第5卷第2期 苏州大学学报（自然科学） Vol.5 No.2
1989年4月 JOURNAL OF SUZHOU UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE) Apr.1989

关于伪基的一个注记

林 寿
（福建省宁德师范专科学校）

近年来，随着人们对局部有限集族和点有限集族研究的进一步深入，点可数集族引起了一般拓扑学者的广泛兴趣。E.Michael在文[1]中引进了伪基(pseudo—base)的概念，并通过它定义了一类重要的广义度量空间—$\aleph_0$-空间，即具有可数伪基的正则空间。这篇简短的注记证明伪基的一个有趣性质：具有点可数伪基的Hausdorff空间具有可数伪基。因而$\aleph_0$-空间等价于具有点可数伪基的正则空间。

空间X的子集族$\mathscr{P}$称为X的伪基([1])，如果对于X的任意紧子集K和开集$G\supset K$，存在$\mathscr{P}$中的元P使$K\subset P\subset G$。

定理 若Hausdorff空间X具有点可数伪基，那么X具有可数伪基。

证 设$\mathscr{P}$是Hausdorff空间X的点可数伪基。证明分以下三步进行。

首先证明X具有点G_δ-性质。

对于$x\in X$，不妨设$X\backslash\{x\}\neq\phi$，取$y\in X\backslash\{x\}$。

$\mathscr{G}=\{X\backslash\overline{P}: y\in P\subset\overline{P}\subset X\backslash\{x\},\ P\in\mathscr{P}\}$由于$X$是Hausdorff空间且$\mathscr{P}$是伪基，所以$\mathscr{G}$不空。由于$\mathscr{P}$是点可数的，所以$\mathscr{G}$是$X$的可数开子集族且$X\in\cap\mathscr{G}$。若$z\in X\backslash\{x\}$，由于$X$是Hausdorff空间，存在$X$的开子集$V$使$\{z,y\}\subset V\subset\overline{V}\subset X\backslash\{x\}$。又由于$\{z,y\}$是$X$的紧子集且$\mathscr{P}$是$X$的伪基，存在$P\in\mathscr{P}$使$\{z,y\}\subset P\subset V$。于是$\overline{P}\subset X\backslash\{x\}$且$y$，$z\in P$。故$z\notin\cap\mathscr{G}$。所以$\{x\}=\cap\mathscr{G}$。因而$X$具有点$G_\delta$-性质。

其次证明X是可分空间。

取定$x\in X$。由于X具有点G_δ-性质，存在X的可数开子集族$\{V_n: n\in N\}$使$\{x\}=\cap\{V_n: n\in N\}$。记可数集族$\{P\in\mathscr{P}: x\in P\}=\{P_m: m\in N\}$。对于$n,m\in N$，若$P_m\backslash V_n=\phi$，令$a_{n,m}=x$。注意由于$V_n$是包含点$x$的开集，而$\mathscr{P}$是伪基，所以这种情况是存在的。若$P_m\backslash V_n\neq\phi$，取定一点$a_{n,m}\in P_m\backslash V_n$。置$A=\{a_{n,m}: n,m\in N\}$。对于$X$的任意非空开子集$G$，如果$G$包含点$x$则已得证。下设$G\backslash\{x\}\neq\phi$。取定$y\in G\backslash\{x\}$。因为$y\neq x$，存在$n\in N$使$y\in X\backslash V_n$。由于紧子集$\{x,y\}\subset G\cup V_n$，存在$P\in\mathscr{P}$使$\{x,y\}\subset P\subset G\cup V_n$。又因为$x\in P$，存在$m\in N$使$P=P_m$。于是$\{x,y\}\subset P_m\subset G\cup V_n$，因而$P_m\backslash V_n\subset G$，但是$y\in P_m\backslash V_n$，由$a_{n,m}$的取法知$a_{n,m}\in G$。因此$A$是$X$的可数稠子集。故$X$是可分空间。

最后证明X具有可数伪基。

收稿日期：1987—11—09

设 $A=\{x_i: i\in N\}$是空间X的可数稠子集。令$\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}: P\cap A\neq\phi\}$，那么$\mathscr{P}'$是可数集族。对于$X$的任意紧子集$K$和开子集$G\supset K$。因为$A$是$X$的可数稠子集，存在$i\in N$使$x_i\in G$。于是紧子集$K\cup\{x_i\}\subset G$。因而存在$P\in\mathscr{P}$使$K\cup\{x_i\}\subset P\subset G$。由于$P\cap A\neq\phi$，所以$P\in\mathscr{P}'$且$K\subset P\subset G$。故$\mathscr{P}'$是$X$的可数伪基。证毕。

点可数分离开复盖（或点可数p—基）是点可数基的一种推广。对于伪基的情形又是怎样的呢？空间X的子集族$\mathscr{P}$称为X的p—伪基（或紧集与点分离复盖），如果对于X的任意紧子集K和$x\in X\setminus K$，存在$P\in\mathscr{P}$使$K\subset P\subset X\setminus\{x\}$。设$X$是任一正则，可数的非$\aleph_0$-空间（见文[1]例12.4）。记$X=\{x_n: n\in N\}$。对于$n\in N$，置$P_n=X\setminus\{x_n\}$。那么$\mathscr{P}=\{P_n: n\in N\}$是正则空间$X$的可数（因而点可数）$p$—伪基，但是$X$不具有可数伪基。

参 考 文 献

1　MichaelE. $\aleph_0$-spaces. J *Math* Mech, 1966; 21: 983—1002

A NOTE ON PSEUDO-BASES

Lin Shou

(Ningde Teachers' College, Fujian)

Abstract: In this paper, it is shown that a Hausdroff space has a point-countable pseudo-base if and only if it has a countable pseudo-base.

Keywords: pseudo-base, Hausdroff space, countable pseudo-base.

（本文责任编辑：董张维）