的紧映射, 其中 M 是可分度量空间. 由定理 1.2.8, 存在 M 的可数且局部有限的开加细$\{\mathbf{B}_n\}$使得对于 X 的任一紧子集 K, $<st(K,\mathbf{B}_n)>$是 K在 X 中的局部基.

对于每一 $n\in N$, 置 $\mathbf{P}_n=f(\mathbf{B}_n)$. 那么 $\mathbf{P}_n$ 是 X 的可数且点有限的覆盖. 让 $\mathbf{H}=\{st(x,\mathbf{P}_n):x\in X,n\in N\}$. 则 $\mathbf{H}$ 是可数的. 我们将证明 $\mathbf{H}$ 是 X 的 sn 网. 对于每一 $x\in U$, 其中 U 是 X 的开子集, 所以对于某一 $n\in N$ 有 $st(f^{-1}(x),\mathbf{B}_n)\subset f^{-1}(U)$, 于是 $st(x,\mathbf{P}_n)\subset U$. 如果对于某一 $m\in N$, $st(x,\mathbf{P}_m)$不是 x 在 X 中的序列邻域, 存在 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x 且每一 $x_n\notin st(x,\mathbf{P}_m)$. 由于 f 是序列商映射, 存在序列$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$和 $\alpha_i\in f^{-1}(x_{n_i})$ $(i\in N)$使得在 M 中序列$\{\alpha_i\}$收敛于 $\alpha\in f^{-1}(x)$. 取 $B\in(\mathbf{B}_m)_\alpha$, 那么存在 $j\in N$ 使当 $i\ge j$ 时有 $\alpha_i\in B$, 因此 $x_{n_i}\in f(B)\subset st(x,\mathbf{P}_m)$, 矛盾. 因而, $\mathbf{H}$ 是 X 的可数的 sn 网.

(3) ⇒(2). 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的可数的 sn 网. 由 X 的正则性, 我们可以假定 $\mathbf{P}$ 的每一元在 X 中是闭的. 记 $\mathbf{P}=<P_n>=\cup\{\mathbf{P}_x:x\in X\}$, 其中每一 $\mathbf{P}_x$ 是 x 在 X 中的 sn 网. 对于每一 $n\in$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

N, 置 $Q_n = \{x \in X: P_n \notin \mathbf{P}_x\}$, $\mathbf{U}_n = \{P_n, Q_n\}$. 则 $\mathbf{U}_n$ 是 X 的覆盖, 且对于每一 $x \in X$ 有,

$$st(x, \mathbf{U}_n) = \begin{cases} P_n, & P_n \in \mathbf{P}_x \\ X, & P_n \notin \mathbf{P}_x, x \in P_n \\ Q_n, & P_n \notin \mathbf{P}_x, x \notin P_n \end{cases}.$$

从而 $< st(x, \mathbf{U}_n) >$ 是 x 在 X 中的网. 故 $\{\mathbf{U}_n\}$ 是 X 的点星网. 设 C 是 X 的紧子集, 置 $C_1 = P_n \cap C$, $C_2 = \overline{C \setminus P_n}$. 那么 $C = C_1 \cup C_2$. 如果 $x \in C_2$, 由引理 2.1.6 和定理 2.1.1(1), C 是第一可数的, 所以存在 $C \setminus P_n$ 中的序列 $\{x_i\}$ 在 C 中收敛于 x, 于是 $P_n \notin \mathbf{P}_x$, 且 $x \in Q_n$. 所以 $C_2 \subset Q_n$ 且 $C_1 \subset P_n$. 故 $\mathbf{U}_n$ 是 X 的紧有限分解. 因而, 由定理 3.0.3(2), X 是可分度量空间的紧覆盖的紧映象. ■

推论 3.1.12　对于正则空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是可分度量空间的商紧映象.

(2) X 是可分度量空间的紧覆盖的商紧映象.

(3) X 具有可数弱基. ■

推论 3.1.13　对于具有星可数 k 网的正则的 k 空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的紧覆盖的商紧映象.

(2) X 是局部可分度量空间的商紧映象.

(3) X 是度量空间的紧覆盖的商紧映象.

(4) X 是度量空间的商紧映象.

(5) X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

证明　显然, (1) ⇒(2) ⇒(4), (1) ⇒(3) ⇒(4). 若 X 是度量空间的商紧映象, 则 X 是 gf 可数空间, 于是如果 X 含有闭子空间同胚于 S_ω, 那么 S_ω 是第一可数空间, 矛盾, 所以(4) ⇒(5). (5) ⇒(1)的证明利用推论 3.1.12, 类似于文[148]的定理 4 和 5 的证明. ■

注 3.1.14　(1) 推论 3.1.13 涉及文[89]中提出的下述问题: 寻求局部可分度量空间的商紧映象的好的内在刻画. 文[128]曾给出局部可分度量空间的商紧映象的一个内在刻画.

(2) 具有可数弱基的正则空间 ⇏ 可分度量空间的序列覆盖的紧映象; 例如文[215]的例 2.14(3).

(3) 局部紧度量空间的紧覆盖的商紧映象 ⇏ 具有点可数 cs 网的空间或具有星可数 k 网的空间; 例如文[113]的例 2.9.27. ■

问题 3.1.15[222]　(局部紧)度量空间的商紧映象是否具有点 G_δ 性质?

注 3.1.16　定理 3.0.3 和定理 3.1.8 叙述了若干度量空间的紧映象的刻画,它们分别对应于适当的有点有限覆盖的点星网的空间. 这些映射之间的蕴含关系已在 1.2 节中说明,而不蕴含关系将在 3.2 节中说明. 这里我们将阐述一些点有限覆盖的点星网之间的关系. 先回忆 cs^* 覆盖的概念. 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的覆盖, $\mathbf{P}$ 称为 X 的 cs^* 覆盖[104], 若 S 是 X 的收敛序列, 则存在 $P \in \mathbf{P}$ 使得 S 的某子序列是终于 P 的. 术语 cs^* 覆盖在文[89]中称为条件(c_2). 从文[104, 244, 89]的相关结论中可知, 对于空间 X 有下述关系成立, X 有点有限的 sn 覆盖的点星网 ⇔ X 有点有限的 cs 覆盖的点星网 ⇒ X 有点有限的紧有限分解的点星网 ⇒ X 有点有限的 cs^* 覆盖的点星网 ⇔ X 有点有限的点星 sn 网 ⇔ X 有点有限加细的点星 cs^* 网.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

3.2 序列覆盖映射、1 序列覆盖映射及相关的例子

从定理 2.0.1(3),定理 3.1.8 可见 1 序列覆盖映射的独特性质及它与序列覆盖映射的联系. 本节继续探讨 1 序列覆盖映射的性质. 主要内容由三部分组成, 一是寻求度量空间的 1 序列覆盖(2 序列覆盖)映象的内在刻画, 二是讨论怎样的序列覆盖映射是 1 序列覆盖映射, 三是以几个例子说明几类序列覆盖映射之间的不蕴含关系.

我们对于度量空间的 1 序列覆盖(2 序列覆盖)的紧映象与 s 映象都有了较好的刻画, 那么度量空间的 1 序列覆盖(2 序列覆盖)映象又有怎样的内在特征?

下述引理可直接验证.

引理 3.2.1 设 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ 都是 1 序列覆盖(2 序列覆盖)映射, 那么 $gf: X\to Z$ 也是 1 序列覆盖(2 序列覆盖)映射. ■

定理 3.2.2[132] 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖(2 序列覆盖)映象当且仅当 X 是 snf 可数(so 可数)空间.

证明 仅证 1 序列覆盖映射的情形, 2 序列覆盖映射的情形是类似的.

设 $f: M\to X$ 是 1 序列覆盖映射, 其中 M 是度量空间. 对于 $x\in X$, 存在 $\beta\in M$ 满足定义 1.2.2(6)中 1 序列覆盖映射的条件. 让 $\mathbf{B}_\beta$ 是点 β 在 M 中的可数的局部邻域基, 令 $\mathbf{P}_x = f(\mathbf{B}_\beta)$, 则 $\mathbf{P}_x$ 是 x 在 X 中的可数的 sn 网. 故 X 是 snf 可数空间.

设 X 是 snf 可数空间, 让 $\mathbf{P}$ 是使得 X 是 snf 可数空间的 X 的 sn 网. 记 $\mathbf{P}=\{P_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$. 置 $M=\{\beta=(\alpha_i)\in\Lambda^\omega: <P_{\alpha_i}>$ 是 X 中某点 $x(\beta)$ 在 X 中的网$\}$, 则 M 作为离散空间 Λ 的 ω 次积空间所诱导的子空间是度量空间. 定义 $f: M\to X$ 使得 $f(\beta)=x(\beta)$, 则从定理 3.1.8 的(8.2)的证明知 f 是从 M 到 X 上的 1 序列覆盖映射. ■

由引理 1.2.4 和定理 3.2.2 有,

推论 3.2.3 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖(2 序列覆盖)的商映象当且仅当 X 是 gf 可数(第一可数)空间. ■

推论 3.2.4 1 序列覆盖映射保持 snf 可数空间; 1 序列覆盖商映射保持 gf 可数空间; 2 序列覆盖映射保持 sof 可数空间; 2 序列覆盖商映射保持第一可数空间. ■

注 3.2.5 (1) 作者在文[119, 定义 3.11]中定义了"csf 可数空间", 即空间 X 存在子集族 $\mathbf{P}=\cup\{\mathbf{P}_x: x\in X\}$使得每一 $\mathbf{P}_x$ 是 x 在 X 中的可数递减的 cs 网. 对于 $x\in X$, 若设 $\mathbf{P}_x=\langle P_n\rangle$是点 x 在 X 中的递减的 cs 网, 如果$\{x\}$是 X 的序列开集, 则所有的 P_n 是 x 在 X 中的序列邻域. 如果$\{x\}$不是 X 的序列开集, 则存在 X 中非平凡的序列收敛于点 x, 于是对于每一 $n\in N$, $P_n\neq\{x\}$, 取定 $p_n\in P_n\setminus\{x\}$. 对于每一 $m\in N$, 我们证明 P_m 是 x 在 X 中的序列邻域. 若不然, 那么存在 X 中的序列$\{y_n\}$收敛于点 x 且 $<y_n>\cap P_m=\emptyset$, 由于 $\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中的 cs 网, 存在 $i\in N$ 使得序列$\{y_n\}$是终于 P_i 的且 $P_i\subset X\setminus\{p_j: j\le m\}$, 从而 $i>m$, 于是$\{y_n\}$是终于 P_m 的, 这与 y_n 的选取相矛盾. 所以 $\mathbf{P}_x$ 也是 x 在 X 中的 sn 网, 故"csf 可数空间是 snf 可数空间". 从而象序列扇 S_ω 这类具有可数 cs 网的空间也未必是 csf 可数空间. 因此文[119]中关于 csf 空间的定义是不恰当的, 问题在于它要求点的 cs 网的递减性, 因此可将 csf 空间的定义修改为"空间 X 存在子集族 $\mathbf{P}=\cup\{\mathbf{P}_x: x\in X\}$使得每一 $\mathbf{P}_x$ 是 x 在 X 中可数的 cs 网". 这时 csf 可数空间类严格地包含 snf 可数空间类, 具有点可数 cs 网的空间是 csf 可数空间, 且文[119]中所涉及的关于 csf 可数空间的命题依然成立.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(2) 从定理 3.2.2, 认为"空间 X 是度量空间的序列覆盖映象当且仅当 X 是 csf 可数空间"是很自然的. 但这是不正确的. 一方面, 任何空间都是某一度量空间的序列覆盖映象. 事实上, 设 X 是一空间, 让 $M = \oplus\{S : S$ 是 X 的含极限点的收敛序列$\}$, 则 M 是度量空间且从 M 到 X 上的自然映射是序列覆盖映射. 另一方面, 存在非 csf 可数的空间. 由于扇空间 S_{ω_1} 恰有一个非孤立点, 若 S_{ω_1} 在非孤立点处具有可数的 cs 网, 那么 S_{ω_1} 自身就具有点可数的 cs 网, 但 S_{ω_1} 不具有点可数的 cs 网[113, 命题 2.7.21], 所以它不是 csf 可数空间. ■

本节的第二部分讨论怎样的序列覆盖映射是 1 序列覆盖映射. 定理 3.1.8 暗示我们可以从考虑度量空间的序列覆盖的紧映射是否是 1 序列覆盖映射入手. 下述定理表明这一猜想是正确的.

定理 3.2.6[131]　设 $f: X \to Y$ 是序列覆盖的紧映射. 如果 X 是度量空间, 则 f 是 1 序列覆盖映射.

证明　因为 X 是度量空间, 由定理 1.2.8, 存在 X 的局部有限的开覆盖列$\{\mathbf{B}_n\}$满足:

(6.1) 每一 $\mathbf{B}_{n+1}$ 星加细 $\mathbf{B}_n$.

(6.2) $\{\mathbf{B}_n\}$是 X 的展开.

对于每一 $n \in N$, 置 $\mathbf{P}_n = f(\mathbf{B}_n)$, 则

(6.3) 对于每一 $z \in Y$, 存在 $P_z \in \mathbf{P}_n$ 使得 P_z 是 z 在 Y 中的序列邻域.

因为 f 是紧映射, $\mathbf{P}_n$ 是 Y 的点有限覆盖. 设 $(\mathbf{P}_n)_z = \{P_n : i \le k\}$. 对于每一 $i \le k$, 如果 P_i 不是 z 在 Y 中的序列邻域, 则存在 Y 中的序列$\{z_{in}\}_n$ 收敛于点 z 且所有的 $z_{in} \notin P_n$. 定义 $z_m = z_{in}$, 其中 $m = (n-1)k + i$ 且 $i \le k$, 则序列$\{z_m\}$收敛于 z. 因为 f 是序列覆盖映射, 存在序列$\{x_m\}$收敛于点 $x \in f^{-1}(z)$ 且每一 $x_m \in f^{-1}(z_m)$. 取 $B \in (\mathbf{B}_n)_x$, 那么存在 $m_0 \in N$ 使得当 $m \ge m_o$ 时有 $x_m \in B$, 于是存在 $i \le k$ 有 $P_i = f(B)$, 从而当 $n \ge m_0$ 时有 $z_{in} \in P_i$, 矛盾.

对于每一 $y_0 \in Y$, 置 $U_n = \{x \in X :$ 对于每一 $B \in (\mathbf{B}_n)_x$, $f(B)$ 不是 y_0 在 Y 中的序列邻域$\}$. 则

(6.4) 如果 $x \in U_n$, 则 $\cap(\mathbf{B}_{n+1})_x \subset U_{n+1}$.

若不然, 存在点 $p \in \cap(\mathbf{B}_{n+1})_x \setminus U_{n+1}$, 由 U_{n+1} 的定义, 对于某一 $B \in (\mathbf{B}_{n+1})_p$, $f(B)$ 是 y_0 在 Y 中的序列邻域. 取某一 $B_1 \in (\mathbf{B}_{n+1})_x$, 则 $p \in B \cap B_1$, 于是由(6.1), 对于某一 $B_2 \in \mathbf{B}_n$ 有 $B \cup B_1 \subset B_2$, 因此 $B_2 \in (\mathbf{B}_n)_x$ 且 $f(B_2)$ 是 y_0 在 Y 中的序列邻域, 故 $x \notin U_n$, 矛盾.

(6.5) $f^{-1}(y_0) \not\subset \cup < U_n >$.

若不然, $f^{-1}(y_0) \subset \cup < U_n >$. 由(6.4), 对于每一 $n \in N$, $U_n \subset \cup\{\cap(\mathbf{B}_{n+1})_x : x \in U_n\} \subset U_{n+1}$. 因为 $f^{-1}(y_0)$ 是 X 的紧子集且 $\cap(\mathbf{B}_{n+1})_x$ 是 X 的开子集, 存在 $m \in N$ 有 $f^{-1}(y_0) \subset U_m$. 由(6.3), 存在 $B \in \mathbf{B}_m$ 使得 $f(B)$ 是点 y_0 在 Y 中的序列邻域, 于是 $\varnothing \ne f^{-1}(y_0) \cap B \subset X \setminus U_m$, 矛盾.

现在, 固定点 $x_0 \in f^{-1}(y_0) \setminus \cup < U_n >$, 那么

(6.6) 如果在 Y 中的序列$\{y_i\}$收敛于 y_0, 则存在 X 中收敛于点 x_0 的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i \in f^{-1}(y_i)$.

对于每一 $n \in N$, 由于 $x_0 \notin U_n$, 存在 $B_n \in (\mathbf{B}_n)_{x_0}$ 使得 $f(B_n)$ 是 y_0 在 Y 中的序列邻域. 由引理 3.1.7, 存在 X 中收敛于点 x_0 的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i \in f^{-1}(y_i)$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

总之, f 是 1 序列覆盖映射. ■

下面讨论序列覆盖闭映射的情形. 文[131]曾提出下述问题:具有可数 cs 网的 Fréchet 空间是否是可分度量空间的序列覆盖的闭映象?特别地,序列扇 S_ω 既是可分度量空间的序列覆盖映象,又是可分度量空间的闭映象,那么 S_ω 是否是可分度量空间的序列覆盖的闭映象?这一问题的探讨产生了度量空间的一个出乎意料的映射定理(见定理 3.2.8,主要由燕鹏飞证明),它也说明上述问题的回答是否定的.我们知道,有不少的映射保持可度量性,如下是著名的 Hanai-Morita-Stone 定理[49],

引理 3.2.7 设 X 是可度量空间, $f: X \to Y$ 是闭映射,则下述条件相互等价:

(1) Y 是可度量空间.

(2) Y 是第一可数空间.

(3) 对于每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集. ■

由此可知完备映射或既开且闭的映射保持可度量性. 已有的研究表明度量空间上的序列覆盖映射具有与开映射类似的一些良好性质. 下述定理再一次说明了序列覆盖映射与开映射的类似性质.

定理 3.2.8[250] 序列覆盖闭映射保持可度量性

证明 设 X 是可度量空间, $f: X \to Y$ 是序列覆盖的闭映射. 由引理 3.2.7,为证明 Y 是可度量空间,只须证明 Y 是第一可数空间. 由 X 的可度量性及定理 1.2.8,存在 X 的局部有限的开覆盖列$\{\mathbf{R}_n\}$满足:

(8.1) 每一 $\mathbf{R}_{n+1}$ 星加细 $\mathbf{R}_n$.

(8.2) $\{\mathbf{R}_n\}$ 是 X 的展开.

对于任一 $t_0 \in Y$,若 Y 中不存在非平凡的序列收敛于点 t_0,由于 Y 是 Fréchet 空间,则 t_0 是 Y 的孤立点,从而它是 Y 的第一可数点. 现在设 t_0 是 Y 中的某一非平凡收敛序列的极限点,取定 Y 中由互不相同点组成的序列$\{t_n\}$收敛于 t_0. 对于每一 $n \in N$,置 $\mathbf{P}_n = \{f(R): R \in \mathbf{R}_n$ 且 $\{t_n\}$ 是终于 $f(R)$ 的$\} = \{P_\alpha: \alpha \in \Gamma_n\}$. 由于 f 是闭映射且 $\mathbf{R}_n$ 在 X 中是局部有限的,所以 $\mathbf{P}_n$ 是 Y 的遗传闭包保持集族.

(8.3) $\mathbf{P}_n$ 是有限的.

若 $\mathbf{P}_n$ 是无限的,则存在$\{t_n\}$的子序列$\{t_{n_k}\}$和 $\mathbf{P}_n$ 的无限子族 $\langle P_k \rangle$ 使得每一 $t_{n_k} \in P_k$,由于 $\langle P_k \rangle$ 是遗传闭包保持的,所以 $\langle t_{n_k} \rangle$ 在 Y 中是离散的,这一矛盾说明 $\mathbf{P}_n$ 是有限的.

(8.4) 存在 $R \in \mathbf{R}_n$ 使得 $f(R)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域且对于 $f(R)$ 中任一收敛于 t_0 的序列 K,存在 R 中的收敛序列 L 有 $f(L) = K$.

对于每一 $\alpha_n \in \Gamma_n$, P_{α_n} 或者不是 t_0 的序列邻域,或者是 t_0 的序列邻域. 若(8.4)不成立,则存在 Y 中的收敛于 t_0 的序列 K_{α_n} 使得或者 $(K_{\alpha_n} \setminus \{t_0\}) \cap P_{\alpha_n} = \emptyset$,或者 $K_{\alpha_n} \subset P_{\alpha_n}$ 且对于 $\mathbf{R}_n$ 中任一使得 $f(R) = P_{\alpha_n}$ 的元 R, R 中不存在收敛序列 L_{α_n} 满足 $f(L_{\alpha_n}) = K_{\alpha_n}$. 令 $K_n = ((\cup_{\alpha_n \in \Lambda_n} K_{\alpha_n}) \cup \langle t_n \rangle) \cap P_{\alpha_n}$,由 Γ_n 的有限性知 K_n 是 Y 中收敛于 t_0 的序列. 因为 f 是序列覆盖映射,存在 X 中的收敛序列 L_n 使得 $f(L_n) = K_n$,从而存在 $R \in \mathbf{R}_n$ 使得 L_n 是终于 R 的,于是有 $\alpha_n \in \Gamma_n$ 使得 $f(R) = P_{\alpha_n}$,这时 $(K_{\alpha_n} \setminus \{t_0\}) \cap P_{\alpha_n} \neq \emptyset$ 且存在 R 中的收敛序列 L 有 $f(L) = K_{\alpha_n}$,这一矛盾说明(8.4)成立.

设 $\langle f(R_k) \rangle$ 是如上所获得的 t_0 的序列邻域列,因为 Y 是 Fréchet 空间,每一 $f(R_k)$ 是 t_0

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

在 Y 中的邻域,而且

(8.5) $\langle f(R_k)\rangle$ 是 t_0 在 Y 中的邻域基.

因为序列$\{t_n\}$是终于每一 $f(R_n)$ 的,由(8.4),存在序列$\{t_n\}$的子序列$\{t_{n_k}\}$使得每一 $R_k \cap f^{-1}(t_{n_k}) \neq \varnothing$,取 $a_k \in R_k \cap f^{-1}(t_{n_k})$,则由于 f 是闭映射知序列$\{a_k\}$在 X 中有聚点,于是它存在收敛于 X 中某点 a 的子序列$\{a_{k_i}\}$,这时 $a \in f^{-1}(t_0)$. 设 V 是 t_0 在 Y 中的邻域,则 $f^{-1}(V)$ 是 a 在 X 中的邻域,由(8.2),存在自然数 m 使得 $st(a, \mathbf{R}_m) \subset f^{-1}(V)$. 因为序列$\{a_{k_i}\}$收敛于 a,存在自然数 $i > m$ 和 $R' \in \mathbf{R}_{m+1}$ 使得 $a_{k_i} \in st(a, \mathbf{R}_{m+1})$ 且 $R_{k_i} \subset R'$. 设 $a_{k_i} \in R'' \in (\mathbf{R}_{m+1})_a$,由(8.1),$R' \cup R'' \subset st(a, \mathbf{R}_m)$,这说明 $R_{k_i} \subset f^{-1}(V)$,因此 $t_0 \in P_{a_{k_i}} = f(R_{k_i}) \subset V$,故(8.5)成立.

由此可见,Y 在点 t_0 是第一可数的. 因此 Y 是第一可数空间,故 Y 是可度量空间. ■

S_ω 是具有可数 cs 网的不可度量化的 Fréchet 空间,所以 S_ω 不是度量空间的序列覆盖的闭映象.

定理 3.2.9[250]　设 $f: X \to Y$ 是序列覆盖的闭映射,如果 X 是可度量空间,则 f 是 1 序列覆盖映射.

证明　对于任一 $t_0 \in Y$,不妨设 t_0 是 Y 中的某一非平凡收敛序列的极限点,取定 Y 中由互不相同点组成的序列$\{t_n\}$收敛于 t_0. 因为 X 是可度量空间,由定理 1.2.8,存在 X 的局部有限的开覆盖列$\{\mathbf{R}_n\}$满足:

(9.1) 每一 $\mathbf{R}_{n+1}$ 星加细 $\mathbf{R}_n$.

(9.2) $\{\mathbf{R}_n\}$是 X 的展开.

对于每一 $n \in N$,置 $\mathbf{P}_n = f(\mathbf{R}_n)$. 如定理 3.2.8 的(8.4)知,

(9.3) 存在 $R \in \mathbf{R}_n$ 使得 $f(R)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域且对于 $f(R)$ 中任一收敛于 t_0 的序列 K,存在 R 中的收敛序列 L 有 $f(L) = K$.

置 $U_n = \{p \in X$: 对于每一 $R \in (\mathbf{R}_n)_p$, $f(R)$ 不是 t_0 在 Y 中的序列邻域$\}$,由定理 3.2.6 的(6.4)的证明有,

(9.4) 如果 $x \in U_n$,则 $\cap(\mathbf{R}_{n+1})_x \subset U_{n+1}$.

于是,

(9.5) $\partial f^{-1}(t_0) \not\subset \cup\langle U_n\rangle$.

否则,$\partial f^{-1}(t_0) \subset \cup\langle U_n\rangle$. 由(9.4),对于每一 $n \in N$, $U_n \subset \cup\{\cap(\mathbf{R}_{n+1})_x : x \in U_n\} \subset U_{n+1}$. 由定理 3.2.8 和引理 3.2.7, $\partial f^{-1}(t_0)$ 是 X 的紧子集,而 $\cap(\mathbf{R}_{n+1})_x$ 是 X 的开子集,所以对于某一 $m \in N$ 有 $\partial f^{-1}(t_0) \subset U_m$. 由(9.3),存在 $R \in \mathbf{R}_m$ 使得 $f(R)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域且存在 $k \in N$ 和 R 中的收敛序列 L 有 $f(L) = \{t_n : n \geq k\}$. 设 L 在 X 中收敛于 l,则 $l \in \partial f^{-1}(t_o) \cap R \subset X \setminus U_m$,矛盾.

现在,固定点 $x_0 \in \partial f^{-1}(t_0) \setminus \cup\langle U_n\rangle$,由定理 3.2.6 的(6.6)的证明有,

(9.6) 如果在 Y 中序列$\{y_i\}$收敛于 t_0,那么存在 X 中收敛于点 x_o 的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i \in f^{-1}(y_i)$.

这表明,f 是 1 序列覆盖映射. ■

定理 3.2.8 说明了度量空间上的序列覆盖映射具有与开映射类似的一些良好性质. 这并不是偶然的,从定义 1.2.2 可见,序列覆盖映射、1 序列覆盖映射及 2 序列覆盖映射都具有一种

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

所谓的收敛序列的"拉回"性质,而开映射具有收敛序列的"拉回"性质早已为人们所重视并发挥了积极的作用. 早在 1935 年 Eilenberg[48]就证明了下述性质:设 $f: X \to Y$ 是开映射, X 和 Y 是紧度量空间,那么 f 是开映射当且仅当如果在 Y 中序列 $\{y_n\}$ 收敛于点 y,则在超空间 2^X 中序列 $\{f^{-1}(y_n)\}$ 收敛于点 $f^{-1}(y)$ (见文[170,定理 13.5]). Nadler[170]的著作表明 Eilenberg 的定理被应用于连续统的分解结构. 1971 年 Siwiec[200]叙述了第一可数空间上的开映射是序列覆盖映射. 1991 年恽自求[259]实际上证明了具有点 G_δ 性质的正则空间上的开闭映射是序列覆盖映射,并由此导出开闭映射保持 $\aleph$ 空间性质. 本节的最后一个定理将进一步揭示开映射与 1 序列覆盖(2 序列覆盖)映射的关系.

定理 3.2.10 设 $f: X \to Y$. 若 X 是第一可数空间,那么

(1) f 是几乎开映射当且仅当 f 是 1 序列覆盖的伪开映射.

(2) f 是开映射当且仅当 f 是 2 序列覆盖的商映射.

证明 设 f 是几乎开(开)映射. 显然, f 是伪开(商)映射. 对于 $y \in Y$ 及 $x \in f^{-1}(y)$ 满足定义 1.2.1(5)的要求(任意的 $x \in f^{-1}(y)$). 由于 X 是第一可数空间,让 $< B_n >$ 是点 x 在 X 中的递减的局部基,那么 $< f(B_n) >$ 是点 y 在 Y 中的递减的邻域基. 由引理 3.1.7,如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于点 y,那么存在 X 中的收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$,所以 f 是 1 序列覆盖(2 序列覆盖)映射.

反之,设 f 是 1 序列覆盖的伪开映射. 对于 $y \in Y$,存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足定义 1.2.2(6)的要求. 如果 U 是 x 在 X 中的邻域,我们要证明 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域. 对于 Y 中收敛于 y 的序列 $\{y_n\}$,存在 X 中的收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$,于是序列 $\{x_n\}$ 是终于 U 的,从而序列 $\{y_n\}$ 是终于 $f(U)$ 的,因此 $f(U)$ 是 y 的序列邻域. 由于 X 是第一可数空间,所以 Y 是 Fréchet 空间,故 $f(U)$ 是 y 的邻域,于是 f 是几乎开映射.

设 f 是 2 序列覆盖的商映射. 对于 X 的开集 U 及 $y \in f(U)$,若 Y 中序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y,取定点 $x \in f^{-1}(y) \cap U$,则存在 X 中的收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$,于是序列 $\{x_n\}$ 是终于 U 的,从而序列 $\{y_n\}$ 是终于 $f(U)$ 的,因此 $f(U)$ 是 y 的序列邻域. 由于 y 的任意性知 $f(U)$ 是 Y 的序列开集. 因为 X 是第一可数空间,所以 Y 是序列空间,故 $f(U)$ 是 Y 的开集,于是 f 是开映射. ■

几类序列覆盖映射及相关的与商映射、开映射等之间的关系,尤其是度量空间上几类序列覆盖映射之间的关系,已在定义 1.2.2、引理 1.2.4、定理 2.0.1、定理 3.0.3、定理 3.1.8、定理 3.1.11、推论 3.1.13、定理 3.2.6、定理 3.2.9 和定理 3.2.10 等中有所反映. 本节的最后举几个与这些结果相关的涉及序列覆盖映射的例子说明一些不蕴含关系.

例 3.2.11 (1) 紧度量空间上的完备映射未必是序列覆盖映射.

设 $X = (\{0\} \cup \{1/2n : n \in N\}) \oplus (\{0\} \cup \{1/(2n-1) : n \in N\})$, $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$. X, Y 都赋予实数的子空间拓扑,则 X 和 Y 都是紧度量空间. 让 $f: X \to Y$ 是显然映射,则 f 是完备映射,但它不是序列覆盖映射.

(2) 完备映射未必是序列商映射.

设 X 是极大紧化 βN, $Y = \{0\} \cup \{1/2n : n \in N\}$. 定义 $f: X \to Y$ 使得 $f(\beta N \setminus N) = \{0\}$ 且 $f(1/n) = 1/n$,那么 f 是完备映射,但 f 不是序列商映射. 文[113,命题 2.1.7]已证明具有点 G_δ 性质空间上的伪序列覆盖映射是序列商映射.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(3) 可分度量空间到紧度量空间上的伪序列覆盖的商紧映射未必是紧覆盖映射.

我们介绍 Michael[156]构造的例子. 设 I 是赋予通常欧氏拓扑的单位闭区间. 对于每一 $x \in I$,取定 O_x 是$\{x\} \times I$ 中长度为 1/4 的开区间,令 X 是 $I \times I$ 的子空间$\{(x, y) \in I \times I : y \notin I_x\}$, $Y = I$,则 X 是可分度量空间, Y 是紧度量空间. 定义 $f: X \to Y$ 是从 X 的点到它的第一个坐标的投影映射,那么 f 是伪序列覆盖的商紧映射,但 f 不是紧覆盖映射.

(4) 紧度量空间上的序列覆盖的闭映射未必是开映射.

设 $X = (\{0\} \cup \{1/n : n \in N\}) \oplus (\{0\} \cup \{1/2n : n \in N\})$, $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$. X, Y 都赋予实数的子空间拓扑,则 X 和 Y 都是紧度量空间. 让 $f: X \to Y$ 是显然映射,则 f 是序列覆盖的闭映射,但它不是开映射.

(5) 度量空间上的 2 序列覆盖映射未必是紧覆盖映射或商映射.

设 Y 是极大紧化 βN,空间 X 是集合 βN 赋予离散拓扑,则 X 是度量空间. 让 $f: X \to Y$ 是恒等映射,则 f 是 2 序列覆盖映射,但 f 既不是紧覆盖映射又不是商映射.

(6) 度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象未必是度量空间的 2 序列覆盖映象或度量空间的伪开映象.

设 X 是 Arens 空间 S_2. 由于 X 具有点正则弱基,从推论 3.1.9 知 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象. 由于 X 既不是 so 可数空间又不是 Fréchet 空间,从定理 3.2.2 或文[113]命题 2.3.1(2)知 X 既不是度量空间的 2 序列覆盖映象又不是度量空间的伪开映象.

(7) 度量空间的序列覆盖的伪开 s 映象未必是度量空间的 1 序列覆盖映象.

设 X 是序列扇 S_ω. 由于 X 是具有可数 cs 网的 Fréchet 空间,从定理 2.0.1(2)和定理 1.2.4(2)和(3)知 X 是度量空间的序列覆盖的伪开 s 映象. 由于 X 不是 snf 可数空间,从定理 3.2.2 知 X 不是度量空间的 1 序列覆盖映象.

(8) 可分度量空间的紧覆盖的商紧映象未必是度量空间的序列覆盖的紧映象

设 X 是文[215]的例 2.14(3)所构造的具有可数弱基的正则的非 g 可展空间. 由推论 3.1.12 知 X 是可分度量空间的紧覆盖的商紧映象. 由于 X 不是 g 可展空间,从文[215]定理 2.3 知 X 不是度量空间的序列覆盖的紧映象.

(9) 开映射未必是子序列覆盖映射.

设 $X = \{0\} \cup N^2$,对于 $n, i \in N$,令 $V(n, i) = \{(n, k) \in N^2 : k \geq i\}$. 集合 X 赋予如下拓扑: N^2 中的点是 X 的孤立点,点 0 的开邻域基中的元形如$\{0\} \cup (\cup_{n \geq m} V(n, i_n))$,其中 $m, i_n \in N$. 让 $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$. 定义 $f: X \to Y$ 使得 $f(0) = 0$ 且 $f((n, i)) = 1/n$,则 f 是开映射,但 f 不是子序列覆盖映射.

(10) 度量空间上的紧覆盖映射未必是商映射.

设 $Y = N \cup \{p\}$,其中 $p \in \beta N \setminus N$,则 Y 的所有紧子集是可度量化的且 Y 不是 k 空间. 让 $X = \oplus\{Z : Z$ 是 Y 的非空紧子集$\}$,则 X 是度量空间. 定义 $f: X \to Y$ 是显然映射,则 f 是紧覆盖映射,但 f 不是商映射.

(11) 度量空间上的序列商的伪开映射未必是伪序列覆盖映射.

设 $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$, $Z = \Psi(N)$ 是 Gillman-Jerison 空间(见文[113]例 1.8.4). 定义 $g: Z \to Y$ 使得 $g(\Psi(N) \setminus N) = \{0\}$且 $g(n) = 1/n$. 由于在 $\Psi(N)$ 中 N 的任一无限子集有聚点在 $\Psi(N) \setminus N$ 中,所以 g 是序列商映射. 又由于 Z 是第一可数空间,从定理 3.2.2 知存在度量

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

空间 X 和 2 序列覆盖映射 $h: X \to Z$. 于是复合映射 $f = g \cdot h: X \to Y$ 是序列商映射. 因为 Y 是 Fréchet 空间,由定理 1.2.4(2) 和(3) 知 f 是伪开映射. 但 f 不是伪序列覆盖映射,否则存在 X 的紧子集 K 使得 $f(K) = Y$,即 $g(h(K)) = Y$,于是 g 是紧覆盖映射,矛盾. ■

问题 3.2.12 设 X 是度量空间,$f: X \to Y$ 是序列商的紧映射,那么 f 是否是伪序列覆盖映射?

第四章 关于《广义度量空间与映射》

出版于 1995 年的《广义度量空间与映射》[113]力求通过广义度量空间类的映射定理反映广义度量空间的基本理论,总结 60 年代以来空间与映射的重要研究成果. 近来发现其中的一些命题可叙述的更加精确,个别的命题论证有失误. 本章的目的,一是证明该书中的几个要求正则分离性条件的命题在 T_2 空间中仍是正确的,二是举例说明该书中的若干命题正则性是必不可少的条件,三是指出该书中的一些命题论证中的失误.

4.1 T_2 空间中的一些广义度量定理

《广义度量空间与映射》[113]一书所论空间至少是具有 T_2 分离性的拓扑空间,其中相当部分的结果附加了正则性. 对于拓扑空间分离性的探讨起源于本世纪初[49],不少的广义度量空间论文或著作都要求所论的空间均具有正则性[79,169]. 存在具有可数基的不可度量化的空间说明了正则性对于广义度量理论的重要性,但象 σ 空间的 g 函数刻画等一批经典的广义度量定理并没有使用正则性,许多的覆盖性质在不附加分离性的条件下更是获得了满意的特征,尤其是近来 Buhagiar,Miwa 和 Pasynkov[22,23]在纤维丛一般拓扑学的进展更加促使我们从新全面地审视《广义度量空间与映射》中的正则性.

《广义度量空间与映射》[113]中正则性的使用一方面是由于空间自身对于正则性的要求而必须附加的条件,如 g 可度量空间,(mod k) 可度量空间,M_i 空间,$\aleph_0$ 空间,$\aleph$ 空间,cosmic 空间,k 半层空间,Moore 空间,σ 空间等都设该空间是正则空间,但也有一些结果是可以在不附加正则性的条件下获得的. 尽管正则性是一熟知的拓扑性质,我们还是获得了一些新认识,如证明了强 $\sum^*$ 空间是次仿紧空间,具有可数弱基的空间未必是可分度量空间的商紧映象等. 为了查找与核对的方便,本节中命题的排列基本上按原书的顺序.

定理 4.1.1 对于空间 X,下述条件相互等价:

(1) X 具有局部可数 cs* 网.

(2) X 具有局部可数 cs 网.

(3) X 具有局部可数紧有限分解网.

(4) X 是度量空间的紧覆盖 ss 映象. [113,定理 2.8.6]

证明 (1) ⇒(2). 设 **P** 为空间 X 的局部可数 cs* 网. 对于 $x \in X$,存在 x 在 X 中的开邻域 V_x 使得 V_x 与 **P** 中至多可数多个元相交. 令 $\mathbf{F} = \{P \in \mathbf{P}: 存在\ V_x \supset P\}$. 则 **F** 是星可数的. 由引理 2.4.10,$\mathbf{F} = \cup_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{F}_\alpha$,$X$ 是 $\aleph_0$ 子空间族$\{F_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$的互不相交并,且每一 $\mathbf{F}_\alpha$ 是 F_α 的可数的 cs* 网. 让 $\mathbf{H}_\alpha$ 是 $\mathbf{F}_\alpha$ 的有限并的全体,$\mathbf{H} = \cup_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{H}_\alpha$. 由于每一 V_x 至多与可数多个 F_α 相交,**H** 是局部可数的,往证它是 X 的 cs 网. 设 U 是 X 的开子集,并且 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x \in U$,由引理 2.2.6,存在 $m \in N$ 和 $\mathbf{P}' \in \mathbf{P}^{<\omega}$ 使得$\{x\} \cup \{x_n: n \geq m\} \subset \cup \mathbf{P}' \subset U \cap V_x$ 且 $x \in \cap \mathbf{P}'$,这

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

时有唯一的 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $x\in F_\alpha$,则 $\cup\mathbf{P}'\in\mathbf{H}_\alpha$,从而 $\mathbf{H}$ 是 X 的 cs 网.

(2) ⇒(3) . 设 X 具有局部可数的 cs 网 ,则 X 的紧子集是可度量化的 ,由引理 2. 3. 5 知 X 的局部可数 cs 网就是 X 的紧有限分解网.

(3) ⇒(4) . 设 X 具有紧有限分解网 ,由文[113]的命题 2. 7. 1 , X 是度量空间的 ss 映象 ,再由引理 2. 3. 7 这 ss 映射是紧覆盖映射.

(4) ⇒(1) . 设 X 是度量空间的紧覆盖 ss 映象 ,则这紧覆盖映射是序列商映射 ,于是 X 具有局部可数的 cs^* 网. ■

定理 4. 1. 2　对于空间 X ,下述条件相互等价 ,且蕴含 X 是第一可数空间.

(1) X 是具有点可数 k 网的强 Fréchet 空间.

(2) X 是具有点可数 sk 网的 k 空间.

(3) X 是具有点可数 sk 网的 c 空间. [113 ,定理 3. 1. 4]

证明　(1) ⇒(2) . 由文[113 ,引理 3. 1. 3(3)] ,强 Fréchet 空间的点可数 k 网是点可数的 sk 网.

(2) ⇒(3) . 由文[113 ,命题 3. 1. 2] ,具有点可数 sk 网的 k 空间是序列空间 ,所以它是 c 空间.

(3) ⇒(1) . 设 (X,τ) 是具有点可数 sk 网的 c 空间 ,我们证明 X 是第一可数空间. 对于任一 $x_0\in X$,在 X 上作新拓扑 τ^* 如下 :对于 $x\neq x_0$, $\{x\}\in\tau^*$,点 x_0 的邻域基取为原拓扑 τ 在 X 中的邻域基 ,那么 τ^* 是正则空间. 若对于 X 的子集 C 有 $x\in cl_{\tau^*}(C)$,如果 $x\neq x_0$,取 $D=\{x\}$,则 $x\in cl_{\tau^*}(D)$,如果 $x=x_0$,则 $x\in cl_\tau(C)$,由于 (X,τ) 是 c 空间 ,存在 C 的可数子集 D 使得 $x\in cl_\tau(D)$,于是 $x\in cl_{\tau^*}(D)$,所以 (X,τ^*) 是 c 空间. 设 $\mathbf{P}$ 是空间 (X,τ) 的点可数 sk 网 ,记 $\mathbf{P}^*=\{\{x\}:x\neq x_0\}\cup\mathbf{P}$,则 $\mathbf{P}^*$ 是点可数的. 设 $x\in U\in\tau^*$,若 $x\neq x_0$,取 $F=\{x\}\in\mathbf{P}^*$,则 $x\in int_{\tau^*}(F)\subset F\subset U$,若 $x=x_0$,则存在 $V\in\tau$ 使得 $x\in V\subset U$,于是有 $\mathbf{F}\in\mathbf{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in int_\tau(\cup\mathbf{F})\subset\cup\mathbf{F}\subset V$,这时 $x\in int_{\tau^*}(\cup\mathbf{F})\subset\cup\mathbf{F}\subset U$,从而 P^* 是空间 (X,τ^*) 的点可数的 sk 网. 故 (X,τ^*) 是具有点可数的 sk 网的正则的 c 空间 ,由文[113 ,定理 3. 1. 4] , τ^* 是第一可数空间 ,于是 (X,τ) 在 x_0 具有可数局部基. 故 X 是第一可数空间. ■

定理 4. 1. 3　具有严格 p 序列和点可数 p-k 网的空间是可展空间. [113 ,命题 3. 1. 8]

证明　设 X 是具有严格 p 序列和点可数 p-k 网的空间 ,由文[113]的命题 3. 1. 8 所证知 X 具有 G_δ 对角线 ,再由文[113]的定理 3. 5. 1 和命题 1. 5. 18 知 X 是 $\sigma^\#$ 空间. 文[113]的定理 1. 7. 7(2) (没使用正则性) 表明 X 是可展空间. ■

定理 4. 1. 4　具有点可数 p-k 网的强 Σ 空间具有 σ 局部有限的闭网. [113 ,推论 3. 1. 11]

证明　设空间 X 是具有点可数 p-k 网的强 Σ 空间. 首先 ,证明 X 具有 σ 局部有限网. 设 $\mathbf{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的 σ 局部有限闭 (modk) 网 ,则 $\mathbf{P}$ 是 X 的几乎 (modk) 网 ,由文[113 ,引理 2. 10. 6] ,存在度量空间 M , M 的 σ 离散基 $\mathbf{B}$, $X\times M$ 的子空间 Z 满足下述两条件 ,其中 $f=\pi_1|_Z$, $g=\pi_2|_Z$:

(4. 1) $\mathbf{P}=fg^{-1}(\mathbf{B})$.

(4. 2) $g:Z\to M$ 是完备映射.

由(4. 2)知 Z 是仿紧 M 空间. 因为 $X\times M$ 具有点可数 p-k 网 ,所以 Z 是具有点可数 p-k 网

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

的仿紧 M 空间,由文[113,定理 3.1.9], Z 是度量空间. 由于 **B** 是 M 的基, $g^{-1}(\mathbf{B})$ 是 Z 的(modk)网,再由(4.1)及文[113,推论 2.10.4(1)]知 f 是σ局部有限映射. 由 Z 是度量空间及文[113,推论 2.10.5(1)], X 具有σ局部有限网. 其次,证明 X 是$\sigma^{\#}$空间. 设 **Q** 是空间 X 的σ局部有限网,让 $\mathbf{R}=\{cl(Q):Q\in\mathbf{Q}\}$,则 **R** 是 X 的σ局部有限的闭子集族,对于 X 中不同的两点 x 和 y,存在 X 的分别包含 x 和 y 的互不相交的开子集 U 和 V,于是有 $Q\in\mathbf{Q}$ 使得 $x\in Q\subset U$,由于 $cl(U)\cap V=\varnothing$,从而 $x\in cl(Q)\subset X\setminus\{y\}$,故 **R** 是 X 的σ局部有限闭 p 网,因此 X 是$\sigma^{\#}$空间. 最后,由文[113]的推论 3.3.2(3) ⇒(1)的论证知 X 存在σ函数,于是 X 具有σ局部有限闭网. ■

从上述证明可见,若拓扑性质 Φ 是与度量性可积的和遗传的,如果仿紧 M 的 Φ 空间是可度量空间,那么强 Σ 的 Φ 空间具有σ局部有限闭网.

空间 X 称为次仿紧空间[24],若 X 的任一开覆盖存在σ离散的闭加细. 这也等价于 X 的任一开覆盖存在σ闭包保持的闭加细[24]. 下述引理是我们将要证明的几个与次仿紧性有关的命题的重要技巧. 它本质上应归功于文[22]的命题 1.5,恰是文[22]推论 4.3 证明的"次仿紧性是关于次仿紧映射逆不变的"启发我与 Buhagiar 博士讨论这些性质,并合作完成论文[21]. 感谢 Buhagiar 博士寄给我当时尚未发表的论文[23]. 对于空间 X,设 **U** 是 X 的子集族,且 G 是 X 的子集,记 $\mathbf{U}|_G=\{U\cap G:U\in\mathbf{U}\}$.

引理 4.1.5[21] 设 K 是空间 X 的紧子集. 如果 **U** 是 X 的开子集族且覆盖 K,则存在 X 的开子集 O 使得 $K\subset O$ 且 $\mathbf{U}|_O$ 在 O 中有有限的闭加细.

证明 因为 **U** 是 X 的开子集族且覆盖 K,存在 **U** 的有限子集$\{U_i:i\le n\}$使得 $K\subset\bigcup\{U_i:i\le n\}$. 对于每一 $x\in K$,存在 $i(x)\le n$ 使得 $x\in U_{i(x)}$. 让 $F(x)=K\setminus U_{i(x)}$. 因为 X 是 T_2 的且 $F(x)$ 是 X 的紧子集,存在 X 中的开集 $V(x)$ 和 $W(x)$ 使得 $x\in V(x)$, $F(x)\subset W(x)$ 且 $V(x)\cap W(x)=\varnothing$. 让 $G(x)=U_{i(x)}\cap W(x)$,那么 $G(x)$ 是 X 的开子集且 $K\subset G(x)$. 取 K 的有限子集$\{x_j:j\le m\}$使得 $K\subset\bigcup\{V(x_j):j\le m\}$. 让 $O=(\bigcap_{j\le m}G(x_j))\cap(\bigcup_{j\le m}V(x_j))\cap(\bigcup_{j\le n}U_i)$,则 O 是 X 的开子集且包含 K. 对于每一 $j\le m$,置 $P_j=cl_O[V(x_j)\cap O]$,那么 P_j 是 O 的闭子集, $O=\bigcup_{j\le m}P_j$,且 $P_j\setminus U_{i(x_j)}\subset(G(x_j)\setminus U_{i(x_j)})\cap cl_X(V(x_j))\subset W(x_j)\cap cl_X(V(x_j))=\varnothing$,因而 $P_j\subset U_{i(x_j)}$,于是$\{P_j:j\le m\}$是 $\mathbf{U}|_O$ 在 O 中的闭加细. ■

定理 4.1.6[21] 对于空间 X,下述条件相互等价:

(1) X 是强 Σ^* 空间.

(2) X 是次仿紧的 Σ^* 空间.

(3) X 是等紧的 Σ^* 空间. [113,定理 3.2.5]

证明 只须证明强 Σ^* 空间是次仿紧空间. 设 X 是强 Σ^* 空间,让 **P** 是空间 X 的由某些紧子集组成的覆盖 **C** 的σ遗传闭包保持的闭(modk)网. 如果 **U** 是 X 的开覆盖,对于每一 $x\in X$,存在紧子集 $C(x)\in\mathbf{C}$ 使得 $x\in C(x)$. 由引理 4.1.5,存在 X 中的开集 $O(x)$ 使得 $C(x)\subset O(x)$ 且 $U|_{O(x)}$ 在 $O(x)$ 中有有限的闭加细 $\mathbf{F}(x)$,从而对于某个 $P(x)\in\mathbf{P}$ 有 $C(x)\subset P(x)\subset O(x)$. 让 $\mathbf{F}=\{P(x)\cap F:x\in X,F\in\mathbf{F}(x)\}$. 由于 **P** 是$\sigma$遗传闭包保持的且每一 $\mathbf{F}(x)$ 是有限的, **F** 是 **U** 的σ闭包保持加细. 对于每一 $x\in X$ 和 $F\in\mathbf{F}(x)$,如果 $z\in X\setminus(P(x)\cap F)$,置

$$L_z=\begin{cases}X\setminus P(x), & z\in X\setminus P(x)\\ O(x)\setminus F, & z\in P(x)\setminus F\end{cases}$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

那么 L_z 是点 z 在 X 中的开邻域且 $L_z \cap (P(x) \cap F) = \emptyset$,于是 $P(x) \cap F$ 在 X 中是闭的,所以 $\mathbf{U}$ 有 σ 闭包保持的闭加细,故 X 是次仿紧空间. ■

推论 4.1.7　对于空间 X,下述条件相互等价:

(1) X 是强 Σ 空间.

(2) X 是次仿紧的 Σ 空间.

(3) X 是等紧的 Σ 空间.

(4) X 有 σ 离散的闭(mod k)网. [113,定理 3.2.15]

证明　由定理 4.1.6 仅须证明(1) ⇒(4). 让 $\bigcup_{i \in N} \mathbf{P}_i$ 是空间 X 的由某些紧子集组成的覆盖 $\mathbf{C}$ 的 σ 局部有限的闭(mod k)网,其中每一 $\mathbf{P}_i$ 在 X 中是局部有限的. 对于每一 $i \in N$,因为 X 是次仿紧空间,存在 X 的 σ 离散的闭覆盖 $\mathbf{F}_i$ 使得 $\mathbf{F}_i$ 的每一元交 $\mathbf{P}_i$ 的至多有限个元,那么 $\mathbf{P}_i \wedge \mathbf{F}_i$ 在 X 中是 σ 离散且闭的. 置 $\mathbf{P} = \{\cap \mathbf{F} : \mathbf{F}$ 是 $\bigcup_{i \in N} (\mathbf{P}_i \wedge \mathbf{F}_i)$ 的有限子集$\}$,则 $\mathbf{P}$ 是 X 中的 σ 离散闭集族且关于有限交封闭. 对于每一 $x \in C \in \mathbf{C}$, $C \subset U$ 且 U 在 X 中开,则存在 $i \in N$, $P \in \mathbf{P}_i$ 和 $F \in \mathbf{F}_i$ 使得 $x \in F$ 且 $C \subset P \subset U$,于是 $P \cap F \in \mathbf{P}$ 且 $x \in P \cap F \subset U$,因而 $\mathbf{P}$ 是 X 的几乎(mod k)网. 由文[113,引理 1.5.13],$\mathbf{P}$ 是 X 的 σ 离散且闭的(mod k)网. ■

定理 4.1.8[21]　设 $f: X \to Y$ 是具有 Lindelöf 纤维的闭映射. 如果 X 是强 Σ 空间,则 Y 也是强 Σ 空间. [113,命题 3.2.18]

证明　因为 X 是强 Σ 空间,由定理 4.1.6, X 是次仿紧空间. 因为 f 是闭映射, Y 是次仿紧空间. 设 $\bigcup_{n \in N} \mathbf{P}_n$ 是 X 的由某些紧子集组成的覆盖 $\mathbf{K}$ 的 σ 离散的闭(mod k)网. 对于每一 $n \in N$,存在 X 的开覆盖 $\mathbf{U}_n$ 使得 $\mathbf{U}_n$ 的每一元仅交 $\mathbf{P}_n$ 的至多一个元. 对于每一 $y \in Y$,因为 $f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的,存在 $\mathbf{U}_n$ 的可数子集 $\mathbf{U}_n(y)$ 使得 $f^{-1}(y) \subset \cup \mathbf{U}_n(y)$,那么有 y 在 Y 中的开邻域 $V_n(y)$ 使得 $f^{-1}(V_n(y)) \subset \cup \mathbf{U}_n(y)$. 令 $\mathbf{V}_n = \{V_n(y) : y \in Y\}$,则 $\mathbf{V}_n$ 是 Y 的开覆盖,因而 $\mathbf{V}_n$ 有 σ 离散的闭加细 $\mathbf{F}_n$. 置 $\mathbf{F}_n = \{F_\alpha : \alpha \in A_n\}$,那么对于每一 $\alpha \in A_n$ 存在 $y_\alpha \in Y$ 使得 $F_\alpha \subset V_n(y_\alpha)$. 让 $\mathbf{B}_n = \{f^{-1}(F_\alpha) \cap U : \alpha \in A_n, U \in \mathbf{U}_n(y_\alpha)\}$,那么 $\mathbf{B}_n$ 是 X 的覆盖. 置 $\mathbf{U}_n(y_\alpha) = \langle U_\alpha(j) \rangle$,那么 $\mathbf{B}_n = \bigcup_{j \in N} \mathbf{B}_{nj}$,其中每一 $\mathbf{B}_{nj} = \{f^{-1}(F_\alpha) \cap U_\alpha(j) : \alpha \in A_n\}$. 设 $\mathbf{C}_n = (\mathbf{P}_n \wedge \mathbf{B}_n)^- = \{\overline{P \cap B} : P \in \mathbf{P}_n, B \in \mathbf{B}_n\}$. 因为 $\mathbf{P}_n$ 在 X 中是离散的闭集族,所以 $\mathbf{P}_n$ 的每一元是 $\mathbf{C}_n$ 的某子集的并集. 让 $\mathbf{P}_n = \{P_\beta : \beta \in \Gamma_n\}$,那么 $\mathbf{C}_n = \bigcup_{j \in N} \mathbf{C}_{nj}$,其中每一 $\mathbf{C}_{nj} = \{\overline{P_\beta \cap f^{-1}(F_\alpha) \cap U_\alpha(j)} : \alpha \in A_n, \beta \in \Gamma_n\}$,因此 $f(\mathbf{C}_{nj}) = \{\overline{f(P_\beta \cap U_\alpha(j)) \cap F_\alpha} : \alpha \in A_n, \beta \in \Gamma_n\}$. 因为每一 $U_\alpha(j)$ 交 $\mathbf{P}_n$ 的至多一个元,并且 $\mathbf{F}_n$ 在 X 中是 σ 离散的闭集族,因此 $f(\mathbf{C}_{nj})$ 在 Y 中是 σ 离散的闭集族. 由文[113,引理 1.5.13],为完成结论的证明只须说明 $\bigcup_{n, j \in N} f(\mathbf{C}_{nj})$ 是 Y 的几乎(mod k)网. 对于每一 $y \in Y$,存在 $x \in K \in \mathbf{K}$ 使得 $y = f(x)$. 对于 Y 中的开集 $W \supset f(K)$,存在 $\beta \in \Gamma_n$ 满足 $K \subset P_\beta \subset f^{-1}(W)$. 因为 P_β 是 $\mathbf{C}_n$ 的某子集的并集,存在 $\alpha \in A_n$ 和 $j \in N$ 使得 $x \in \overline{P_\beta \cap f^{-1}(F_\alpha) \cap U_\alpha(j)} \subset P_\beta \subset f^{-1}(W)$,因此 $y \in \overline{f(P_\beta \cap U_\alpha(j)) \cap F_\alpha} \subset f(P_\beta) \subset W$,故 $\bigcup_{n, j \in N} f(\mathbf{C}_{nj})$ 是 Y 的 σ 离散的闭的几乎(mod k)网,所以 Y 是强 Σ 空间. ■

定理 4.1.9[21,22]　设 $f: X \to Y$ 是完备映射. 如果 Y 是次仿紧空间,则 X 是次仿紧空间. [113,附录一命题 3.2]

证明　设 $\mathbf{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 对于每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集,由引理 4.1.5 知存在 X 中的开子集 $O(y)$ 使得 $f^{-1}(y) \subset O(y)$ 且在 $O(y)$ 中 $\mathbf{U}|_{O(y)}$ 有有限的闭加细. 由于 f 是

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

闭映射,存在 Y 中的开子集 $H(y)$ 使得 $y\in H(y)$ 且 $f^{-1}(H(y))\subset O(y)$,在 $f^{-1}(H(y))$ 中 $\mathbf{U}|_{f^{-1}(H(y))}$ 有有限的闭加细 $\mathbf{F}_y$. 让 $\mathbf{H}=\{H(y):y\in Y\}$. 因为 Y 是次仿紧空间, $\mathbf{H}$ 有 σ 离散的闭加细 $\mathbf{W}=\cup_{i\in N}\mathbf{W}_i$,其中每一 $\mathbf{W}_i=\{W_{i,y}:y\in Y\}$ 在 Y 中是离散的闭集族且 $W_{i,y}\subset H(y)$. 对于每一 $i\in N$,置 $\mathbf{P}_i=\{f^{-1}(W_{i,y})\cap F:y\in Y$ 且 $F\in\mathbf{F}_y\}$. 往证 $\mathbf{P}=\cup_{i\in N}\mathbf{P}_i$ 是 U 的 σ 离散的闭加细. 显然, $\mathbf{P}$ 是 $\mathbf{U}$ 的加细. 对于每一 $i\in N$,因为 $f^{-1}(\mathbf{W}_i)$ 在 X 中是离散的且对于每一 $y\in Y$, $\mathbf{F}_y$ 是有限的,于是 $\mathbf{P}_i$ 在 X 中是 σ 离散的. 对于每一 $y\in Y$ 和 $F\in\mathbf{F}_y$,如果 $x\in X\setminus(f^{-1}(W_{i,y})\cap F)$,置

$$L_x=\begin{cases} X\setminus f^{-1}(W_{(i,y)}, & x\in X\setminus f^{-1}(W_{i,y} \\ f^{-1}(H(y))\setminus F, & x\in X\setminus f^{-1}(W_{i,y}\setminus F.\end{cases}$$

那么 L_x 是点 x 在 X 中的开邻域且 $L_x\cap(f^{-1}(W_{i,y})\cap F)=\varnothing$,于是 $f^{-1}(W_{i,y})\cap F$ 在 X 中是闭的,故 X 是次仿紧空间. ■

上述定理最先是文[22]在较多的准备工作之后利用"次仿紧映射"来证明的,我们在此给出了它的一个直接、简单的证明.

推论 4.1.10 设 $f:X\to Y$ 是完备映射. 如果 X 有 G_δ 对角线且 Y 是半层空间,那么 X 是半层空间. [113,命题 3.3.11(3)]

证明 因为 Y 是半层空间,所以 Y 是次仿紧空间[113],于是 X 是次仿紧空间. 又因为 X 是具有 G_δ 对角线的次仿紧空间,所以 X 是 $\sigma^{\#}$ 空间,再由文[113,命题 3.3.10(3)] X 是 β 空间,所以从文[113,定理 1.7.7(2)](没使用正则性)知 X 是半层空间. ■

定理 4.1.11 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, Y 是第一可数空间. 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的第一可数的紧子集,则 X 是第一可数空间. [113,引理 3.3.13]

证明 对于 $x\in X$,记 $y=f(x)$, $<U_i>$ 是 y 在 Y 中的可数局部基, $<V_i>$ 是 X 的开子集族使得 $<V_i\cap f^{-1}(y)>$ 是点 x 在 $f^{-1}(y)$ 中的局部基. 对于 $i\in N$,让 $F_i(x)=f^{-1}(y)\setminus V_i$,则 $F_i(x)$ 是 X 的紧子集,于是存在 X 中互不相交的开集 W_i 和 G_i 使得 $x\in W_i$ 且 $F_i(x)\subset G_i$,那么 $f^{-1}(y)\subset V_i\cup G_i$,于是存在 $j_i\in N$ 使得 $f^{-1}(U_{j_i})\subset V_i\cap G_i$,从而 $(X\setminus V_i)\cap f^{-1}(U_{j_i})\subset G_i$. 不妨设 $W_i\subset V_i$ 且 $W_{i+1}\subset W_i$. 往证 $<W_i\cap f^{-1}(U_i)>$ 是点 x 在 X 中的局部基. 设 $x_i\in W_i\cap f^{-1}(U_i)$. 若 x_0 是序列 $\{x_i\}$ 的一个聚点,由于 $f(x_i)\in U_i$,于是在 Y 中序列 $\{f(x_i)\}$ 收敛于 y,所以 $x_0\in f^{-1}(y)$. 如果 $x_0\neq x$,则存在 $n\in N$ 使得 $x_0\in X\setminus V_n$,于是 $x_0\in G_n$,从而有无限多个 i 使得 $x_i\in W_n\cap G_n=\varnothing$,矛盾. 因而, $x_0=x$,即 $\{x_i\}$ 仅能以 x 为唯一的聚点. 若序列 $\{x_i\}$ 不收敛于 x,那么存在子序列 $\{x_{i_n}\}$ 在 X 中离散,由于 $f^{-1}(y)$ 为紧,不妨设每一 $x_{i_n}\notin f^{-1}(y)$,于是 $<f(x_{i_n})>$ 在 Y 中离散,与序列 $\{f(x_{i_n})\}$ 收敛于点 y 相矛盾. 故 X 是第一可数空间. ■

注 4.1.12 设 $f:X\to Y$ 是闭映射,其中 X 是可展空间, Y 是第一可数空间,那么 Y 是可展空间[113,定理 3.5.9(2)]. T. Mizokami 在[163,164]中证明了 T_1 可展空间的第一可数的闭映象是可展空间.

4.2 必不可少的正则性条件

本节以几个例子说明文[113]的一些命题中关于正则性的假设是必不可少的.

例 4.2.1[125] R 的点无理扩张拓扑空间 X.

(1) X 不是正则空间.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(2) X 具有可数基.

(3) X 是可分度量空间的紧覆盖开映象.

(4) X 是度量空间的 σ 局部有限映象.

(5) X 不是可数亚紧空间.

(6) X 不是度量空间的商 π 映象.

证明　令 Q 是实数集 R 中的全体有理数, $D = R \setminus Q$, τ 是 R 的欧氏拓扑,在 $X = R$ 上赋予点无理扩张拓扑 $\tau^* = \{\{x\} \cup (D \cap U) : x \in U \in \tau\}$,称 (X, τ^*) 为点无理扩张拓扑空间[204]. 文[204,例 69]已证明了 X 是 T_2,非正则,具有可数基的空间. 由文[113,命题 2.4.3], X 是可分度量空间的紧覆盖开映象. 由文[113,定义 2.10.1], X 是度量空间的 σ 局部有限映象. 所以(1)～(4)成立.

为证明 X 不是可数亚紧空间,我们引用 Ishikawa[92]的可数亚紧空间的下述刻画:若 $< F_n >$ 是 X 的递减的闭子集列且 $\bigcap_{n \in N} F_n = \varnothing$,则存在 X 的开子集列 $< G_n >$ 使得每一 $F_n \subset G_n$ 且 $\bigcap_{n \in N} G_n = \varnothing$. 记 $Q = < r_n >$,对于每一 $n \in N$,令 $F_n = \{r_i : i \geq n\}$,因为 Q 是 X 的离散子集, $< F_n >$ 是 X 的递减的闭子集列且 $\bigcap_{n \in N} F_n = \varnothing$,若 X 是可数亚紧空间,则存在 X 的开子集列 $< G_n >$ 使得每一 $F_n \subset G_n$ 且 $\bigcap_{n \in N} G_n = \varnothing$. 对于每一 $n \in N$ 和 $x \in F_n$,存在 $U(n, x) \in \tau$ 使得 $x \in U(n, x)$, $U(n, x) \cap \{r_i : i < n\} = \varnothing$ 且 $\{x\} \cup (D \cap U(n, x)) \subset G_n$,于是 $U(n, x) = (U(n, x) \cap Q) \cup (U(n, x) \cap D) \subset G_n$,从而有 $O_n \in \tau$ 使得 $F_n \subset O_n \subset G_n$,因此 $\bigcap_{n \in N} O_n = \varnothing$,这与 τ 是 Baire 拓扑相矛盾,所以 X 不是可数亚紧空间. 故(5)成立.

若 X 是度量空间的商 π 映象,由于 X 是第一可数空间,则 X 是度量空间的伪开 π 映象,再由文[113,定理 2.9.11]知 X 是半度量空间,从而 X 是次仿紧空间,这与(5)相矛盾. 因此, X 不是度量空间的商 π 映象. 故(6)成立. ■

例 4.2.2[125]　Светличный空间 X.

(1) X 不是正则空间.

(2) X 是 σ 闭离散空间.

(3) X 不具有 G_δ^* 对角线.

证明　我们介绍在文[207,引理 3]中 Светличный把任意的恰有一个非孤立点的空间表示为一个具有闭 σ 离散空间的开紧映象的方法,构造所需要的空间.

取 Y 是任一恰有一个非孤立点的不具有点 G_δ 性质的 T_2 空间,记 Y 的非孤立点为 a 并让 $Z = Y \setminus \{a\}$,那么 Z 是 Y 的开离散子空间. 点 a 在 Y 中的邻域基元形如 $W(U) = \{a\} \cup U$,其中 $U \subset Z$. 定义集合 $X = Y \cup Z \times \{1, 1/2, 1/3, \cdots\}$,并赋予 X 如下拓扑:对于每一 $n \in N$, $Z \times \{1/n\}$ 是 X 的开离散子空间;对于每一 $z \in Z$, z 的邻域基元形如 $W(n, z) = \{z\} \cup \{(z, 1/k) : k \geq n\}$, $n \in N$; a 的邻域基元形如 $W(n, U) = \{a\} \cup (\cup \{U \times \{1/k\} : k \geq n\})$, $n \in N$ 且 $W(U)$ 是 a 在空间 Y 中的邻域基元. 那么 X 是非正则的 T_2 空间, Z 及每一 $Z \times \{1/n\}$ 都是 X 的闭离散子空间,于是 X 是 σ 闭离散空间,从而 X 是具有 G_δ 对角线的次仿紧空间.

如果空间 X 具有 G_δ^* 对角线,则有 X 的开覆盖的序列 $\{\mathbf{P}_n\}$ 使得 $\{a\} = \bigcap_{n \in N} cl(st(a, \mathbf{P}_n))$,那么对于每一 $n \in N$ 存在点 a 在 X 中的某邻域基元 $W(k(n), U_n)$ 使得 $a \in W(k(n), U_n) \in \mathbf{P}_n$,因此 $\{a\} \in \bigcap_{n \in N} W(U_n) \subset \bigcap_{n \in N}(W(k(n), U_n) \cup W(U_n)) = \bigcap_{n \in N} \overline{W(k(n), U_n)} \subset$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$\bigcap_{n\in N} cl(st(a,\mathbf{P}_n))=\{a\}$,即$\{a\}=\bigcap_{n\in N}W(U_n)$,所以 a 在 Y 中具有点 G_δ 性质,矛盾.故空间 X 不具有 G_δ^* 对角线性质. ■

例 4.2.3[125] 半园盘拓扑空间 X.

(1) X 不是正则空间.

(2) X 是可展空间.

(3) X 不是 meta-Lindelöf 空间.

(4) X 不具有点可数的 cs* 网.

(5) X 具有局部可数且 σ 离散的 k 网.

(6) X 不存在 p 序列. *

证明 记 τ 是平面 R^2 的欧氏拓扑,$S=\{(x,y):x,y\in R,y>0\}$,$L=\{(x,0):x\in R\}$且 $X=S\cup L$.在 X 上赋予半园盘拓扑 $\tau^*=\{\tau_{|X}\}\cup\{\{x\}\cup(S\cap U):x\in L,U\in\tau\}$,称$(X,\tau^*)$为半园盘拓扑空间[204].文[204,例 78]已证明了 X 是 T_2,非正则,可分,非 Lindelöf,第一可数空间.利用 R^2 的球形邻域易验证 X 是可展空间.由于可分的 meta-Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间,所以 X 也不是 meta-Lindelöf 空间,从而 X 不具有点可数基,由定理 2.1.1(3)知 X 不具有点可数的 cs* 网.所以(1)～(4)成立.

X 具有局部可数且 σ 离散的 k 网.对于 $x\in R^2$,$r>0$,记 $B(x,r)$为(R^2,τ)的中心在 x 半径为 r 的开球.置 $\mathbf{P}=\{\{p\}:p\in L\}\cup\{B(q,1/n)\cap S:q$ 的两个坐标均是有理数,$n\in N\}$.由于 L 是 X 的离散闭子集,所以 $\mathbf{P}$ 是 X 的局部可数且 σ 离散的集族,往证它是 X 的 k 网.设 K 是 X 的紧子集,U 是 X 的包含 K 的开子集.对于每一 $x\in X$,让$\{P\in(\mathbf{P})_x:P\subset U\}=\langle P_n(x)\rangle$,那么 K 由$\{P_n(x):x\in K,n\in N\}$的某有限子集所覆盖.若不然,则存在 K 中的序列$\{p_n\}$使得对于每一 $i,j<n$ 有 $p_n\notin P_i(x_j)$.因为 K 是第一可数的,存在$\{p_n\}$的子序列$\{p_{n_k}\}$收敛于 $p\in K$,于是存在 $P\in\mathbf{P}$ 和$\{p_{n_k}\}$的子序列 T 使得 $T\subset P\subset U$.事实上,由于 L 是离散的,不妨设所有的 $p_{n_k}\in S$,则在 τ 中序列$\{p_{n_k}\}$收敛于 p,又由于$\{B(q,1/n):q$ 的两个坐标均是有理数,$n\in N\}$是 τ 的可数基,于是存在两个坐标均是有理数的点 q,和自然数 h,m 使得$\{p\}\cap\{p_{n_k}:k\geq h\}\subset B(q,1/m)\subset U$,从而$\{p_{n_k}:k\geq h\}\subset B(q,1/m)\cap S\subset U$.因而,对于某个 $i,j\in N$ 有 $P=P_i(x_j)$,取 $n>i,j$ 使得 $p_n\in P$,这是一个矛盾.因此 $\mathbf{P}$ 是 X 的 k 网.故 X 具有局部可数且 σ 离散的 k 网,所以(5)成立.

最后证明 X 不存在 p 序列.若不然,则存在 X 的开覆盖列$\{\mathbf{U}_n\}$满足:对于每一 $x\in X$,$n\in N$,若 $x\in U_n\in\mathbf{U}_n$,则

(3.1) $D_x=\bigcap_{n\in N}\overline{U_n}$是 X 的紧子集.

(3.2) $\{\bigcap_{n\leq k}\overline{U_n}:k\in N\}$是 D_x 在 X 中的网.

现在,取定 $x=(0,0)\in X$,对于每一 $n\in N$,存在 x 在 X 中的开集 $U_n\in\mathbf{U}_n$,取 x 在 X 中的基本开集$\{x\}\cup(S\cap B(x,2r_n))\subset U_n$,其中 $r_{n+1}<r_n$,设 $x_n=(x+r_n,0)$,则 $x_n\in\bigcap_{k\leq n}\overline{U_k}$,于是从条件(3.1)和(3.2)知序列$\{x_n\}$在 X 中有聚点,这与 $\langle x_n\rangle$ 是 X 的闭离散子集相矛盾,从而 X 不存在 p 序列,故(6)成立. ■

---

* 该性质由商丘师范高等专科学校的李克典教授提供

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

一些度量化定理是在 T_1 空间中建立的[49]. 但在 T_1 空间中我们也将失去一些很好的结果,如闭映射未必保持 T_1 仿紧性[112],紧的可数的 T_1 空间未必具有可数基[11],T_1 仿紧性不是 F_σ 遗传的[75],映满 T_1 空间的紧空间上的一对一映射未必是同胚映射等. 最后举一例说明在 T_1 空间中几个众所周知的结果将不再成立.

例 4.2.4　存在完备映射 $f: X \to Z$ 具有下述性质:

(1)　X 是紧,T_1,非 T_2,具有 G_δ 对角线,不具有 G_δ^* 对角线的空间.

(2)　Z 是紧度量空间.

证明　　令 I 是单位闭区间, $X = I \times \{0,1,1/2,1/3,\cdots\cdots\}$. $Z = (I \times \{1,1/2,1/3,\cdots\cdots\}) \cup \{(0,0)\}$. X 的拓扑定义如下:对于每一 $n \in N$, $I \times \{1/n\}$ 具有欧氏拓扑,对于每一 $a \in I$,点 $(a,0)$ 的邻域基取为 $\{(U \times \{0\}) \cup (I \times \{1/k : k \geq n\}) : U$ 是 a 在 I 中的欧氏邻域, $n \in N\}$. Z 的拓扑定义如下:对于每一 $n \in N$, $I \times \{1/n\}$ 具有欧氏拓扑,点 $(0,0)$ 的邻域基取为 $\{\{(0,0)\} \cup (I \times \{1/k : k \geq n\}) : n \in N\}$. 易验证空间 X, Z 具有所列性质.

定义 $f: X \to Z$ 使得 $f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & y \neq 0 \\ (0,0), & y = 0 \end{cases}$. 则 f 是连续的闭映射且每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧度量子空间. ■

与上述例子相关的在 T_2 空间中成立的几个著名定理有,

(4.1)　具有 G_δ 对角线的紧空间是可度量空间. [113,定理 1.4.10]

(4.2)　具有 G_δ 对角线的空间如果是度量空间的完备逆象则也是度量空间. [113,定理 2.2.10]

本节最后提出几个与文[113]中的命题有关的正则性问题供探讨.

问题 4.2.5　(1) 设空间 X 具有点 G_δ 性质. 若 $f: X \to Y$ 是闭映射,那么 f 是否是序列商映射? [113,命题 2.1.17(2)]

(2) 遗传闭包保持集族的闭包是否仍是遗传闭包保持集族? [113,命题 2.5.2]

(3) 可分度量空间的商 π 映象是否是可分度量空间的商紧映象? [113,推论 2.9.15,推论 2.9.16]

(4) 具有可数(mod k)网的空间是否可表为可分度量空间的完备逆象的连续映象? [113,推论 2.10.8]

(5) 具有点可数 p-k 网的次亚紧的 $\omega\triangle$空间是否是可展空间? [113,命题 3.1.8]

(6) 强 $\Sigma^{\#}$ (或次亚紧)、$\omega\triangle$空间是否具有严格 p 序列? [113,定理 3.5.4]

4.3　几点错误

本节指出文[113]中的命题 2.7.3、引理 3.2.13、命题 3.2.14、定理 3.2.20、命题 3.5.14、命题 3.6.16 和引理 3.8.15 证明中的一些失误.

4.3.1　伪序列覆盖映射

文[113,命题 2.7.3]不加证明地断言:伪序列覆盖映射保持 cs^* 网. 这是不正确的.

例　让 $S_1 = \{0\} \cup \langle 1/n \rangle$. 赋予 S_1 通常的欧氏拓扑,定义 $f: \beta N \to S_1$ 使得 $f(n) = 1/n$, $f(\beta N \setminus N) = \{0\}$,则 f 是完备映射,于是 f 是伪序列覆盖映射. 令 $\mathbf{P} = \{\{x\} : x \in \beta N\}$,由于 βN 不存在非平凡的收敛序列,所以 $\mathbf{P}$ 是 βN 的 cs* 网,但是 $f(\mathbf{P}) = \{\{y\} : y \in S_1\}$ 不是 S_1 的 cs* 网. 故伪序列覆盖映射未必保持 cs* 网.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

若更设原象空间的每一紧子集是序列紧的,则伪序列覆盖映射保持 cs* 网. ■

4.3.2 $\sum^*$ 空间的分解定理

在文[113,引理 3.2.13]我们证明了下述结果:设 $\cup_{n\in N}\mathbf{P}_n$ 是空间 X 的闭拟(modk)网,其中每一 $\mathbf{P}_n$ 是 X 的遗传闭包保持集族. 置 $D=\{x\in X$:存在 $n\in N$ 使得 $|(\mathbf{P}_n)_x|\geq\aleph_0\}$,则 D 是 X 的 σ 闭离散子空间.

证明的思路是对于每一 $n\in N$,置 $E_n=\{x\in X:\cap(\mathbf{P}_n)_x=\{x\}\}$,则 E 是 X 的闭离散子空间且 $D\subset\cup_{n\in N}E_n$,于是 D 是 X 的 σ 闭离散子空间. 1998 年 6 月在参加北京一般拓扑学国际学术会议期间彭良雪指出,一般说来 $D\subset\cup_{n\in N}E_n$ 是不成立的. 下述例子由彭良雪在文[178～179]中给出.

例 让 $X=N$ 赋予离散拓扑. 令 $E=\{n\in N:n\geq3\}$. 把 E 表示成可数个两两互不相交的无限子集 A_n 之并,记 $A_n=\{x_{ni}:i\in N\}$. 定义

$\mathbf{K}=\{\{1,2,\cdots,n\}:n\in N,n\geq2\}$,

$\mathbf{P}'_n=\{\{1,2,\cdots,n+1\}\}\cup\{\{1,2,\cdots,n+1\}\cup\{x_{ni}\}:i\in N\}\cup\{\{x_{ni}\}:i\in N\}$, $n\in N$,

$\mathbf{P}_n=\cup_{k\leq n}\mathbf{P}'_k\cup\{X\}$, $n\in N$, $\mathbf{P}=\cup_{n\in N}\mathbf{P}_n$.

易验证,$\mathbf{P}$ 是 X 的关于 $\mathbf{K}$ 的 σ 遗传闭包保持的闭拟(modk)网. $\{1,2\}\subset D$,$\{1,2\}\not\subset E=\cup_{n\in N}E_n$. 因此 $D\not\subset\cup_{n\in N}E_n$. ■

文[113,引理 3.2.13]证明的失误在于文[113,158 页第 8 至 9 行]所取出的序列 $\{x_n\}$ 的各项未必是两两互不相同的,于是未必存在 $k\in N$ 使得 $H\subset X\setminus\{x_n:n\geq k\}$. 文[113]的命题 3.2.14 和定理 3.2.20 的证明利用了文[113,引理 3.2.13],所以它们的正确性有待于探讨. 在一些附加条件下文[113,引理 3.2.13]是成立的,如我们证明了若 X 是 k 空间,则 D 是 σ 闭离散空间;彭良雪[178]证明了若 X 是具有点 G_δ 性质的空间,则 D 也是 σ 闭离散空间.

4.3.3 $\omega\gamma$ 空间和 ωM 空间的分解定理

在文[113,命题 3.5.14]我们证明了下述命题:$\omega\gamma$ 且 β 空间性质满足可数紧型分解定理.

上述命题证明的失误在于文[113,205 页倒数第 6 至 7 行]. 设 $f:X\to Y$,对于 $z_n\in f^{-1}(y_n)$ $(n\in N)$,因为序列 $\{y_n\}$ 的各项未必是两两互不相同的,所以从 $\{y_n\}$ 在 Y 中有聚点及 f 是闭映射不足以导出序列 $\{z_n\}$ 在 X 中有聚点. 由文[113,命题 3.5.14]可获得 ωM 空间的分解定理[113,命题 3.6.16]:ωM 空间性质满足可数紧型分解定理. Ishii[91]的原始证明(见文[91]的第 18 页)也出现上述所列的同样的失误. 因此文[113]的命题 3.5.14 和命题 3.6.16 的正确性有待于探讨. 文[116]证明了如果假设象空间具有点 G_δ 性质,则上述两命题仍是正确的.

4.3.4 乘积空间的 k 空间性质

在讨论乘积空间的 k 空间性质时我使用了下述引理[113,引理 3.8.15]:设正则空间 X 是具有点 G_δ 性质的 k 空间,正则空间 Y 是第一可数空间. 若 $X\times Y$ 是 k 空间,那么或者 X 是强 Fréchet 空间,或者 Y 是局部可数紧空间.

上述引理是正确的,但在证明中所构造的 $X\times Z$ 的子空间 $A=\cup_{n\in N}B_n\times(B_n\times\{n\})$ 是不正确的[113,242 页第 11 行]. 因为原证明断言,对于 X, Z 中含极限点的收敛序列 S, K,记 $B=A\cap(S\times K)$,则 B 是 $S\times K$ 的闭子集. 然而若取 $X=S_{\omega_1}$,令 $S=\{x_0\}\cup B_1$, $K=\{(b_1,1)\}\in B\times\{1\}$,那么 S, K 分别是 X, Z 中含极限点的收敛序列,于是 $B=\{(b,(b_1,1)):b\in B_1\}$,从而 $(x_0$,

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$(b_1, 1)) \in cl(B) \cap (S \times K) \setminus B$,所以 B 不是 $S \times K$ 的闭子集.

作者在文[123]的原稿中为了获得具有紧可数 k 网空间的乘积空间的 k 空间性质也使用了类似上述集合 A 的构造,该文的审稿专家对它的正确性提出了疑问,在稿件的修改中作者发现原论证确实有误,并且给出了它的一个正确的证明. 在此,我们也给出文[113,引理 3.8.15]的一个正确的证明. 由文[113,引理 3.8.15]的原有证明以及空间 $X \times Y$ 具有点 G_δ 性质,只须证明对于 $Z = \{x_0\} \cup (\bigcup_{n \in N} B_n \times \{n\})$,则 $X \times Z$ 不是 k 空间. 令 $A = \{(x, (x, n)) \in X \times Z: x \in B_n, n \in N\}$,则 $A \subset X \times Z$ 且 $(x_0, x_0) \in cl(A) \setminus A$. 另一方面,我们证明对于 $X \times Z$ 的任一非空紧子集 K, $K \cap A$ 是 K 的闭子集. 由于 K 是 $X \times Z$ 的非空紧子集,存在 X 和 Z 的非空紧子集 K_1 与 K_2 使得 $K \subset K_1 \times K_2$. 从 K_1 的紧性及集族 $\{B_n\}$ 的性质(即,若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in B_n$,则 $\{x_n\}$ 在 X 中没有聚点)知存在 $i \in N$ 使得 $K_1 \cap (\bigcup_{n \geq i} B_n) = \emptyset$. 记 $B = (K_1 \times K_2) \cap A$. 对于任意的 $a \in K_1 \times K_2 \setminus B$,我们断言存在点 a 在 $X \times Z$ 中的开邻域 V 使得 $V \cap B = \emptyset$. 事实上,设 $a = (a_1, a_2)$. 若 $a_2 = x_0$,令 $V_1 = X \times (\{x_0\} \cup (\bigcup_{n \geq i} B_n \times \{n\}))$,则 V_1 是点 a 在 $X \times Z$ 中的开邻域,如果存在 $b = (b_1, b_2) \in V_1 \cap B$,从 $b_1 \in K$ 知存在 $i_0 < i$ 使得 $b_1 \in B_{i_0}$,再从 $b \in A \cap V_1$ 知 $b_2 = (b_1, i_0) \in \bigcup_{n \geq i} B_n \times \{n\}$,于是 $i_0 \geq i$,矛盾,所以 $V_1 \cap B = \emptyset$;若 $a_2 \neq x_0$ 且 $a_1 \neq x_0$,令 $V_2 = \{a\}$,则 V_2 是点 a 在 $X \times Z$ 中的开邻域,显然有 $V_2 \cap B = \emptyset$;若 $a_2 \neq x_0$ 且 $a_1 = x_0$,设 $a_2 = (x_{nm}, n) \in B_n \times \{n\}$,令 $V_3 = (X \setminus \{x_{nm}\}) \times \{a_2\}$,则 V_3 是点 a 在 $X \times Z$ 中的开邻域,如果存在 $c = (c_1, c_2) \in V_3 \cap B$,则 $c_2 = a_2$,从 $c \in A \cap V_3$ 知 $c_1 = x_{nm} \in X \setminus \{x_{nm}\}$,矛盾,所以 $V_3 \cap B = \emptyset$. 因此,B 是 $K_1 \times K_2$ 的闭子集. 从而 $K \cap A$ 是 K 的闭子集. 这说明 $X \times Z$ 不是 k 空间. ■

致谢:

本文是作者在浙江大学研究生院及数学系进行以同等学历申请博士学位进修期间在导师周友成教授的指导下完成的博士学位论文.

博士论文的完成是多方面的支持、关心与合作的结果. 感谢博士学位课程学习期间任教的方凡(英语)老师、于飞(英语)老师、颜一谦(马列主义与科技革命)老师、周友成(连续统与动力系统)老师、沙震(分形与混沌)老师、金蒙伟(应用泛函分析)老师. 感谢周友成教授对我各方面的关心、帮助及学业上的指导, 是他的热心促使我坚定在不惑之年获得一个博士学位的信心, 在浙大的一年时间(1998 年 9 月至 1999 年 7 月)及以后的交往中我从周老师那里学到的连续统与动力系统等方面的系统知识为我日后的研究工作打开了新的方向. 感谢宁德师范高等专科学校及刘卓雄校长等师专学人 20 年来一直对我学习与工作的支持. 尤其要感谢我的父母、妻子、孩子及家人与我风雨同舟并始终对我从事科研工作的理解, 我只有多出成果才能使自己深感内疚的心找到一点安慰.

感谢高国士教授、刘应明教授、吴利生教授、蒋继光教授和戴牧民教授等前辈对于我科研工作的指导与扶持, 感谢与刘川教授、燕鹏飞副教授、滕辉博士、Y. Tanaka 教授、周丽珍博士、彭良雪博士、D. Buhagiar 博士、T. Mizokami 教授、陈焕然教授等进行富有成效的合作, 感谢与恽自求教授、李进金副教授、葛英副教授、李克典教授、夏省祥教授、朱培勇教授等进行有益的学术交流, 感谢国家自然科学基金资助项目“函数空间的拓扑性质”(19501023) 与“集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用”(19971048) 、福建省自然科学基金资助项目“函数空间的拓扑性质”(A97025) 、福建省“百千万人才工程”人选培养基金资助项目“广义度量空间研究”(1999) 及宁德师范高等专科学校“学术带头人专项经费”等为研究工作提供的资金保证, 感谢 Y. Tanaka 教授、Y. Yasui 教授、K. Tamano 教授、J. Nagata 教授、M. Sakai 博士、A. Shibakov 博士、Y. Yajima 教授、M. M. Choban 教授、H. Junnila 博士、刘川教授、高智民教授、恽自求教授、师维学博士等为研究工作提供的资料保证. 我只有出好成果才能报答各方的厚爱.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

索 引

$\aleph_0$空间 1.2.6
α_4空间 2.1.3
σ_τ 2.1.3
σX 2.1.3
(x_n) 1.2.0
$\{x_n\}$ 1.2.0
$< x_n >$ 1.2.0
(A) 2.1.3
Arens空间 1.2.9
(B) 2.1.3
CFP覆盖 2.3.3
$cl_\sigma(A)$ 2.1.3
$cl_s(A)$ 2.1.3
cosmic空间 1.2.6
cs*网 1.2.6
csf可数空间 3.2.5
cs覆盖 2.4.6
cs*覆盖 3.1.16
cs网 1.2.6/3.1.2
Fréchet空间 1.2.3
Fréchet拟基 2.2.2
gf可数空间 1.2.7
g覆盖 2.4.6
$\mathrm{Int}_s(\mathbf{F})$ 2.1.3
k空间 1.2.3
k网 1.2.6
$\mathbf{P}^{<\omega}$ 1.2.0
S_2 1.2.9
S_α 1.2.9
S_ω 1.2.9
S_{ω_1} 1.2.9
sequential barrier 1.2.7
snf可数空间 1.2.7
sn覆盖 2.4.6
sn网 1.2.7/3.1.2
sof可数空间 1.2.7
so覆盖 2.4.6
so网 1.2.7/3.1.2
S(X) 3.1.8
S(X) 3.1.8
s映射 1.2.1
$\mathbf{U}|_G$ 4.1.5
universal cs-network 1.2.7
wcs*网 2.1.3
1序列覆盖映射 1.2.2
2序列覆盖映射 1.2.2
一致覆盖 3.0.2
几乎开映射 1.2.1
子序列覆盖映射 1.2.2
广义度量空间 1.1.0
开映射 1.2.1
半园盘拓扑 4.2.3
可展空间 1.2.8
对角 2.1.3
伪开映射 1.2.1
伪序列覆盖映射 1.2.2
次仿紧空间 4.1.5
网 1.2.6
闭映射 1.2.1
完备映射 1.2.1
局部可数集族 1.2.5
局部有限加细 3.1.2
局部有限集族 1.2.5
序列开网 1.2.7
序列开集 1.2.3
序列可分空间 2.4.3
序列网 2.2.2
序列闭包拓扑 2.1.3
序列闭集 1.2.3
序列拟基 2.2.2
序列邻域 1.2.3/2.1.3
序列邻域网 1.2.7
序列空间 1.2.3
序列扇 1.2.9
序列商映射 1.2.2
序列基 2.2.2
序列稠子集 2.4.3
序列覆盖映射 1.2.2
拟第一可数空间 2.2.2
条件(A) 2.1.3
条件(B) 2.1.3
星加细 1.2.8
星可数集族 1.2.5
点无理扩张拓扑 4.2.1
点可数集族 1.2.5
点正则覆盖 3.0.2
点有限加细 3.1.2
点有限集族 1.2.5
点星网 3.0.1
展开 1.2.8
弱拟第一可数空间 2.2.2
弱邻域基 1.2.7
弱基 1.2.7/3.1.2
扇 2.1.3
扇空间 1.2.9
离散集族 1.2.5
紧有限分解 2.3.3
紧有限的分解网 2.3.3
紧映射 1.2.1
紧覆盖映射 1.2.2
商映射 1.2.1
梳 2.1.3
强Fréchet空间 1.2.3
强k网 2.3.3

参考文献:

[1] Alexandroff P S. On the metrization of topological spaces (in Russian) [J]. Bull Pol Acad Math, 1960, 8: 135～140
[2] Arens R. Note on convergence in topology[J]. Math Mag, 1950, 23: 229～234
[3] Arhangel'skii A V. An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacta (in Russian) [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1959, 126: 239～241
[4] Arhangel'skii A V. On mappings of metric spaces (in Russian) [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 145: 245～247
[5] Arhangel'skii A V. Mappings and spaces (in Russian) [J]. Uspechi Mat Nauk, 1966, 21(4): 133～184 (= Russian

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

Math Surveys, 1966, 21(4): 115～162)
[6] Arhangel'skii A V. The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces[J]. Soviet Math Dokl 1972, 13: 265～268
[7] Arhangel'skii A V. The frequency spectrum of a topological space and the product operation[J]. Trans Moscow Math Soc, 1981, 2: 163～200
[8] Arhangel'skii A V. Some recent advances and open problems in general topology[J]. Russian Math Surveys, 1997, 52 (5): 929～953
[9] Arhangel'skii A V. Some observations on C_p-theory and bibliography[J]. Topology Appl, 1998, 89: 202～221
[10] Arhangel'skii A V. Franklin S P. Ordinal invariants for topological spaces[J]. Michigan Math J, 1968, 15: 313～320
[11] Arhangel'skii A V. Ponomarev V I. Fundamentals of General Topology: Problems and Exercises[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1984.
[12] Arhangel'skii A V. Pontryagin L S. General Topology Ⅰ. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, V 17[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
[13] Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, V1[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
[14] Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, V2[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.
[15] Balogh Z T. A small Dowker space in ZFC[J]. Proc Amer Math Soc, 1996, 124(8): 2555～2559
[16] Balogh Z T. There is a paracompact Q-set space in ZFC[J]. Proc Amer Math Soc. 1998, 126(6): 1827～1833
[17] Balogh Z T. A normal screenable nonparacompact space in ZFC[J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126(6): 1835～1844
[18] Bennett H R, Chaber J. A survey of the class MOBI[C]. In: van Mill J, Reed G M eds. Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990. 221～236
[19] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings[J]. Czech Math J, 1976, 26: 174～182
[20] Buck R E. Monotone separation and basis properties: [Ph D Thesis][D]. Pittsburgh: Pittsburgh University, 1993
[21] Buhagiar D, Lin Shou(林　寿). A note on subparacompact spaces[R]. Preprint
[22] Buhagiar D, Miwa T. Covering properties of maps[J]. Questions Answers in General Topology, 1998, 16(1): 53～66
[23] Buhagiar D, Miwa T, Pasynkov B A. On metrizable type (MT-) maps and spaces[J]. Topology Appl, 1999, 96(1): 31～51
[24] Burke D K. Covering properties[C]. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984. 347～422
[25] Burke D K, Lutzer D J. Recent advances in the theory of generalized metric spaces[C]. In: Topology: Proc Memphis State Univ Topology Conference, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc, 1976. 1～70
[26] Burke D K, Michael E A. On certain point-countable covers[J]. Pacific J Math, 1976, 64: 79～92
[27] Cao Jiling(曹继岭), Künzi H, Reilly I, Romaguera S. Quasi-uniform hyperspaces of compact subsets[J]. Topology Appl, 1998, 87: 117～126
[28] Chen Huaipeng(陈怀鹏). The products of k-spaces with point-countable closed k-networks[J]. Topology Proc, 1990, 15: 63～82
[29] Chen Huaipeng(陈怀鹏). A note on countable products of locally k_ω-spaces[J]. Topology Proc, 1992, 17: 137～144
[30] Chen Huaipeng(陈怀鹏). An answer to a conjecture on the countable products of k-spaces[J]. Proc Amer Math

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

Soc , 1995 , 123(2) : 583～587

[31] Chen Huaipeng(陈怀鹏) . Weak neighborhoods and Michael-Nagami 's question[J]. Houston J Math ,1999 ,25

[32] Cho M H , Just W. Countable-compact-covering maps and compact-covering maps[J]. Topology Appl , 1994 , 58(2) : 127～143

[33] Choban M M (Čoban M M) . Mappings of metric spaces[J]. Soviet Math Dokl , 1969 , 10 : 258～260

[34] Choban M M (Čoban M M) . The open mappings and spaces[J]. Ren Circolo Math Palermo , 1992 , 29 : 51～104

[35] Collins P J. Monotone normality[J]. Topology Appl , 1996 , 74 : 179～198

[36] Cook H , Reed G M. On the non-productivity of normality in Moore spaces[J]. Proc Amer Math Soc , 1999 , 127(3) : 875～880

[37] Dai Mumin(戴牧民) , Chen Haiyan(陈海燕) . Images and preimages of D_0 spaces[J]. Chin Quart Math , 1994 , 9 (4) : 31～36

[38] Dai Mumin(戴牧民) , Liu Chuan(刘 川) . k-spaces and products of spaces with σ-hereditarily closure-preserving k-networks[J]. Northeastern Math J , 1994 , 10(2) : 267～272

[39] Dai Mumin(戴牧民) , Liu Chuan(刘 川) . D_1 spaces and their metrization[J]. Northeastern Math J , 1995 , 11 (2) : 215～220

[40] Davis S W. More on Cauchy conditions[J]. Topology Proc , 1984 , 9 : 31～36

[41] Debs G, Raymond J S. Compact covering and game determinacy[J]. Topology Appl , 1996 , 68 : 153～185

[42] Debs G, Raymond J S. Cofinal Σ_1^1 and Π_1^1 subsets of ω^ω[J]. Fund Math , 1999 , 159 : 161～193

[43] Delistathis G, Watson W S. A regular space with a countable network and different dimensions[J]. Trans Amer Math Soc

[44] van Douwen E K. The integers and topology[C]. In : Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam : North-Holland , 1984. 111～167

[45] Dow A , Junnila H , Pelant J. Weak covering properties of weak topologies[J]. Proc London Math Soc , 1997 , 75(3) : 349～368

[46] Dow A , Zhou Jinyuan(周金元) . On subspaces of pseudoradial spaces[J]. Proc Amer Math Soc , 1999 , 127(4) : 1221～1230

[47] Eda K, Gruenhage G, Koszmider P , Tamano K. Sequential fans in topology[J]. Topology Appl , 1995 , 67 : 189～220

[48] Eilenberg S. Surles transformations d'espaces mtriques en circonfrence[J]. Fund Math , 1935 , 24 : 160～176

[49] Engelking R. General Topology[M]. Warszawa : Polish Scientific Publishers. 1997

[50] Fearnley D L. A Moore space with a σ-discrete π-base which cannot be densely embedded in any Moore space with the Baire property[J]. Proc Amer Math Soc , 1999 , 127(10) : 3095～3100

[51] Feng Xiufeng(冯秀凤) , Tamano K. Countably fan-tight subspaces of a countable product of Lašnev spaces are metrizable[J]. Topology Proc , 1997 , 22 : 191～196

[52] Fitzpatrick Jr B , Zhou Haoxuan(周浩旋) . More on topological completions of metrizable spaces[J]. Topology Proc , 1994 , 19 : 97～110

[53] Foged L. Point-countable bases and k-networks[J]. Topology Appl , 1996 , 69 : 101～114

[54] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice[J]. Fund. Math , 1965 , 57 : 107～115

[55] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice Ⅱ[J]. Fund Math , 1967 , 61 : 51～56

[56] Gale D. Compact sets of functions and function rings[J]. Proc Amer Math Soc , 1950 , 1 : 303～308

[57] Gao Guoshi(高国士) . Weak sequence-covering mapping and cs*-network[J]. J Suzhou Univ , 1993 , 9(2) : 105～111

[58] Gao Guoshi(高国士) . 关于不可约空间(Ⅱ) [J]. 数学进展 , 1995 , 24 : 423～426

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[59] Gao Yinzhu(高印珠). A note concerning the Collins, Reed, Roscoe, Rudin metrization theorem[J]. Topology Appl, 1996, 74: 73～82

[60] Gao Yinzhu(高印珠), Qu Hanzhang(屈汉张), Wang Shutang(王成堂). Discrete chain conditions and the β-property[J]. Topology Proc, 1992, 17: 97～109

[61] Gao Yinzhu(高印珠), Qu Hanzhang(屈汉张), Wang Shutang(王成堂). A note on B-property[J]. Math Japonica, 1993, 38(5): 921～923

[62] Gao Zhimin(高智民). ℵ-space is invariant under perfect mappings[J]. Questions Answers in General Topology, 1987, 5: 271～279

[63] Gao Zhimin(高智民). Some remarks on the spaces with a σ-closure-preserving weak-base[J]. Math Japonica, 1992, 37(2): 323～328

[64] Gao Zhimin(高智民). On a question of T. Mizokami[J]. Questions Answers in General Topology, 1992, 10(1): 89～90

[65] Gao Zhimin(高智民). Metrizability of some generalized metric spaces in terms of g-functions[J]. Questions Answers in General Topology, 1998, 16: 115～125

[66] Gao Zhimin(高智民). ℵ-spaces and g-metrizable spaces and CF family[J]. Topology Appl, 1998, 82: 153～159

[67] Gao Zhimin(高智民), Nagata J. A new proof on σ-hereditarily closure-preserving k-networks and g-metrizability[J]. Math Japonica, 1993, 38: 603～604

[68] Gao Zhimin(高智民), Yasui Y. A decomposition of k-semi-stratifiable spaces[J]. Math Japonica, 1998, 47(2): 199～202

[69] Gao Zhimin(高智民), Yasui Y. A theorem on closed images of k-semi-stratifiable spaces[J]. Math Japonica, 1998, 48(1): 11～12

[70] Gao Zhimin(高智民), Yasui Y. Some remarks on kc-semi-stratifiable spaces[J]. Math. Japonica, 1998, 43(3): 477～480

[71] Gartside P M. Monotonicity in analytic topology: [Ph D Thesis][D]. Oxford: Oxford University, 1993

[72] Gartside P M, Moody P J. Elastic and proto-metrizable spaces[R]. Preprint

[73] Ge Ying(葛英). On the problem of T. Mizokami[J]. Questions Answers in General Topology, 1992, 10(1): 79～80

[74] Ge Ying(葛英). Closed Lindelöf mappings inversely preserve property b_1[J]. Questions Answers in General Topology, 1993, 11: 81～85

[75] Ge Ying(葛英). F_σ 子集不保持 T_1 仿紧性[J].苏州大学学报(自然科学版), 1997, 13: 8～9

[76] Ge Ying(葛英). On spaces with a σ-locally-finite universal cs-network[J]. Questions Answers in General Topology, 2000, 18(1):93～96

[77] Good C, Tree I J. Continuing horrors of topology without choice[J]. Topology Appl, 1995, 63, 79～90

[78] Good C, Tree I J, Watson W S. On Stone's theorem and the axiom of choice[J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126: 1211～1218

[79] Gruenhage G. Generalized metric spaces[C]. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984. 423～501

[80] Gruenhage G. Generalized metric spaces and metrizability[C]. In: Hušek M, van Mill J eds. Recent Progress in General Topology. Amsterdam: North-Holland, 1992. 239～274

[81] Gruenhage G. Irreducible restrictions of closed mappings[J]. Topology Appl, 1998, 85: 127～135

[82] Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers[J]. Pacific J Math, 1984, 113: 303～332

[83] Guthrie J A. A characterization of $\aleph_0$-spaces. General Topology Appl, 1971, 1: 105～110

[84] Hansell R W. Nonseparable analytic metric spaces[J]. Topology Appl, 1998, 85: 143～152

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[85] Hohti A, Yun Ziqiu(恽自求). Countable products of Čech-scattered supercomplete spaces[J]. Czech Math J, 1999, 49: 569～583

[86] Hoshina T. On the quotient s-images of metric spaces[J]. Sci Dep Tokyo Kyoiku Daigaku Sec A, 1970, 10: 265～268

[87] Hušek M ed. Topology and its Applications, V85[J]. Amaterdam: Elsevier Science B V, 1998.

[88] Hušek M, van Mill J. Recent Progress in General Topology[M]. Amsterdam: North-Holland, 1992.

[89] Ikeda Y, Liu Chuan(刘川), Tanaka Y. Around quotient compact images of metric spaces[R]. Preprint

[90] Ikeda Y, Tanaka Y. Spaces having star-countable k-networks[J], Topology Proc, 1993, 18: 107～132

[91] Ishii T. M-spaces and closed maps[J]. Proc Japan Acad, 1970, 46: 16～21

[92] Ishikawa F. On countably paracompact spaces[J]. Proc Japan Acad, 1955, 31: 686～687

[93] Jiang Jiguang(蒋继光). 一般拓扑学专题选讲[M]. 成都: 四川教育出版社, 1991.

[94] Jiang Jiguang(蒋继光). Some properties of σ-products[J]. Chin Ann Math B, 1993, 14(1): 47～54

[95] Jiang Shouli(江守礼). A note on θ-refinable spaces[C]. In: Topology (Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 55). Hungary, 1989. 359～363

[96] Jiang Shouli(江守礼). A note on Lašnev spaces[J]. New Zealand J Math, 1996, 25(2): 179～180

[97] Jiang Shouli(江守礼), Reilly I, Wang Shuquan(王树泉). Some properties of S(n)-θ-closed spaces[J]. Topology Appl, 1999, 96(1): 23～29

[98] Junnila H J K, Yajima Y. Normality and countable paracompactness of products with σ-spaces having special nets[J]. Topology Appl, 1998, 85: 375～394

[99] Junnila H J K, Yun Ziqiu(恽自求). ℵ-spaces and spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network[J]. Topology Appl, 1992, 44: 209～215

[100] Just W, Wicke H. Some conditions under which tri-quotient or compact-covering maps are inductively perfect[J]. Topology Appl, 1994, 55: 289～305

[101] Kemoto N, Yajima Y. Remarks on normality of Σ-products[J]. Topology Proc, 1994, 19: 161～168

[102] Kodama Y, Nagami K. The theory of topological spaces (in Japanese)[M]. Tokyo: Iwanami, 1974. (中译本: 方嘉琳译. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 1984.)

[103] Läuchli H. Auswahlaxiom in der algebra[J]. Comment Math Helv, 1963, 37: 1～18

[104] Li Jinjing(李进金). 局部可分度量空间的映象及其相关结果: [博士学位论文][D]. 济南: 山东大学, 2000

[105] Li Jinjin(李进金), Jiang Shouli(江守礼). 关于局部可数网与 ss 映射[J]. 数学学报, 1999, 42(5): 827～832

[106] Li Jinjin(李进金), Jiang Shouli(江守礼), Tanaka Y. Point-countable k-networks and maps[J]. Questions Answers in General Topology, 1999, 17: 101～108

[107] Li Kedian(李克典). The strong compact-covering ss-images of metric spaces[J]. Northeastern Math J, 1998, 14(2): 163～167

[108] Li Kedian(李克典). 度量空间的序列复盖 ss-映射[J]. 数学研究, 1998, 31(4): 455～458

[109] Li Kedian(李克典), Shi Yuqiang(石玉强). Metrization of topological spaces with a cs*-regular base[J]. Chin Quart Math, 1998, 13(3): 91～94

[110] Li Zhaowen(李招文), Li Jinjing(李进金). On Michael-Nagami's problems[J]. Questions Answers in General Topology, 1994, 12(1): 85～92

[111] Li Zhaowen(李招文), Li Jinjing(李进金). 关于局部紧度量空间的映象[J]. 数学研究与评论, 1998, 18(1): 91～95

[112] Lin Shou(林 寿). 闭映射不能保持 T_1 仿紧性及紧式仿紧性[J]. 苏州大学学报(自然科学版), 1988, 4: 184～187

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[113] Lin Shou(林　寿). 广义度量空间与映射[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
[114] Lin Shou(林　寿). 关于序列覆盖 s 映射[J]. 数学进展, 1996, 25: 548～551
[115] Lin Shou(林　寿). Michael-Nagami 问题的注记[J]. 数学年刊 A 辑, 1996, 17(1): 9～12
[116] Lin Shou(林　寿). A note on Lašnev decomposition theorems[J]. Topology Proc, 1996, 21: 155～160
[117] Lin Shou(林　寿). Lašnev 空间和 T. Miwa 问题[J]. 数学学报, 1997, 40(4): 585～590
[118] Lin Shou(林　寿). Spaces with a σ-point-finite base[J]. 数学研究与评论, 1997, 17(3): 382～384
[119] Lin Shou(林　寿). A note on the Arens' space and sequential fan[J]. Topology Appl, 1997, 81: 185～196
[120] Lin Shou(林　寿). Mapping theorems on k-semistratifiable spaces. Tsukuba J Math, 1997, 21(3): 809～815
[121] Lin Shou(林　寿). 局部凸空间的正规性[J]. 系统科学与数学, 1998, 18(1): 23～26
[122] Lin Shou(林　寿). 关于三商映射[J]. 数学进展, 1998, 27(2): 97～102
[123] Lin Shou(林　寿). 乘积空间的 k 空间性质, II[J]. 数学研究, 1998, 31(2): 204～206
[124] Lin Shou(林　寿). 序列网与度量空间的序列商映象[J]. 数学学报, 1999, 42(1): 49～54
[125] Lin Shou(林　寿). 《广义度量空间与映射》的正则性[J]. 宁德师专学报(自然科学版), 1999, 11(4): 241～247
[126] Lin Shou(林　寿). 广义度量空间理论的若干新进展[C]. 见:国家自然科学基金委员会. 国家自然科学基金资助项目研究成果年报,数理科学. 北京:科学出版社,1999. 1～2
[127] Lin Shou(林　寿), Liu Chuan(刘　川). On spaces with point-countable cs-networks[J]. Topology Appl, 74: 51～60
[128] Lin Shou(林　寿), Liu Chuan(刘　川), Dai Mumin(戴牧民). Images on locally separable metric spaces[J]. Acta Math Sinica (New Series), 1997, 13(1): 1～8
[129] Lin Shou(林　寿), Tanaka Y. Point-countable k-networks, closed maps, and related results[J]. Topology Appl, 1994, 59: 79～86
[130] Lin Shou(林　寿), Yan Pengfei(燕鹏飞). 关于点可数覆盖[C]. 见: 中国科学技术协会编. 中国科协第三届青年学术年会论文集, 信息科学与微电子技术. 北京: 中国科学技术出版社, 1998. 256～259 (详细的摘要, 全文见: 宁德师专学报(自然科学版), 1998, 10(4): 247～255)
[131] Lin Shou(林　寿), Yan Pengfei(燕鹏飞). Sequence-covering maps of metric spaces[J]. Topology Appl,2000
[132] Lin Shou(林　寿), Yan Pengfei(燕鹏飞). 关于序列覆盖紧映射[J]. 数学学报,2000,43
[133] Lin Shou(林　寿), Yan Pengfei(燕鹏飞), Liu Chuan(刘川). k 网与 Michael 的两个问题[J]. 数学进展, 1999, 28(2): 143～150
[134] Liu Chuan(刘　川). Note on point-countable k-networks[J]. Questions Answers in General Topology, 1991, 9(2): 167～170
[135] Liu Chuan(刘　川). Spaces with a σ-compact finite k-network[J]. Questions Answers in General Topology, 1992, 10(1): 81～87
[136] Liu Chuan(刘　川). Spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network[J]. Topology Proc, 1993, 18: 179～188
[137] Liu Chuan(刘　川).σ遗传闭包保持 k 网的几个注记[J]. 数学进展, 1995, 24: 558～560
[138] Liu Chuan(刘　川), Dai Mumin(戴牧民). g-metrizability and S_ω[J]. Topology Appl, 1994, 60: 185～189
[139] Liu Chuan(刘　川), Dai Mumin(戴牧民). Spaces with a locally countable weak base[J]. Math Japonica, 1995, 41: 261～267
[140] Liu Chuan(刘　川), Dai Mumin(戴牧民). 度量空间的紧覆盖 s 象[J]. 数学学报, 1996, 39(1): 41～44
[141] Liu Chuan(刘　川), Dai Mumin(戴牧民). CW-复形与阿列夫空间[J]. 数学杂志, 1997, 17(4): 533～536
[142] Liu Chuan(刘　川), Lin Shou(林　寿). k-spaces property of product spaces[J]. Acta Math Sinica (New Series), 1997, 13(4): 537～544
[143] Liu Chuan(刘　川), Sakai M, Tanaka Y. Metrizability of GO-spaces and topological groups[R]. Preprint

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[144] Liu Chuan(刘 川), Song Jipin(宋际平). Locally countable mappings[J]. Questions Answers in General Topology, 1993, 11(2): 159～168

[145] Liu Chuan(刘 川), Tanaka Y. Spaces with certain compact-countable k-networks, and questions[J]. Questions Answers in General Topology, 1996, 14: 15～37

[146] Liu Chuan(刘 川), Tanaka Y. Spaces with a star-countable k-network, and related results[J]. Topology Appl, 1996, 74: 25～38

[147] Liu Chuan(刘 川), Tanaka Y. Spaces having σ-compact-finite k-networks, and related matters[J]. Topology Proc, 1996, 21: 173～200

[148] Liu Chuan(刘 川), Tanaka Y. Star-countable k-networks, and quotient images of locally separable metric spaces [J]. Topology Appl, 1998, 82: 317～325

[149] Liu Chuan(刘 川), Tanaka Y. Star-countable k-networks, compact-countable k-networks, and related results[J]. Houston J Math, 1998, 24(4): 655～670

[150] Liu Yingmin(刘应明). 拓扑学[J]. 自然科学年鉴, 1982: 2.1～2.3

[151] Liu Yingmin(刘应明), Jiang Jiguang(蒋继光). 点集拓扑学进展[J]. 自然科学年鉴, 1989: 3.20～3.24

[152] Lutzer D J. On generalized ordered spaces[J]. Dissertations Math, 1971, 89

[153] McCoy R A, Ntantu I. Topological properties of spaces of continuous functions[M]. In: Lecture Notes in Math, No 1315. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[154] Michael E A. $\aleph_0$-spaces[J]. J Math Mech, 1966, 15: 983～1002

[155] Michael E A. $\aleph_0$-spaces and a function space theorem of R. Pol[J]. Indiana Univ Math J, 1977, 26: 299～306

[156] Michael E A. A problem[C]. In: Topological structures Ⅱ, Mathematical Centre Tracts 115, 1979. 165～166

[157] Michael E A. Some problems[C]. In: van Mill J, Reed G M eds. Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990. 271～278

[158] Michael E A, Nagami K. Compact-covering images of metric spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1973, 37: 260～266

[159] van Mill J, Reed G M. Open Problems in Topology[M]. Amsterdam: North-Holland, 1990.

[160] van Mill J, Reed G M. Open problems in topology[J]. Topology Appl, 1997, 79: 249～254

[161] Milner E, Wang Shangzhi(王尚志). Metrizable generalized order spaces[J]. Topology Proc, 1992, 17: 181～196

[162] Miščenko A S. Spaces with a pointwise denumerable bases (in Russian) [J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 145: 985～988 (= Soviet Math Dokl, 1962, 3: 855～858)

[163] Mizokami T. On D-paracompact σ-spaces[J]. Tsukuba J Math, 1991, 15: 425～449

[164] Mizokami T. On the closed images of a developable space[J]. Houston J Math, 1993, 19: 455～467

[165] Mizokami T. On Φ-extensions of developable spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 119(1): 331～336

[166] Mizokami T. On hyperspaces of generalized metric spaces[J]. Topology Appl, 1997, 76: 169～173

[167] Mizokami T, Lin Shou(林 寿). On spaces with a σ-CF* pseudobase[J]. Math Japonica, 1997, 46(3): 377～384

[168] Moody P J. Concerning the Collins, Reed, Roscoe, Rudin metrisation theorem[J]. Bull London Math Soc, 1993, 25(5): 476～480

[169] Morita K, Nagata J. Topics in General Topology[M]. Amsterdam: North-Holland, 1989.

[170] Nadler Jr S B. Continuum Theory: An Introduction[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1992.

[171] Nagata J. The flowering of general topology in Japan[C]. In: Aull C E, Lowen R eds. Handbook of the History of General Topology, V1. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 181～241

[172] Nagata J. Recent progress of general topology in Japan[J]. Topology Appl, 1997, 76: 175～187

[173] Nagata J. Remarks on metrizability and generalized metric spaces[J]. Topology Appl, 1999, 91: 71～77

[174] Nogura T. The product of $\langle \alpha_i \rangle$-spaces[J]. Topology Appl, 1985, 21: 251～259

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[175] Nogura T, Shibakov A. Sequential order of product spaces[J]. Topology Appl, 1995, 65: 271～285

[176] Nogura T, Shibakov A. Sequential order of product of Fréchet spaces[J]. Topology Appl, 1996, 70: 245～253

[177] O'Meara P. On paracompactness in function spaces with the compact-open topology[D]. Proc Amer Math Soc, 1971, 29: 183～189

[178] Peng Lianxue(彭良雪). 一般拓扑学中的几个问题: [博士学位论文][D]. 北京: 首都师范大学, 2000

[179] Peng Lianxue(彭良雪), Lin Shou(林　寿). 关于 Σ^* 空间的一点注记[J]. 数学进展

[180] Ponomarev V I. Axioms of countability and continuous mappings (in Russian)[J]. Bull Pol Acad Math, 1960, 8: 127～133

[181] Qiao Yuanqing(乔元庆), Tall F. Perfectly normal non-Archimedean spaces in mitchell models[J]. Topology Proc, 1994, 19: 231～244

[182] Qu Zhibin(屈志斌), Gao Zhimin(高智民). Spaces with compact-countable k-networks[J]. Math Japonica, 1999, 49: 199～205

[183] Reed G M. On completeness conditions in Moore spaces[C]. In: Lecture Notes in Math, No 378. Berlin: Springer-Verlag, 1974. 368～384

[184] Rudin M E. A cyclic monotonically normal space[J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 119: 303～306

[185] Sakai M. Remarks on spaces with special type of k-networks[J]. Tsukuba J Math, 1997, 21(2): 443～448

[186] Sakai M. On spaces with a star-countable k-network[J]. Houston J Math, 1997, 23, 45～56

[187] Sakai M, Tamano K, Yajima Y. Regular networks for metrizable spaces and Lašnev spaces[J]. Bull Pol Acad Math, 1998, 46, 121～133

[188] Shi Weixue(师维学). Perfect GO-spaces which have a perfect linearly ordered extension[J]. Topology Appl, 1997, 81: 23～33

[189] Shi Weixue(师维学). A non-metrizable compact linearly ordered topological space, every subspace of which has a σ-minimal base[J]. Proc Amer Math Soc, 1999, 127(9): 2783～2791

[190] Shi Weixue(师维学), Miwa T, Gao Yinzhu(高印珠). A perfect GO-space which cannot densely embed in any perfect orderable space[J]. Topology Appl, 1995, 66: 241～249

[191] Shi Weixue(师维学), Miwa T, Gao Yinzhu(高印珠). Any perfect GO-space with the underlying LOST satisfying local perfectness can embed in a perfect LOST[J]. Topology Appl, 1996, 74: 3～16

[192] Shibakov A. On spaces with point-countable k-networks and their mappings[J]. Serdica-Bulgaricae Math Pub 1994, 20: 48～55

[193] Shibakov A. Closed mapping theorems on k-spaces with point-countable k-networks[J]. Comment Math Univ Carolinae, 1995, 36(1): 77～87

[194] Shibakov A. Sequentiality of products of spaces with point-countable k-networks[J]. Topology Proc, 1995, 20: 251～270

[195] Shibakov A. Sequential group topology on rationals with intermediate sequential order[J]. Proc Amer Math Soc, 1996, 124: 2599～2607

[196] Shibakov A. Metrizability of sequential topological groups with point-countable k-networks[J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126(3): 943～947

[197] Shibakov A. Sequential topological groups of any sequential order under CH[J]. Fund Math, 1998, 155: 79～89

[198] Shibakov A. Closed maps on spaces with point-countable bases[J]. Topology Appl, 1999, 96(1): 1～14

[199] Sirois-Dumais R. Quasi-and weakly quasi-first-countable spaces[J]. Topology Appl, 1980, 11(3): 223～230

[200] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings[J]. General Topology Appl, 1971, 1: 143～154

[201] Siwiec F. On defining a space by a weak base[J]. Pacific J Math, 1974, 52(1): 233～245

[202] Stares I S. Extension of functions and generalized metric spaces: [Ph D Thesis][D]. Oxford: Oxford University, 1994

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[203] Stares I S. Borges normality and generalized metric spaces[J]. Topology Proc, 1994, 19: 277～306
[204] Steen L A, Seebach Jr J A. Counterexamples in Topology[M]. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1978.
[205] Strong P L. Quotient and pseudo-open images of separable metric spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1972, 33: 582～586
[206] Sun Jingxian(孙经先). 非线性泛函分析序集一般原理的推广[J]. 系统科学与数学, 1990, 10: 228～232
[207] Svetlichny S A. Open mappings of submetrizable spaces (in Russian) [J]. Vestnik Moskov Univ Mat, 1988, (6): 18～20
[208] Svetlichny S A. Some classes of sequential spaces[J]. Bull Austral Math Soc, 1993, 47(3): 377～384
[209] Svetlichny S A. Two theorems on generalized metric spaces[J]. Bull Austral Math Soc, 1997, 55(2): 197～206
[210] Tamano H, Vaughan J E. Paracompactness and elastic spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 1971, 28: 299～303
[211] Tamano K, Teng Hui(滕　辉). Normality and covering properties of open sets of uncountable products[J]. Topology Proc, 1993, 18: 313～322
[212] Tanaka Y. Metrizability of certain quotient spaces[J]. Fund Math, 1983, 119: 157～168
[213] Tanaka Y. Point-countable covers and k-networks[J]. Topology Proc, 1987, 12: 327～349
[214] Tanaka Y. Metrization Ⅱ[C]. In: Morita K, Nagata J eds. Topics in General Topology. Amsterdam: North-Holland, 1989. 275～314
[215] Tanaka Y. Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces[J]. Math Japonica, 1991, 36, 71～84
[216] Tanaka Y. k-networks, and covering properties of CW-complexes[J]. Topology Proc, 1992, 17, 247～259
[217] Tanaka Y. Spaces determined by generalized metric subspaces[J]. Topology Proc, 1992, 17: 261～276
[218] Tanaka Y. Theory of k-networks[J]. Questions Answers in General Topology, 1994, 12: 139～164
[219] Tanaka Y. Products of k-spaces having point-countable k-networks[J]. Topology Proc, 1997, 22: 305～329
[220] Tanaka Y. k-networks, and spaces having the weak topology with respect to closed covers of metric subspaces[J]. Topology Appl, 1998, 82: 427～438
[221] Tanaka Y. Metrizability of decomposition spaces of metric spaces[J]. Topology Appl, 1998, 84: 9～19
[222] Tanaka Y. Theory of k-networks, and generalized metric spaces[M]. The Lecture of University of Tsukuba, 1999.
[223] Tanaka Y, Murota T. Generalizations of $\omega\triangle$-spaces, and developable spaces[J]. Topology Appl, 1998, 82: 439～452
[224] Tanaka Y, Xia Shengxiang(夏省祥). Certain s-images of locally separable metric spaces[J]. Questions Answers in General Topology, 1996, 14: 217～231
[225] Tanaka Y, Zhou Haoxuan(周浩旋). Spaces determined by metric spaces, and their character[J]. Questions Answers in General Topology, 1985/86, 3: 145～160
[226] Teng Hui(滕　辉). 乘积空间的正规性及相关性质: [博士学位论文][D]. 成都: 四川大学, 1990.
[227] Teng Hui(滕　辉). 强 Σ空间的 Σ积[J]. 科学通报, 1990, 35: 1448～1450
[228] Teng Hui(滕　辉). On a problem of Y. Yajima[J]. Topology Appl, 1991, 38: 39～43
[229] Tkachuk V V. When do connected spaces have nice connected preimages[J]. Proc Amer Math Soc, 1998, 126(1): 3437～3446
[230] Velichko N V. Symmetrizable spaces[J]. Math Note, 1972, 12: 784～786
[231] Velichko N V. Quotient spaces of metrizable spaces[J]. Siberian Math J, 1988, 575～581
[232] Wang Shuquan(王树泉). 关于 LF-网空间与 S(n)-θ-闭空间: [博士学位论文][D]. 济南: 山东大学, 1999. [J]
[233] Wang Yangeng(王延庚). 关于紧邻域扩充性质的等价条件及其应用[J]. 数学研究与评论, 1997, 17(2): 261～265
[234] Wang Yangeng(王延庚). 从局部紧空间到 Banach 空间的函数空间[J]. 数学学报(英文版), 1997, 13(3): 333～336

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[235] Wang Yangeng(王延庚), Wang Shutang(王戍堂). 判断 B_r 空间的一般性方法[J]. 数学年刊 A 辑, 1993, 14: 302～305

[236] Williams S W, Zhou Haoxuan(周浩旋). Order like structure of monotonically normal spaces[J]. Comment Math Univ Carolinae, 1998, 39: 207～217

[237] Wu Yuexiang(武跃祥), Gao Zhimin(高智民), Tanaka Y. Theory of g-metrizable spaces[J]. Questions Answers in General Topology, 1998, 16: 1～9

[238] Xia Shengxiang(夏省祥). On $k\beta$-spaces[J]. Math Japonica, 1995, 42(3): 557～561

[239] Xia Shengxiang(夏省祥). 一类 g 第一可数空间的刻画[J]. 数学进展, 2000, 29(1): 61～64

[240] Xie Lin(谢　琳), Liu Yong(刘　勇). On hyperspace of Lašnev space[J]. 数学研究与评论, 1997, 17(2): 197～202

[241] Xiong Zhaohui(熊朝晖). 正规可遮空间的逆极限[J]. 数学进展, 1998, 27(6): 541～545

[242] Yan Pengfei(燕鹏飞). 度量空间的紧映象[J]. 数学研究, 1997, 30: 185～187, 198

[243] Yan Pengfei(燕鹏飞). 选择理论中两个结论的改进[J]. 数学研究与评论, 1998, 18(1): 131～135

[244] Yan Pengfei(燕鹏飞). On strong sequence-covering compact mappings[J]. Northeastern Math J, 1998, 14(3): 341～344

[245] Yan Pengfei(燕鹏飞). 关于 σ 点有限序列邻域网[J]. 淮北煤师院学报(自然科学版), 1999, 20(2): 17～19

[246] Yan Pengfei(燕鹏飞). 关于 $\aleph_0$ 空间的注记[J]. 数学研究, 1999, 32(4): 421～423

[247] Yan Pengfei(燕鹏飞), Li Kedian(李克典). 局部可分度量空间的紧复盖紧映象[J]. 纯粹数学与应用数学, 1999, 15(1): 58～60

[248] Yan Pengfei(燕鹏飞), Lin Shou(林　寿). 关于度量空间的紧覆盖 s 映射[J]. 数学学报, 1999, 42(2): 241～244

[249] Yan Pengfei(燕鹏飞), Lin Shou(林　寿). Point-countable k-networks, cs^*-networks and α_4-spaces[J]. Topology Proc, 1999. 24

[250] Yan Pengfei(燕鹏飞), Lin Shou(林　寿), Jiang Shouli(江守礼). Metrizability is preserved by closed and sequence-covering maps[R]. Preprint

[251] Yang Lecheng(杨乐成). A characterization of paracompactness of locally Lindelöf spaces[J]. Tsukuba J Math, 1993, 17(2): 339～343

[252] Yang Lecheng(杨乐成). Countable paracompactness of Σ-products[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 122(3): 949～956

[253] Yang Lecheng(杨乐成). $[\omega, \infty]^r$-refinability versus lindelöfness and paracompactness[J]. Houston J Math, 1995, 21: 215～224

[254] Yang Shoulian(杨守廉). On the absolutely paracompact subsets of $\nabla^{\omega}(\omega+1)$ [J]. Tsukuba J Math, 1992, 16(1): 113～121

[255] Yang Zhongqiang(杨忠强). A note on quotient spaces of supercompact spaces[J]. Tsukuba J Math, 1994, 18(1): 217～221

[256] Yang Zhongqiang(杨忠强). All cluster points of countable sets in supercompact spaces are the limits of nontrivial sequences[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, 122(2): 591～596

[257] Yang Zhongqiang(杨忠强). 超紧空间和收敛序列[J]. 数学进展, 1998, 27(2): 133～138

[258] Yun Ziqiu(恽自求). Characterizations of metrizable, $\aleph$-and Lašnev spaces in terms of g-functions[J]. Math Japonica, 1990, 35: 253～261

[259] Yun Ziqiu(恽自求). A new characterization of $\aleph$-spaces[J]. Topology Proc, 1991, 16: 253～256

[260] Yun Ziqiu(恽自求). Separability and $\aleph$-spaces[J]. Questions Answers in General Topology, 1993, 11(1): 109～111

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

[261] Yun Ziqiu(恽自求). On separable k-spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network[J]. J Suzhou Univ 1997, 13(2): 5～8

[262] Yun Ziqiu(恽自求), Zhang Jianping(张建平). On a question about ℵ-spaces[J]. Questions Answers in General Topology, 1999, 17(1): 75～79

[263] Zhang Shuguo(张树果), Prisco C A D. 两种极分折之间的关系[J]. 中国科学 A 辑, 1999, 29(1): 41～48

[264] Zhong Ning(钟 宁). Products with an M_3-factor[J]. Topology Appl, 1992, 45: 131～144

[265] Zhong Ning(钟 宁). Small M_3-space is M_1[J]. Questions Answers in General Topology, 1994, 12(1): 113～115

[266] Zhou Haoxuan(周浩旋). Homogeneity properties and power spaces: [Ph D Thesis][D]. Middletown: Wesleyan University. 1993.

[267] Zhou Jinyuan(周金元). Normal spaces whose Stone-čech remainders have countable tightness[J]. Proc Amer Math Soc, 1993, 117(4): 1193～1194

[268] Zhou Jinyuan(周金元). On subspaces of pseudo-radial spaces[J]. Comment Math Univ Carolinae, 1994, 34(3): 583～586

[269] Zhou Lizhen(周丽珍). 局部可分度量空间的序列覆盖 s 象[J]. 数学学报, 1999, 42(4): 576～582

[270] Zhu Jianping(朱建平). The generalizations of first countable spaces[J]. Tsukuba J Math, 1991, 15: 167～173

[271] Zhu Peiyong(朱培勇). The products of metalindelöf spaces[J]. Topology Proc, 1993, 18: 221～230

[272] Zhu Peiyong(朱培勇). 遗传次亚紧空间[J]. 数学进展, 1996, 25(4): 299～304

[273] Zhu Peiyong(朱培勇). Hereditarily screenableness and its Tychonoff products[J]. Topology Appl, 1998, 83: 231～238

[274] Zhu Peiyong(朱培勇). 遗传σ亚紧空间及其乘积性质[J]. 数学学报, 1998, 41(3): 531～538

[275] Zhu Peiyong(朱培勇). 仿 Lindelöf 空间的 Tychonoff 乘积[J]. 数学研究与评论, 1998, 18(3): 405～411

[276] Zhu Peiyong(朱培勇). 用覆盖刻画的拓扑空间的遗传性和乘积性:[博士学位论文][D]. 成都:四川大学, 2000

Point-Countable Covers And Sequence-Covering Mappings

LIN Shou

(Department of Mathematics, Ningde Teachers' College, Ningde Fujian 352100, China)

Abstract: The method of mappings and covers is a basic tool to study general topology. The theory of generalized metric properties and covering properties stems from a generalization of metrizability and compactness, in which a great many problems involve a research for certain point-countable covers. A deliberation on questions related to point-countable covers leads to a development of the theories of k-networks and mappings of metric spaces in generalized metric spaces. This paper summarizes the essential tasks and the important contribution to the theory of generalized metric spaces in the past ten years, and in two parts expounds some results obtained by author and cooperators concerning spaces and mappings in the past three years. In the first part, which is contained in the second and the third chapters, we discuss the relations among point-countable covers, the sequences of point-finite covers, and s-images and compact images of metric spaces. In the second part, which is contained in the fourth chapter, we consider a regular separated axiom and some gaps in proofs with respect to the book "Generalized Metric Spaces and Mappings".

In the first part of this paper, we centre on several questions with sequence-covering images of metric

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

spaces. The concepts of sequential networks ,point-star networks ,sn-covers and so-covers are introduced. The properties of families about k-networks ,cfp-networks ,cs-networks and sn-networks are made use of. The main results are that shows some exquisite relations among a weak first-countability , S_2 and S_ω ,and that establishes certain characterizations of images of metric spaces under sequential quotient mappings , compact-covering mappings ,sequence-covering mappings and 1-sequence-covering mappings. Their role is to replenish the theory of sequence-coverings mappings , and to deepen some theorems obtained by Arhangel 'skii ,Michael ,Nogura ,Shibakov ,Svetlichny ,Velichko ,Tanaka and others. In particular ,the following questions are answered affirmatively ,

(1) Arhangel 'skii 's question[208] : If X is a sequential space with a weigh κ ,then is X a quotient image of a metric space with a weigh κ ?

(2) Ikeda-Liu-Tanaka 's question[89] : For a sequential space X with a point-regular cs-network , characterize X by means of a nice image of a metric space.

(3) Liu-Tanaka 's question[149 ,218] : Let X be a k-space with a point-countable k-network. If X contains no closed copy of S_ω ,and no S_2 ,then does X have a point-countable base ?

(4) Liu-Tanaka 's question[147] : Let X be a k-space with a σ-point-finite k-network. If X contains no closed copy of S_ω ,then is X a gf-countable space ?

(5) Tanaka 's question[218] : Let X be a sequential space which contains no closed copy of S_ω. If X has a point-countable cs-network ,then does X have a point-countable weak base ?

And ,the following questions are answered partially ,

(6) Michael-Nagami 's question[158] : If X is a quotient and s-image of a metric space ,then is X a quotient ,compact-covering and s-image of a metric space ?

(7) Velichko 's question[231] : Find a Φ-property such that a space X is a quotient and s-image of a metric and Φ-space if and only if X is a Φ-space which is a quotient and s-image of a metric space.

In the second part of this paper ,we concentrate our attention on a regular separated axiom and a few gaps in proofs of " Generalized Metric Spaces and Mappings ". Buhagiar 's idea studying fibrewise general topology is absorbed. The main results are that obtains several generalized metric theorems in T_2-spaces , and that opens up a research for subparacompactness. For example ,it is proved that strong Σ^*-spaces are subparacompact ,and that subparacompactness is invariant under perfect pre-images ,and some interesting examples are constructed which shows that (1) a σ-closed discrete space without any G_δ^*-diagonal , (2) a space with a locally countable and σ-discrete k-network without any point-countable cs *-network ,and (3) a developable space without any p-sequence. Their signification is to improve some results obtained by Burke ,Gruenhage ,Junnila ,Michael ,Tanaka and others ,and to enrich the theory of mappings ,covering properties and generalized metric spaces.

In a word ,our work takes a notable role in the theory of generalized metric spaces.

Key Words :Metric spaces ,point-countable families ,sequence-covering mappings ,k-networks ,regular spaces

2000**MR Subject Classification** :54E35 ,54E40 ,54C10 ,54D55

Chinese Library classification :O189. 1

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.