福建省科协第二届青年学术年会

——中国科协第二届青年学术年会卫星会议

论　文　集

福建省科协第二届青年学术年会
执　行　委　员　会　编

福建科学技术出版社

Michael-Nagami 问题的注记*

林　寿

（福建宁德师范专科学校）

摘要　本文的主要结果是度量空间的序列覆盖商 s 映象是度量空间的紧覆盖、序列覆盖商 s 映象，它部分回答了 Michael-Nagami 问题：度量空间的商 s 映象是否是度量空间的紧覆盖商 s 映象。

关键词　度量空间　商映射　序列覆盖映射　紧覆盖映射　s 映射　cs 网络

1973 年 Michael 和 Nagami 提出问题[1]：度量空间的商 s 映象是否是度量空间的紧覆盖商 s 映象？该问题已被列为拓扑学中尚未解决的经典难题[2]，引起了国内外许多拓扑学工作者的兴趣[2-7]并且获得了部分结果。1987 年 Tanaka 在研究点可数覆盖时也曾提出问题[4]：度量空间的商 s 映象是否等价于具有点可数 cs 网络的序列空间？基于上述两个问题，本文讨论具有点可数 cs 网络的空间，证明了具有点可数 cs 网络的序列空间等价于度量空间的（紧覆盖）序列覆盖商 s 映象，其作用不仅仅在于深化了原有的定理，否定回答了 Tanaka 问题，而且提供了解决 Michael-Nagami 问题的新途径。

本文约定：空间是指满足 T_2 分离性公理的拓扑空间，映射是连续的满函数。

定义 1　设 X 是空间，$\mathscr{P}$ 是 X 的子集族。$\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs 网络[8]，若对 X 中任一收敛序列 $\{x_n\}$，如果 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 U 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $m \in N$ 和 $P \in \mathscr{P}$ 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geqslant m\} \subset P \subset U$。

定义 2　设映射 $f: X \to Y$.

（1）f 称为 s 映射，若对于每一 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的可分子空间。

（2）f 称为序列覆盖映射[9]，若 Y 的每一收敛序列是 X 的收敛序列的象。

（3）f 称为紧覆盖映射[1]，若 Y 的每一紧子集是 X 的紧子集的象。

先证明几个引理。

引理 1　具有点可数 cs 网络的空间是度量空间的序列覆盖 s 映象。

证. 设空间 Y 具有点可数 cs 网络 $\mathscr{P}$。不妨设 $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭，记 $\mathscr{P} = \{P_\alpha : \alpha \in A\}$。对每一 $i \in N$，空间 A_i 定义为集合 A 赋予离散拓扑。

置 $X = \{\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i \in N} A_i : \{P_{\alpha_i} : i \in N\}$ 是 Y 中某点 $y(\beta)$ 在 Y 中的网络$\}$，则 M 是度量空间，并且由 $f(\beta) = y(\beta)$ 可定义函数 $f: X \to Y$。易直接验证 f 是 s 映射。往

* 国家数学天元基金合作访问项目及福建省自然科学基金资助课题

证 f 是序列覆盖映射。对于 Y 中的任一收敛序列 $\{y_n\}$，设 $\{y_n\}$ 收敛于 y_0。不妨设 y_0 及所有 y_n 互不相同，记 $K=\{y_m: m\in\omega\}$，并且设 U 是 Y 中任一包含 K 的开子集，称 $\mathscr{P}$ 的子集族 $\mathscr{F}$ 具有性质 $F(K, U)$，如果 $\mathscr{F}$ 满足

(1) $\mathscr{F}$ 是有限的；

(2) 对每一 $P\in\mathscr{P}$ 有 $\varnothing\neq P\cap K\subset P\subset U$；

(3) 对每一 $y\in K$ 存在唯一的 $P\in\mathscr{F}$ 使得 $y\in P$；

(4) 若 $y_0\in P\in\mathscr{F}$，则 $K\setminus P$ 是有限的。

令

$\{\mathscr{F}\subset\mathscr{P}: \mathscr{F}$ 具有性质 $F(K, Y)\}=\{\mathscr{F}_i: i\in N\}$，那么对于每一 $i\in N$ 和 $m\in\omega$ 存在唯一的 $\alpha_{im}\in A_i$ 使得 $y_m\in P_{\alpha_{im}}\in\mathscr{F}_i$。可以验证 $\{P_{\alpha_{im}}: i\in N\}$ 是 y_m 在 Y 中的网络，于是若定义 $x_m=(\alpha_{im})\in\prod_{i\in N}A_i$，则 $x_m\in X$ 且 $f(x_m)=y_m$. 对于每一 $i\in N$，存在 $n(i)\in N$ 使得当 $n\geq n(i)$ 时有 $a_{in}=\alpha_{io}$，从而在 A_i 中序列 $\{\alpha_{in}\}$ 收敛于 α_{io}，故在 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_o。综上所述，f 是序列覆盖映射。

引理 2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 Y 的点可数 cs 网络，若 K 是 Y 的第一可数的紧子集且 W 是 Y 的开子集，如果 $y\in K\cap W$，则存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $y\in \mathrm{int}_K(P\cap K)\subset P\subset W$。

证. 置

$\mathscr{P}'=\{P\cap K: P\in\mathscr{P}$ 且 $P\subset W$ 或 $P\subset Y\setminus\{y\}\}$，则 $\mathscr{P}'$ 是 K 的点可数的 cs 网络。让 $\{V_n: n\in N\}$ 是 y 在 K 中的可数局部基，并且置

$\mathscr{F}=\{F\in\mathscr{P}': 存在 n\in N 使得 V_n\subset F\}$，

由文〔10〕引理 7 (3) 的证明知 $\mathscr{F}$ 是 y 在 K 中的邻域基，于是存在 $F\in\mathscr{F}$ 使得 $y\in\mathrm{int}_K(F)\subset K\cap W$，即存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $y\in\mathrm{int}_K(P\cap K)\subset P\subset W$。

设 $\mathscr{P}$ 是空间 Y 的子集族并且 $K\subset Y$，记

$(\mathscr{P}|K)^0=\{\mathrm{int}_K(P\cap K): P\in\mathscr{P}\}$，

$(\mathscr{P}|K)^{0-}=\{\mathrm{cl}_K(\mathrm{int}_K(P\cap K)): P\in\mathscr{P}\}$.

引理 3 设空间 Y 具有点可数 cs 网络，若 Y 的每一紧子集是第一可数的子空间，则 Y 是度量空间的紧覆盖、序列覆盖 s 映象。

证. 使用引理 1 证明中的记号，存在度量空间 X 和序列覆盖 s 映射 $f: X\to Y$。往证 f 是紧覆盖映射。设 K 是 Y 的紧子集，那么 K 是第一可数空间。由引理 2，$(\mathscr{P}|K)^0$ 是 K 的点可数基，于是 K 是紧可度量空间，从而 $(\mathscr{P}|K)^0$ 是 K 的可数基。置

$\mathscr{H}=\{P\in\mathscr{P}: \mathrm{int}_K(P\cap K)\neq\varnothing\}$，

则 $\mathscr{H}$ 是可数的，于是可以记

$\{\mathscr{H}'\subset\mathscr{H}: \mathscr{H}'$ 是有限的并且 $\bigcup(\mathscr{H}'|K)^0=K\}$

$=\{\mathscr{H}_k: k\in N\}$.

这时对于每一 n、$m\in N$，存在 $k\in N$ 使得 $\mathscr{H}_k<\mathscr{H}_n\wedge\mathscr{H}_m$. 我们断言对每一 $i\in N$ 存在 $j\in N$ 使得 $(\mathscr{H}_j|K)^{0-}<(\mathscr{H}_i|K)^0$。事实上，对每一 $y\in K$，存在 $H\in\mathscr{H}_i$、K 的开子集 G 和 $Q\in\mathscr{H}$ 使得 $y\in\mathrm{int}_K(Q\cap K)\subset G\subset\mathrm{cl}_K(G)\subset\mathrm{int}_K(H\cap K)$，于是 $\mathrm{cl}_K(\mathrm{int}_K(Q\cap K))\subset\mathrm{int}_K(H\cap K)$。由 K 的紧性，存在 $j\in N$ 使得 $(\mathscr{H}_j|K)^{0-}<(\mathscr{H}_i|K)^0$。

现在取 $\{\mathscr{H}_k\}$ 的子序列 $\{h_i\}$ 满足对于每一 $i\in N$ 有 $h_i<\mathscr{H}_i$ 并且 $(h_{i+1}|K)^{0-}<(h_i|K)^0$，则存在 A_i 的有限子集 B_i 使得 $h_i=\{P_\alpha: \alpha\in B_i\}$. 置

$L=\{\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}B_i: \varnothing\neq cl_K(int_K(P_{\alpha_{i+1}}\cap K))\subset int_K(P_{\alpha_i}\cap K),\ i\in N\}$，

那么 L 是 $\prod_{i\in N}B_i$ 的闭子集，于是 L 是 $\prod_{i\in N}B_i$ 的紧子紧。往证 $L\subset X$ 且 $f(L)=K$.

对于每一 $\beta=(\alpha_i)\in L$，则存在点 $y\in\bigcap_{i\in N}int_K(P_{\alpha_i}\cap K)$. 如果 W 是 y 在 Y 中的开邻域，那么对于某一 $P\in\mathscr{P}$ 有 $y\in int_K(P\cap K)\subset P\subset W$. 由于 $K\setminus int_K(P\cap K)$ 的紧性，存在有限的 $\mathscr{H}'\subset\mathscr{H}$ 使得 $K\setminus int_K(P\cap K)\subset\bigcup(\mathscr{H}'|K)^0\subset\bigcup\mathscr{H}'\subset Y\setminus\{y\}$，于是存在 $i\in N$ 使得 $\mathscr{H}_i=\mathscr{H}'\cup\{P\}$，从而 $y\in P_{\alpha_i}\subset P\subset W$。这表明了 $\{P_{\alpha_i}: i\in N\}$ 是 y 在 Y 中的网络，因此 $\beta\in X$ 且 $f(\beta)=y$，故 $L\subset X$ 且 $f(L)\subset K$。另一方面，对于每一 $y\in K$ 和 $i\in N$，置

$$\mathscr{U}_i=\{U\in(h_i|K)^0: y\in U\},$$

那么 $\mathscr{U}_i$ 是非空的有限集族。如果 $V\in\mathscr{U}_{i+1}$，则存在 $U\in\mathscr{U}_i$ 使得 $cl_k(V)\subset U$，从而由 König 引理（见〔11〕引理 37.4），存在 $(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}B_i$ 使得对于每一 $i\in N$ 有 $cl_K(int_K(P_{\alpha_{i+1}}\cap K))\subset int_K(P_{\alpha_i}\cap K)\in\mathscr{U}_i$，因此 $(\alpha_i)\in L$ 且 $y\in\bigcap_{i\in N}int_K(P_{\alpha_i}\cap K)$。如前所证，$\{P_{\alpha_i}: i\in N\}$ 是 y 在 Y 中的网络，所以 $f((\alpha_i))=y$，故 $f(L)\supset K$。综上所述，$f(L)=K$。

因此，Y 是度量空间 X 在紧覆盖、序列覆盖 s 映射 f 下的象。

本文的主要结果是

定理 对空间 Y 下述条件相互等价：

(1) Y 是度量空间的紧覆盖、序列覆盖商 s 映象。

(2) Y 是度量空间的序列覆盖商 s 映象。

(3) Y 是具有点可数 cs 网络的序列空间。

证. 只须证明 (2) ⇒ (3) ⇒ (1)。

设空间 Y 是度量空间 X 在序列覆盖商 s 映射 f 下的象。设 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 局部有限基，令

$$\mathscr{P}=\{f(B): B\in\mathscr{B}\}。$$

由于 f 是 s 映射，$\mathscr{P}$ 是 Y 的点可数集族；又由于 f 是序列覆盖映射，$\mathscr{P}$ 是 Y 的 cs 网络，故 Y 具有点可数 cs 网络。因为商映射保持序列空间性质，所以 Y 是序列空间。

现在，设 Y 是具有点可数 cs 网络的序列空间，那么 Y 的紧子集是可度量的子空间[3]。由引理 3，存在度量空间 X 和紧覆盖、序列覆盖 s 映射 $f: X\to Y$。因为 Y 是序列空间并且 f 是紧覆盖映射，所以 f 还是商映射[11]，故 Y 是度量空间的紧覆盖、序列覆盖商 s 映象。定理证毕。

最后，我们对定理及相关的 Michael-Nagami 问题作四点说明。

(1) βN 是具有点可数 cs 网络的紧空间，但是 βN 不可度量化。$N\cup\{P\}$ $(P\in\beta N\setminus N)$ 是具有点可数 cs 网络的空间且所有紧子集可度量化，但是 $N\cup\{P\}$ 不是序列空间。

(2) 我们已经知道度量空间的商 s 映象未必具有点可数的 cs 网络[10]，定理表明可用强于商 s 映射的（紧覆盖）序列覆盖商 s 映射来刻划具有点可数 cs 网络的序列空间，因此完满地回答了 Tanaka 问题。

(3) Michael 和 Nagami[1]证明了具有点可数基的空间等价于度量空间的紧覆盖开 *s* 映象。由于定义于第一可数空间上的开映射是序列覆盖映射[9]，所以定理深化了 Michael、Nagami 的结果。

(4) Michael 证明了具有点可数闭 *k* 网络的序列空间是度量空间的紧覆盖商 *s* 映象[3]。Foged 指出具有点可数基的空间未必具有点可数的闭 *k* 网络〔12，定理 9. 3 (6)〕，所以定理

是涉及 Michael-Nagami 问题的较好的表现形式，它为 Michael-Nagami 问题的解决提供了一条新线索。

参考文献

[1] Michael E., Nagami K., Compact-covering images of metric spaces, Proc. AMS., 37 (1973), 260—266.

[2] Michael E., Some problems, In: Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed Eds., Amsterdam: North-Holland, 1990, 271—278.

[3] Gruenhage G., Michael E., Tanaka Y., Spaces determined by point-countable covers, Pacific J. Math., 113 (1984), 303—332.

[4] Tanaka Y., Point-countable covers and k-networks, Topology Proc., 12 (1987), 327—349.

[5] Lin Shou (林寿), The sequence-covering s-images of metric spaces, Northeastern Math. J., 9 (1993), 81—85.

[6] Just W., Wicke H., Some conditions under which tri-quotient or compact-covering maps are inductively perfect, Topology Appl., 55 (1994), 289—305.

[7] Cho M. H., Just W., Countable-compact-covering maps and compact-covering maps, Topology Appl., 58 (1994), 127—143.

[8] Guthrie J. A., A characterization of S\T. —spaces, General Topology Appl., 1 (1971), 105—110.

[9] Siwiec F., Sequence-covering and countably-bi-quotient mappings, General Topology Appl., 1 (1971), 143—154.

[10] Lin Shou (林寿), Tanaka Y., Point-countable k-networks, closed maps, and related results, Topology Appl., 59 (1994), 79—86.

[11] 儿玉之宏，永见启应，拓扑空间论，北京：科学出版社，1984。

[12] Gruenhage G., Generalized metric spaces and metrization, In: Recent Progress in General Topology, M. Husek and J. van Mill Eds., Amsterdam: North-Holland, 1992, 239—274.

作者简介 林寿，男，1960 年 3 月生，1987 年 7 月在苏州大学获硕士学位，宁德师专数学系副教授。