第42卷第2期
1999年3月

数学学报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol.42, No. 2
March, 1999

# 度量空间的紧覆盖 $s$ 映射

燕鹏飞

(安徽大学数学系 合肥 230039)

林 寿

(福建宁德师范高等专科学校数学系 宁德 352100)

**摘 要** 本文引入了紧有限分解网的概念，给出度量空间的紧覆盖 $s$ 象的内在刻画并由此导出度量空间 $s$ 映射的系列结论，部分地回答了 Michael-Nagami 问题.

**关键词** 点可数覆盖，紧有限分解网，度量空间，紧覆盖映射，$s$ 映射

**MR(1991) 主题分类** 54E99, 54C10

**中图分类** O189.1

## The Compact-covering $s$-mappings on Metric Spaces

Yan Pengfei

(*Department of Mathematics, Anhui University, Hefei* 230039, *P. R. China*)

Lin Shou

(*Department of Mathematics, Fujian Ningde Teachers' College, Ningde* 352100, *P. R. China*)

**Abstract** In this paper, the authors introduce the concept of compact-finite-partition networks and give the characterization of the compact-covering $s$-images of metric spaces, many well-known results about $s$-mappings on metric spaces are direct corollaries by the characterization, and the Michael-Nagami's problem has been partially answered.

**Keywords** Point-countable cover, Compact-finite-partition network, Metric space, Compact-covering mapping, $s$-mapping

**MR(1991) Subject Classification** 54E99, 54C10

**Chinese Library Classification** O189.1

Michael 和 Nagami 在 [1] 中对度量空间的紧覆盖映射进行了系统的研究并提出问题：度量空间的商 $s$ 象是否也是度量空间的紧覆盖商 $s$ 象？它已成为一般拓扑学的著名问题而激发很多有趣的工作[2–9]. 毫无疑问，寻求度量空间上两类映象的内在特征并试图证明它们的等价性是回答问题的路径之一. Tanaka[4] 利用 cs* 网的概念使 Arhangel'skii 提出的度量空间的商 $s$ 象的刻画问题得以完满解决，但度量空间的紧覆盖 $s$ 象的刻画问题更加困难. 刘川，戴牧民[8] 利用强 k 网的概念给出了度量空间的紧覆盖商 $s$ 象的第一刻画，但因形式较为复杂而使强 $k$ 网难以进一步发挥作用；另一方面，文 [2] 和文 [8] 分别利用简洁的闭 k 网和 cs 的网的概念

收稿日期：1998-03-02, 接受日期：1998-07-15
国家自然科学基金及福建省自然科学基金资助项目

构造了度量空间的紧覆盖商 $s$ 象，但闭 k 网和 cs 网的条件又都是严格强于 Michael-Nagami 问题中所需要的集族性质，所以用弱于闭 k 网和 cs 网且较为简单的概念来代替强 k 网应是解决 Michael-Nagami 问题的方向之一. 为此，本文我们引入紧有限分解网的概念作为闭 k 网， cs 网和强 k 网的深化，证明了一个空间是度量空间的紧覆盖 $s$ 象当且仅当它具有点可数的紧有限分解网，这不仅仅给出了度量空间的紧覆盖商 $s$ 象的一个较为简单的内在刻画，同时可导出近年来关于度量空间的 $s$ 象研究方面的系列结论，而且也为最终解决 Michael-Nagami 问题提供了有效的途径.

本文所讨论的空间均指 $T_2$ 空间，映射是连续到上的，文中未定义的述语和符号均以 [10] 为准.

**定义 1** 设 $f: X \to Y$ 是映射.

(1) $f$ 称为 $s$ 映射，若每一 $f^{-1}(y)$ 是 $X$ 的具有可数基的子空间；

(2) $f$ 称为紧覆盖映射 [1], 若 $Y$ 的每一紧子集都是 $X$ 的某一紧子集在 $f$ 下的象；

(3) $f$ 称为序列覆盖映射 [3], 若 $Y$ 的每一含极限点的收敛序列都是 $X$ 的某一紧子集在 $f$ 下的象.

**定义 2** 设 $K$ 是空间 $X$ 的紧子集. 由 $K$ 的闭子集组成的 $K$ 的有限覆盖称为 $K$ 的紧有限分解 (compact-finite-partition). 若 $K$ 在 $X$ 中的有限覆盖 $\mathcal{P}$ 存在 $K$ 的紧有限分解一一加细，则称 $\mathcal{P}$ 是 $K$ 的 CFP 覆盖.

易见，空间的紧子集 $K$ 的有限开覆盖或有限闭覆盖都是 $K$ 的 CFP 覆盖.

**定义 3** 设 $\mathcal{P}$ 是空间 $X$ 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 $X$ 的 cs* 网 [11] (cs 网 [12]), 若 $\{x_n\}$ 是 $X$ 中收敛于点 $x$ 的序列并且 $V$ 是 $x$ 在 $X$ 中的邻域，则存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ (存在 $m \in N$) 和 $P \in \mathcal{P}$ 使 $\{x\} \cup \{x_{n_i}: i \in N\} \subset P \subset V(\{x\} \cup \{x_n: n \geq m\} \subset P \subset V)$;

(2) $\mathcal{P}$ 称为 $X$ 的强 k 网 [8], 若对 $X$ 中的每个紧集 $K$, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子族 $\mathcal{P}(K)$ 满足：对 $K$ 的任意紧子集 $L$ 和 $X$ 中包含 $L$ 的开集 $V$, 存在 $\mathcal{P}(K)$ 的有限子族 $\mathcal{P}'$ 使 $\mathcal{P}'$ 是 $L$ 的 CFP 覆盖且 $\cup\mathcal{P}' \subset V$;

(3) $\mathcal{P}$ 称为 $X$ 的紧有限分解网 (序列有限分解网), 若对 $X$ 中的每个紧集 (含极限点的收敛序列) $K$ 及 $X$ 中包含 $K$ 的开集 $V$, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子族 $\mathcal{P}'$ 使 $\mathcal{P}'$ 是 $K$ 的 CFP 覆盖且 $\cup\mathcal{P}' \subset V$;

(4) $\mathcal{P}$ 称为 $X$ 的 k 网 [13], 若对 $X$ 中的每个紧集 $K$ 及 $X$ 中包含 $K$ 的开集 $V$, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子族 $\mathcal{P}'$ 使 $K \subset \cup\mathcal{P}' \subset V$. $\mathcal{P}$ 称为 $X$ 的闭 k 网，若 $\mathcal{P}$ 是由 $X$ 的闭子集组成的 k 网.

紧有限分解网和序列有限分解网的概念是受文 [14] 中紧有限分解覆盖与文 [8] 中强 k 网两概念的启发引入的. 显然，空间的闭 k 网或强 k 网都是紧有限分解网. 由 [10] 引理 2.7.4 的证明和文 [9] 的引理易验证下述两引理.

**引理 1** 设 $\mathcal{P}$ 是空间 $X$ 的点可数覆盖，则 $\mathcal{P}$ 是空间 $X$ 的 cs* 网当且仅当它是 $X$ 的序列有限分解网.

**引理 2** 若空间 $X$ 的每一紧子集均可度量化，则它的点可数 cs 网也是紧有限分解网.

**引理 3** 设 $\mathcal{P}$ 是空间 $X$ 的点可数覆盖，若 $K$ 是 $X$ 的非空紧集，则由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 $K$ 的极小 CFP 覆盖至多可数.

**证明** 设 $\{\mathcal{P}_\alpha: \alpha \in A\}$ 是由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 $K$ 的极小 CFP 覆盖全体. 若引理不成立，则

$|A| > \omega$, 于是存在 $n \in N$ 使

$$\mathcal{R} = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha \in A, |\mathcal{P}_\alpha| = n\}, \quad |\mathcal{R}| > \omega.$$

对于 $P \in \mathcal{P}$, 令 $\mathcal{R}(P) = \{\mathcal{P}_\alpha : P \in \mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{R}\}$. 取 $x_1 \in K$, 则 $\mathcal{R} = \cup\{\mathcal{R}(P) : x_1 \in P \in \mathcal{P}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是点可数的，于是存在 $P_1 \in \mathcal{P}$ 使 $x_1 \in P_1$ 且满足 $|\mathcal{R}(P_1)| > \omega$. 若 $n = 1$, 则 $|\mathcal{R}(P_1)| = 1$, 矛盾，故 $n > 1$. 设 $\mathcal{R}(P_1) = \{\mathcal{P}_\alpha : \alpha \in A_1\}$, 其中每一 $\mathcal{P}_\alpha = \{P_{\alpha i} : i \le n\}$ 被 $K$ 的紧有限分解 $\mathcal{F}_\alpha = \{F_{\alpha i} : i \le n\}$ 一一加细且 $P_{\alpha 1} = P_1$. 我们先证明 $\{\cup_{2 \le i \le n} F_{\alpha i} : \alpha \in A_1\}$ 具有有限交性质. 任取 $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha \in A_1\}$ 的有限子族 $\{\mathcal{F}_{\beta_j} : j \le m\}$, 则有 $\cup_{j \le m} F_{\beta_j 1} \subset P_1$. 由于 $\mathcal{P}_{\beta_j}$ 是 $K$ 的极小 CFP 覆盖，因而存在 $x \in K \setminus \cup_{j \le m} F_{\beta_j 1}$, 故 $x \in \cap_{j \le m} (\cup_{2 \le i \le n} F_{\beta_j i})$. 所以集族 $\{\cup_{2 \le i \le n} F_{\alpha i} : \alpha \in A_1\}$ 具有有限交性质，于是它具有非空的交. 取 $x_2 \in \cap_{\alpha \in A_1} (\cup_{2 \le i \le n} F_{\alpha i})$. 令 $\mathcal{R}(P_1, P) = \{\mathcal{P}_\alpha : P \in \mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{R}(P_1)\}$, 则 $\mathcal{R}(P_1) = \cup\{\mathcal{R}(P_1, P) : x_2 \in P \in \mathcal{P}\}$. 事实上，任取 $\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{R}(P_1)$, 由于 $x_2 \in \cup_{2 \le i \le n} F_{\alpha i}$, 存在 $i_0 > 1$ 使 $x_2 \in F_{\alpha i_0} \subset P_{\alpha i_0}$, $P_{\alpha i_0} \ne P_1$ 且 $\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{R}(P_1, P_{\alpha i_0})$. 因此，存在 $P_2 \in \mathcal{P}$ 使 $x_2 \in P_2$, $P_2 \ne P_1$ 且 $|\mathcal{R}(P_1, P_2)| > \omega$. 重复上述过程可得到点集 $\{x_i\}_{i \le n}$ 及集族 $\{P_i\}_{i \le n}$ 满足：每一 $x_i \in P_i \in \mathcal{P}$, 当 $i \ne j$ 时 $P_i \ne P_j$ 且 $|\mathcal{R}(P_1, P_2, \ldots, P_n)| > \omega$, 但是 $|\mathcal{R}(P_1, P_2, \ldots, P_n)| = 1$, 矛盾. 故，由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 $K$ 的极小 CFP 覆盖至多可数.

**定理** 空间 $X$ 是度量空间的紧覆盖 $s$ 象当且仅当它具有点可数的紧有限分解网.

**证明** 必要性. 不难验证紧覆盖映射保持紧有限分解网性质，所以度量空间的 $\sigma$ 局部有限基的紧覆盖 $s$ 象是点可数的紧有限分解网.

充分性. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 $X$ 的点可数的紧有限分解网. 记 $\mathcal{P} = \{P_\alpha : \alpha \in A\}$, 赋 $A$ 以离散拓扑，令

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in A^\omega : \{P_{\alpha_i} : i \in N\} \text{ 构成某点 } x_\alpha \text{ 在 } X \text{ 中的网}\}.$$

则 $M$ 是度量空间，定义 $f : M \to X$ 使得 $f(\alpha) = x_\alpha$. 由于 $X$ 是 $T_2$ 空间， $f(\alpha)$ 被唯一确定，容易验证 $f$ 是 $M$ 到 $X$ 上的 $s$ 映射，下面证明 $f$ 是紧覆盖映射.

设 $K$ 是 $X$ 的非空紧集. 由引理 3, 记由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 $K$ 的极小 CFP 覆盖族为 $\mathcal{F} = \{\mathcal{P}_i : i \in N\}$, 其中每一 $\mathcal{P}_i = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda_i\}$ 被 $K$ 的紧有限分解 $\mathcal{F}_i = \{F_\alpha : \alpha \in \Lambda_i\}$ 一一加细. 置 $L = \{(\alpha_i) \in \prod_{i \in N} \Lambda_i : \cap_{i \in N} F_{\alpha_i} \ne \phi\}$. 那么

(1) $L$ 是紧集 $\prod_{i \in N} \Lambda_i$ 中的闭集，从而 $L$ 是 $A^\omega$ 中的紧集.

设 $\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{i \in N} \Lambda \setminus L$, 则 $\cap_{i \in N} F_{\alpha_i} = \phi$, 从而存在 $i_0 \in N$ 使 $\cap_{i \le i_0} F_{\alpha_i} = \phi$. 令 $W = \{(\beta_i) \in \prod_{i \in N} \Lambda_i : \forall i \le i_0, \beta_i = \alpha_i\}$, 则 $W$ 是 $\prod_{i \in N} \Lambda_i$ 中包含 $\alpha$ 的开集且 $W \cap L = \phi$;

(2) $L \subset M$ 且 $f(L) \subset K$.

设 $\alpha = (\alpha_i) \in L$. 取定 $x = \cap_{i \in N} F_{\alpha_i}$, 如果我们证明了 $\{\mathcal{P}_{\alpha_i} : i \in N\}$ 是点 $x$ 在 $X$ 中的网，那么 $\alpha \in M$ 且 $f(\alpha) = x \in K$, 于是有 $L \subset M$ 且 $f(L) \subset K$. 设 $V$ 是 $x$ 在 $X$ 中的开邻域，则存在 $x$ 在 $K$ 中的开邻域 $W$ 使 $\mathrm{cl}_K W \subset V$, 于是存在 $\mathcal{P}$ 的有限子族 $\mathcal{P}'$ 使 $\mathcal{P}'$ 是 $\mathrm{cl}_K W$ 的 CFP 覆盖且 $\cup\mathcal{P}' \subset V$. 由于紧集 $K \setminus W \subset X \setminus \{x\}$, 又存在 $\mathcal{P}$ 的有限子族 $\mathcal{P}''$ 使 $\mathcal{P}''$ 是 $K \setminus W$ 的 CFP 覆盖且 $\cup\mathcal{P}'' \subset X \setminus \{x\}$. 令 $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$, 则 $\mathcal{P}^*$ 是 $K$ 的 CFP 覆盖，于是存在 $k \in N$ 使 $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}^*$. 因为 $x \in F_{\alpha_k} \subset P_{\alpha_k} \in \mathcal{P}_k$, 所以 $P_{\alpha_k} \in \mathcal{P}'$, 故 $P_{\alpha_k} \subset V$, 从而 $\{P_{\alpha_i} : i \in N\}$ 是点 $x$ 在 $X$ 中的网；

(3) $K \subset f(L)$.

设 $x \in K$. 对 $i \in N$, 存在 $\alpha_i \in \Lambda_i$ 使 $x \in F_{\alpha_i}$, 令 $\alpha = (\alpha_i)$, 则由 (2) 所证知 $\alpha \in L$ 且 $f(\alpha) = x$.

综上所述, $f$ 是紧覆盖 $s$ 映射. 证毕.

由定理及 [10] 命题 2.3.1 和命题 2.1.16 有

**推论 1** 空间 $X$ 是度量空间的紧覆盖商 $s$ 象当且仅当它是具有点可数的紧有限分解网的 $k$ 空间.

如果在上述定理的证明中用序列有限分解网代替紧有限分解网, 则由引理 1 可得

**推论 2**[6] 空间 $X$ 是度量空间的序列覆盖 $s$ 象当且仅当它具有点可数 cs* 网.

**推论 3**[4] 空间 $X$ 是度量空间的商 (且序列覆盖) $s$ 象当且仅当它是具有点可数 cs* 网的序列空间.

由推论 1 和推论 3 我们可将涉及映射与空间关系的 Michael-Nagami 问题转化为仅相关于空间构造的形式: 具有点可数 cs* 网的序列空间是否也具有点可数的紧有限分解网?

**推论 4**[8] 具有点可数强 k 网的空间是度量空间的紧覆盖 $s$ 象.

**推论 5**[2] 具有点可数闭 k 网的空间是度量空间的紧覆盖 $s$ 象.

**推论 6**[9] 具有点可数 cs 网且每一紧子集均可度量化的空间是度量空间的紧覆盖 $s$ 象.

**注** 近来我们在文 [16] 中利用本文的引理 3 证明了若 $\mathcal{P}$ 是空间 $X$ 的点可数覆盖, 则 $\mathcal{P}$ 是 $X$ 的紧有限分解网当且仅当 $\mathcal{P}$ 是 $X$ 的强 k 网.

## 参 考 文 献


1 Michael E, Nagami K. Compact-covering images of metric spaces. Proc Amer Math Soc, 1973, 37(1): 260–266
2 Michael E. $\aleph_0'$-spaces and a function space theorem of R Pol. Indiana Univ Math J, 1977, 26(2): 299–306
3 Gruenhage G, Michael E, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers. Pacific J Math, 1984, 113(2): 303–332
4 Tanaka Y. Point-countable covers and $k$-networks. Topology Proc, 1987, 12(1): 327–349
5 Michael E. Some Problems. In: Open Problems in Topology, J van Mill and G M Reed Eds. Amsterdam: North-Holland, 1990, 271–278
6 林寿. 度量空间的序列覆盖 $s$ 象. 东北数学, 1993, 9(1): 81–85
7 Cho M, Just W. Countable-compact-covering maps and compact-covering maps. Topology Appl, 1994, 58(2): 127–143
8 刘川, 戴牧民. 度量空间的紧覆盖 $s$ 象. 数学学报, 1996, 39(1): 41–44
9 林寿. 关于 Michael-Nagami 问题的注记. 数学年刊, 1996, 17A(1): 9–12
10 林寿. 广义度量空间与映射. 北京: 科学出版社, 1995
11 Gao Zhimin (高智民). ℵ-space is in variant under perfect mappings. Questions Ansers in General Topology, 1987, 5(2): 271–279
12 Siwiec F. Sequence-covering and countably-bi-quotient mappings. General Topology Appl, 1971, 1(2): 143–154
13 O'Meara P. On paracompactness in function spaces with compact open topology. Proc Amer Math Soc, 1971, 29(1): 183–189
14 燕鹏飞. 度量空间的紧映象. 数学研究, 1997, 30(2): 185–187, 198
15 儿玉之宏, 永见启应著, 方嘉琳译. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 1984
16 林寿, 燕鹏飞, 刘川. k 网与 Michael 的两个问题. 数学进展, 将发表