第 16 卷 第 4 期 2000 年 12 月
福建师范大学学报 (自然科学版)
Journal of Fujian Teachers University (Natural Science)
Vol. 16 No. 4 Dec. 2000

文章编号: 1000-5277(2000)04-0022-05

广义度量空间理论的若干新进展°

林 寿
(福建师范大学数学系, 福建 福州 350007)

摘要: 综述作者近年来在广义度量空间理论中的研究进展, 内容涉及点可数覆盖、空间分类设想、遗传闭包保持覆盖、独立性问题与函数空间拓扑, 同时提出一些尚未解决的问题

关键词: 广义度量空间; 点可数覆盖; 映射; 集合论; 遗传闭包保持覆盖; 函数空间
中图分类号: O 189. 1 **文献标识码**: A

1 广义度量空间

拓扑学的中心课题是确定和研究拓扑不变量 A. Arhangel'skii[1]指出: 点集拓扑学致力于拓扑空间及连续性的研究, 有三个主要的"内在"任务, 一是不同拓扑空间类的比较, 二是确定类的研究, 三是为上述目的及应用的需要定义出新的概念和空间类 实现任务一的联结空间的映射的方法特别重要, 该方法是直接建立不同空间类之间的联系, 任务二主要涉及空间类关于运算的性质, 而覆盖的方法对完成上述任务起重要的作用

由此可见, 映射与覆盖的方法是点集拓扑学中通用的重要工具, 通过对度量化问题、空间与映射的相互分类原则和积空间的仿紧性等点集拓扑学的主要课题的研究导致广义度量空间理论的建立 什么是广义度量空间? 粗略地说, 它们是这样的一些空间类, 继承了度量空间所具有的较好的映射性质和运算性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类, 如是否关于完备映射或闭映射保持? 是否关于子空间或闭子空间遗传? 是否关于有限积或可数积封闭? 是否具有一定的可和性? 是否具有某种的覆盖性质? 从 60 年代起广义度量空间理论一直是点集拓扑学中活跃的研究方向, 所涉及的与公理集合论、数理逻辑、组合数学、泛函分析、动力系统等分支相互交融而形成的大量问题已列入专著《Open Problems in Topology》[2]. 过去的 40 年间在不同时期内所取得的广义度量空间理论的成就已先后总结在一些重要的论著中, 如文献 [3- 9].

受高国士教授 10 多年的教导, 近年来作者在广义度量空间理论方面作过一些探索性的研究, 尤其偏爱空间与映射方面的课题 广义度量空间理论从 60 年代起在国际上蓬勃发展, 各个不同时期均不断有名家与名作涌现, 作者的工作受A. Arhangel'skii, L. Foged, G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka 等的影响较大 刘应明和蒋继光[10]的综述报告介绍了作者早期的部分工作, 国家自然科学基金资助项目研究成果年报[11]简要地报道了作者近期的研究工作 本文较全面地综述作者[8, 12]在广义度量空间理论方面的一些主要工作, 围绕该领域中引人注目的如点可数覆盖、空间的分类设想、遗传闭包保持覆盖、独立性问题和函数空间的拓扑等方面取得的一系列较为系统、独具特色和创造性的工作进行论述 本文所论空间均指满足正则且 T_1 分离性公理的拓扑空间

° 收稿日期: 2000- 06- 05
° 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19971048), 福建省自然科学基金资助项目 (F00010)
° 作者简介: 林寿 (1960-), 男 福建周宁人, 博士, 教授

2　点可数覆盖

早在 20 年代, P. Alexandroff 和 P. Urysohn 就研究了具有点可数基的空间, 并证明了如果空间 X 具有由可分度量空间组成的点可数开覆盖, 则 X 是度量空间　1960 年, V. Ponomarev 用度量空间的开 s 映像刻画了具有点可数基的空间, 为 Alexandroff 的空间分类设想奠定了基础　伴随着 meta-Lindelöf 等覆盖性质的进一步深入探索, 引导了一批一般拓扑学工作者对于点可数族的浓厚兴趣, 包含 CW 复形、函数空间、拓扑群等在内的具有确定的点可数覆盖空间的度量化问题依然吸引着一些一般拓扑学名家的关注[2, 12]. 作者围绕具有点可数 k 网的空间、具有点可数 cs* 网的空间与具有点可数 cs 网的空间中的一些与点可数覆盖相关的问题进行工作, 引入了 wcs* 网、序列邻域网、序列网和紧有限分解网等概念, 借助特殊的商空间 S_2 和 S_ω 阐述了在弱第一可数空间中点可数覆盖之间的精巧关系, 解决了 A. Arhangel'skii、刘川、E. Michael 和 Y. Tanaka 等提出的问题

具有点可数基的空间是点可数覆盖研究的核心. 作者的工作集中于适当的点可数覆盖在什么条件下的具有点可数基, 证明了, (1) 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的 gf 可数空间; (2) 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是具有点可数 wcs* 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω(回答 1998 年刘川和 Y. Tanaka 的问题); (3) 空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_ω(回答 1994 年 Y. Tanaka 的问题); (4) 空间 X 具有点可数的序列邻域网当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的 α_4 空间; (5) 空间 X 具有点可数的序列网当且仅当 X 具有点可数的 cs* 网(回答 1993 年 A. Arhangel'skii 的问题); (6) 空间 X 具有点可数的强 k 网当且仅当 X 具有点可数的紧有限分解网(回答 1973 年 E. Michael 的问题).

1969 年, V. Filippov 证明了可数双商 s 映射保持具有点可数基的空间后, 在点可数覆盖空间的映射定理方面一直未取得实质性的突破, 作者利用 wcs* 网的工具得到了一些新进展, 如证明了, (1) 闭 Lindelöf 映射或定义域是 k 空间的闭映射保持具有点可数 k 网的空间; (2) 既开且闭的映射保持具有点可数基的空间; (3) 具有点 G_δ 性质和点可数 k 网的空间上的闭映射是紧覆盖映射; (4) 具有点可数 cs 网的 Fréchet 空间的伪开 s 映像具有点可数的 cs* 网

3　空间分类设想

1961 年, 由 P. Alexandroff 提出, 引起点集拓扑学家广泛重视的空间分类设想是点集拓扑学的基本而重要的研究方向[2, 3, 8]. 作者的研究发展了 s 映射、紧映射、紧覆盖映射和闭映射的经典方法, 引入了 ss 映射, 1 序列覆盖映射和 2 序列覆盖映射等新工具, 较完整地建立了具有确定点可数覆盖空间的映射分类, 描述了某些广义度量空间类的映射定理, 解决了 A. Arhangel'skii, T. Hoshina, E. Michael 和 Y. Tanaka 等提出的问题, 开创了国际上关于局部可分度量空间各类映像的研究, **N** 空间类①的出色工作推动了国际上 k 网理论的研究, 成为该方向的重要文献

关于 s 映射和紧映射, 作者获得了度量空间在各类序列覆盖 (或紧覆盖, 闭) s 映射和紧映射下像空间的刻画, 证明了, (1) 空间 X 是度量空间的伪序列覆盖 (分别地, 序列覆盖, 1 序列覆盖或 2 序列覆盖) s 映像当且仅当 X 是具有点可数的 cs* 网 (分别地, cs 网, 序列邻域网或序列开网) 的空间 (回答 1966 年 A. Arhangel'skii 和 1971 年 T. Hoshina 的问题); (2) 空间 X 是度量空间的紧覆盖 s 映像当且仅当 X 是具有点可数的紧有限分解网的空间 (回答 1973 年 E. Michael 的问题); (3) 空间 X 是度量空间的闭 s 映像当且仅当 X 是 Fréchet 的 **N** 空间 (回答 1976 年 Y. Tanaka 的问题); (4) 空间 X 是度量空间的序列覆盖 (或 1 序列覆盖) 紧映像当且仅当 X 是具有点正则 cs 网的空间 (回答 1997 年 Y.

① **N** 空间代表阿列夫空间或 Aleph 空间

Tanaka 等的问题); (5) 空间 X 是度量空间的商紧映像当且仅当 X 具有点有限的弱展开(回答 1966 年 A. Arhangel'skii 的问题). 关于 ss 映射, 作者证明了空间 X 是度量空间的紧覆盖(或序列覆盖) ss 映像当且仅当 X 是具有局部可数 cs 网的空间

在映射定理方面, 作者着力研究度量空间、$\aleph$ 空间、g 可度量空间和 K 半层空间的闭映射性质 受 A. Arhangel'skii 提出的完备映射的"正交性"和 C. Borges 所证明的"具有 G_δ 对角线的仿紧 M 空间是可度量化空间"的启发, 形成了广义度量空间中的"完备逆像 G_δ 对角线定理"研究模式, 证明了 $\aleph$ 空间、g 可度量空间、Lašnev 空间和半度量空间等满足完备逆像的 G_δ 对角线定理

4 遗传闭包保持覆盖

1944 年, J. Dieudonné 利用 P. Alexandroff 引进的局部有限集族定义了仿紧性, 带来了点集拓扑学的繁荣景象 下述两方面的进展促使人们真正认识到了遗传闭包保持集族的功效 一是 1975 年 D. Burke, R. Engelking 和 D. Lutzer 利用 N. Lašnev 引进的遗传闭包保持集族, 证明了一个有趣的度量化定理 (即, 空间 X 是度量空间当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持基); 二是 1985 年 L. Foged 证明了 Lašnev 空间 (即, 度量空间的闭映像) 可以刻画为具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 Fréchet 空间 作者系统地研究了具有 σ 遗传闭包保持"基性质"空间的内在特征, 内容涉及 $\aleph$ 空间、g 可度量空间、(modK) 可度量空间、Moore 空间、M 空间、可展空间和 Σ 空间等重要的广义度量空间类, 建立了它们与具有 σ 局部有限"基性质"空间的精细关系, 回答了 R. Gittings, T. Miwa, T. Nogura, K. Tamano 等提出的问题

作者探讨了遗传闭包保持集族与局部有限集族的内在联系, 认识到遗传闭包保持集族的闭包仍是遗传闭包保持集族, 并在适当的弱第一可数性条件下除一小子集外可将空间的遗传闭包保持集族转化为局部有限集族, 由此证明了一些形如具有 σ 局部有限"基性质"的空间与具有 σ 遗传闭包保持"基性质"的空间等价的典型的对称结果, 如, (1) 空间 X 具有 σ 局部有限的 (modK) 基 [即, X 是 (modK) 可度量空间] 当且仅当它具有 σ 遗传闭包保持的 (modK) 基; (2) 空间 X 具有 σ 局部有限的 cs 网 (即, X 是 $\aleph$ 空间) 当且仅当它具有 σ 遗传闭包保持的 cs 网; (3) 空间 X 存在局部有限的弱展开 (即, X 是 g 可度量空间) 当且仅当 X 存在遗传闭包保持的弱展开; (4) M^* 空间和可展空间的遗传闭包保持刻画 对于一些不满足上述关系的空间类作者也获得了完整的补充条件, 如证明了, (1) 空间 X 具有 σ 遗传闭包保持伪基当且仅当它或者是一个 $\aleph_0$ 空间或者是一个所有紧子集为有限的 σ 闭离散空间; (2) 空间 X 具有 σ 局部有限弱基 (即, X 是 g 可度量空间) 当且仅当 X 是具有 σ 遗传闭包保持弱基的 k 空间 此外, 应用遗传闭包保持集族的理论, 作者的研究带动了相关的 Lašnev 空间、Σ^* 空间、空间的控制族及广义度量空间的闭映射理论等的研究, 如证明了可数多个 Lašnev 空间积的 Fréchet 子空间是 Lašnev 空间 (回答 1985 年 T. Nogura 的问题), 获得了 Lašnev 空间是由度量空间族控制的充要条件 (回答 1985 年 T. Miwa 的问题).

5 独立性问题

从"连续统假设"的独立性可见源于点集拓扑基石的度量空间与紧空间而构建的广义度量理论中出现的许多困难问题不是其自身所能克服的[2]. 自 70 年代迅速崛起的集论拓扑学解决了点集拓扑学中一批久悬未决的有趣难题, 为广义度量空间理论的发展注入了新鲜血液 最近二次的布拉格国际拓扑学会议行家们都认为用集论拓扑的方法研究点集拓扑学依然是今后一个时期内非常有前途的研究方向 我国学者刘应明院士在 70 年代就成功地将集论公理应用于拓扑学的研究 作者围绕 F. Jones 的 Moore 空间的度量化问题和 E. Michael 的乘积空间的 k 空间问题, 利用集论拓扑的 Martin 公理和 BF(ω_2) 等集论条件, 阐述了可分的 $\aleph$ 空间和具有点可数覆盖的 k 空间的乘积性质

1937 年，F. Jones 提出的“正规Moore 是否是可度量化空间”问题支配了半个世纪来度量化问题的研究，60 年代末也恰是 F. Tall 从研究Moore 空间中的可分性与可数链条件（CCC）入手导致集论拓扑学的飞速发展．作者借助 G. Reed 探讨可分正规Moore 空间独立性问题的重要技巧证明了“是否每一正规可分的 N 空间是 N_0 空间独立于通常的集论公理”，日本学者 N. Kemoto 在此基础上证明了它等价于一集论假设，已有不少文献报道作者提出的“CCC 的 N 空间”问题的研究进展．

1973 年 E. Michael 问：“两 k 空间的积空间是 k 空间的充要条件是什么”？G. Gruenhage，Y. Tanaka 等作了大量的研究，获得了确定的广义度量空间类中Michael 问题的较好解．作者利用多年来在点可数覆盖方面积蓄的实力，从国外学者的工作中提炼出较为成熟的“Tanaka 条件”，利用集论拓扑的方法在具确定的点可数覆盖空间中获得了Michael 问题的正面解．如证明了下述条件相互等价：（1）集论假设BF（ω_2）不成立；（2）两具有紧可数 k 网的 k 空间的乘积空间是 k 空间当且仅当它们满足 Tanaka 条件；（3）两具有点可数 k 网的 Fréchet 空间的乘积空间是 k 空间当且仅当它们满足 Tanaka 条件．在一些具较强性质的空间类中不附加集论假设也可获得Michael 问题的解．

6　函数空间拓扑

基于A. Arhangel'skii 的倡导及大量俄罗斯数学家的投入形成独树一帜的函数空间拓扑是很具活力的研究方向[13]．对点集拓扑学而言，它是覆盖性质、广义度量空间理论、集论拓扑与泛函分析、拓扑群、代数等数学分支结合的产物，其中心问题之一是：寻求拓扑性质 P、Q 使空间 X 具有性质 P 当且仅当函数空间 $C(X)$ 具有性质Q．函数空间理论的现代发展主要探讨函数空间上的基数函数、完备性及正规性等．作者对具点态收敛拓扑的函数空间 $C_p(X)$ 的正规性和桶形性质、对具紧开拓扑的函数空间 $C_k(X)$ 的弱第一可数性、对 $C_p(X)$ 和具 epi 拓扑的函数空间 $C_e(X)$ 的基数函数进行了细致的研究，获得了一系列的拓扑对偶条件，回答了A. Arhangel'skii，D. Lutzer 和R. McCoy 的有关问题，并纠正了 R. McCoy 和 I. Ntantu 专著[14]中的几个错误．

关于 $C_p(X)$ 的正规性，作者证明了对完全正则空间 X，下述条件相互等价：（1）X 是可数空间；（2）$C_p(X)$ 是可度量空间；（3）$C_p(X)$ 是分层空间；（4）$C_p(X)$ 是单调正规空间，这回答了 1994 年A. Arhangel'skii 关于函数空间单调正规性的刻画问题．关于 $C_p(X)$ 桶形性质，作者证明了对空间 X，（1）$C_p(X)$ 是桶形空间当且仅当对 X 的每一可数子空间 Y，$C_p(Y|X)$ 是桶形空间；（2）对 X 的任一子空间 Y，$C_p(Y|X)$ 是桶形空间当且仅当 Y 的每一闭且在 X 中有界的子集是有限的，由此否定回答了 1980 年D. Lutzer 和R. McCoy 关于函数空间桶形性质的子空间刻画的一个问题．关于 $C_k(X)$ 的弱第一可数性，作者证明了 $C_k(X)$ 是 Fréchet 空间当且仅当 $C_k^{\omega}(X)$ 是强 Fréchet 空间，这也等价于对 X 中的每一开 K 覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n: n \in N\}$ 存在 $U_n \in \mathcal{U}_n (\forall n \in N)$ 使得 $\{U_n: n \in N\}$ 为 X 的 K 序列．在函数空间基数函数的研究上，作者一方面将 $C_e(X)$ 上的一些可数性质拓广为一般的无限基数的形式，建立了 3 个基数函数公式，即（1）$nw(C_e(X)) = knw(X)$；（2）$\psi(C_e(X)) = ww(C_e(X)) = \pi w(C_e(X))$；（3）$d(C_e(X)) = ew(X)$．另一方面在涉及困难的函数空间的遗传稠密度和遗传Lindelöf 度问题中证明了在下列两种情形下有基数函数 $hd(C_p(X, Y)) = hL(X^{\omega})$，$hL(C_p(X, Y)) = hd(X^{\omega})$ 成立，（1）$ind(X) = 0$，Y 是无限的第二可数空间；（2）空间 Y 是含有圆盘的第二可数空间．

7　一些尚待解决的问题

为进一步研究的需要，作者在《广义度量空间与映射》[8] 中列举了一些尚未解决的问题，本节的几个问题是对它们的补充．

（1）具有 σ 局部可数 k 网的空间是否也具有 σ 局部可数 cs 网？

（2）具有 σ 局部可数 k 网的 K 半层空间是否是 N 空间？

(3) 具有闭包保持弱展开的空间是否是 g 可度量空间?

(4) 序列覆盖的闭映射是否保持 g 可度量空间?

(5) 开紧映射是否保持 $\aleph_0$ 空间?

(6) 开完备映射是否保持度量空间的商紧映像?

(7) M_1 空间是否满足完备逆像的 G_δ 对角线定理?

(8) 设 X 是度量空间的商 s 映像. 若 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的, 那么 X 是否是局部可分度量空间的商 s 映像?

(9) 局部可分度量空间的序列覆盖紧映像是否等价于具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点正则 cs 网的空间?

致谢: 感谢高国士教授、刘应明教授、林群研究员、吴利生教授、蒋继光教授、戴牧民教授和周友成教授等前辈对于作者科研工作的关心、指导与扶持.

参考文献:

[1] Arhangel'skii A, Pontryagin L. General Topology Ⅰ, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, V. 17 [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

[2] Van Mill J, Reed G. Open Problems in Topology [M]. Amsterdam: North-Holland, 1990.

[3] Arhangel'skii A. Mappings and spaces [J]. Uspechi Mat Nauk, 1966, 21 (4): 133- 184.

[4] Burke D, Lutzer D. Recent advances in the theory of generalized metric spaces [C]. In: Topology: Proc Memphis State Univ Topology Conference, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker, 1976. 1- 70.

[5] Gruenhage G. Generalized metric spaces [C]. In: Kunen K, Vaughan J eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984. 423- 501.

[6] Morita K, Nagata J. Topics in General Topology [M]. Amsterdam: North-Holland, 1989.

[7] Gruenhage G. Generalized metric spaces and metrizability [C]. In: Hušek M, van Mill J eds. Recent Progress in General Topology. Amsterdam: North-Holland, 1992. 239- 274.

[8] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[9] Aull C, Lowen R. Handbook of the History of General Topology [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, V1, 1997; V2, 1998.

[10] 刘应明, 蒋继光. 点集拓扑学 [C]. 自然科学年鉴, 1989, 3. 20- 3. 24.

[11] 国家自然科学基金委员会. 国家自然科学基金资助项目研究成果年报, 数理科学 [C]. 北京: 科学出版社, 2000.

[12] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射: [博士学位论文] [D]. 杭州: 浙江大学, 2000.

[13] Arhangel'skii A. Some observations on C_p-theory and bibliography [J]. Topology Applications, 1998, 89: 203- 221.

[14] McCoy R, Ntantu I. Topological properties of spaces of continuous functions, Lecture Notes in Math (No. 1315) [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988.

Recent Advances in the Theory of Generalized Metric Spaces

LIN Shou

(*Department of Mathematics, Fujian Teachers University, Fuzhou* 350007, *China*)

Abstract: A survey of the results obtained by author about the theory of generalized metric spaces is given. It contains the point-countable covers, the classified hypothesis of spaces, hereditarily closure-preserving covers, independence, the topology of function spaces and some open problems.

Key words: generalized metric space, point-countable cover, mapping, set theory, hereditarily closure-preserving cover, function space

(责任编辑 林 敏)