数 学 年 刊
17A: 1(1996),9-12.

Michael-Nagami 问题的注记**

林 寿*

提 要

本文证明 Hausdorff 空间 Y 是度量空间的强紧覆盖商 s 映象当且仅当 Y 是具有点可数 cs 网络的序列空间，它部分地回答了 Michael-Nagami 问题.

关键词 点可数覆盖，紧覆盖映射，序列覆盖映射， s 映射，序列空间， cs 网络

MR (1991) 主题分类 54E99, 54C10

中图法分类 O189.1

1973 年 Michael 和 Nagami 提出问题 [12]: 如果空间 X 是度量空间的商 s 映象，那么 X 是否是度量空间的紧覆盖商 s 映象？该问题作为一般拓扑学中尚未解决的经典问题引起了许多研究工作者的兴趣 [1,3,5,8,11,14]. 几个相关的结果是

定理 A[12] 对 T_2 空间 Y 下述条件相互等价

(1) Y 是度量空间的开 s 映象；

(2) Y 是度量空间的紧覆盖开 s 映象；

(3) Y 具有点可数基.

定理 B[3,14] 对 T_2 空间 Y 下述条件相互等价

(1) Y 是度量空间的商 s 映象；

(2) Y 是度量空间的序列覆盖商 s 映象；

(3) Y 是具有点可数 cs^* 网络的序列空间.

这表明对空间特定的点可数覆盖的研究将是解决 Michael-Nagami 问题的关键. 本文讨论具有点可数 cs 网络的空间，并且证明了具有点可数 cs 网络的序列空间是度量空间的强紧覆盖商 s 映象，它不仅仅深化了定理 A, 而且提供了解决 Michael-Nagami 问题的新途径.

本文约定：空间是满足 T_2 分离性公理的拓扑空间，映射是连续的满函数， N 是自然数集并且 $\omega=\{0\}\bigcup N$. 首先回忆一些基本的定义.

定义 1 设 $f: X\to Y$ 是映射.

(1) f 称为 s 映射，若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的具有可数基的子空间.

(2) f 称为紧覆盖映射 [10], 若 Y 的每一紧子集都是 X 的某一紧子集在 f 下的象.

(3) f 称为序列覆盖映射 [3], 若 Y 的每一收敛序列都是 X 的某一紧子集在 f 下的象.

本文 1994 年 9 月 2 日收到， 1995 年 1 月 30 日收到修改稿.

*福建宁德师范专科学校，宁德 352100.

**国家数学天元基金合作访问项目及福建省自然科学基金资助的项目.

(4) f 称为强序列覆盖映射 [13], 若 Y 的每一收敛序列都是 X 的某一收敛序列在 f 下的象.

(5) f 称为强紧覆盖映射，若 f 既是强序列覆盖映射又是紧覆盖映射.

显然,

$$\text{强紧覆盖映射} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{紧覆盖映射}\\ \text{强序列覆盖映射}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{序列覆盖映射}.$$

定义 2 设 X 是一个空间， $\mathcal{P}$ 是 X 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的网络，若对 X 的每一开集 U 及任意的 $x \in U$, 存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in P \subset U$.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网络 [4], 若 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于点 x 的序列并且 U 是 x 在 X 中的邻域，那么存在 $m \in N$ 和 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $\{x\}\bigcup\{x_n : n \geq m\} \subset P \subset U$.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs^* 网络 [2], 若 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于点 x 的序列并且 U 是 x 在 X 中的邻域，那么存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $\{x\}\bigcup\{x_{n_i} : i \in N\} \subset P \subset U$.

定理 1 空间 Y 是度量空间的强序列覆盖 s 映象当且仅当 Y 具有点可数 cs 网络.

证 设空间 Y 是度量空间的强序列覆盖 s 映象，则存在度量空间 X 和强序列覆盖 s 映射 $f : X \to Y$. 设 $\mathcal{B}$ 是 X 的 σ 局部有限基，那么 $\{f(B) : B \in \mathcal{B}\}$ 是空间 Y 的点可数 cs 网络.

反之，设空间 Y 具有点可数 cs 网络 $\mathcal{P}$. 不妨设 $\mathcal{P}$ 关于有限交封闭. 记 $\mathcal{P} = \{P_\alpha : \alpha \in A\}$. 对每一 $i \in N$, 空间 A_i 定义为集合 A 赋予离散拓扑. 置

$$X = \{\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i\in N} A_i : \{P_{\alpha_i} : i \in N\} \text{ 是 } Y \text{ 中某点 } y(\beta) \text{ 在 } Y \text{ 中的网络}\},$$

那么 X 是度量空间，并且由 $f(\beta) = y(\beta)$ 定义 $f : X \to Y$ 是一个函数. 易验证 f 是从 X 到 Y 上的 s 映射 [7]. 我们还要证明 f 是强序列覆盖映射. 对 Y 中收敛于点 y_0 的序列 $\{y_n\}$, 不妨设所有 y_m 互不相同. 让 $K = \{y_m : m \in \omega\}$, 并且设 U 是 Y 中任一包含 K 的开子集，称 $\mathcal{P}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 具有性质 $F(K,U)$, 如果 $\mathcal{F}$ 满足

(1) $\mathcal{F}$ 是有限的；

(2) 对每一 $P \in \mathcal{F}$ 有 $\emptyset \neq P\bigcap K \subset P \subset U$;

(3) 对每一 $z \in K$ 存在唯一的 $P_z \in \mathcal{F}$ 使得 $z \in P_z$;

(4) 若 $y_0 \in P \in \mathcal{F}$, 那么 $K \backslash P$ 是有限的.

置

$$\{\mathcal{F} \subset \mathcal{P} : \mathcal{F}\text{具有性质}F(K,Y)\} = \{\mathcal{F}_i : i \in N\}.$$

对每一 $i \in N$ 和 $m \in \omega$ 存在 $\alpha_{im} \in A_i$ 使得 $y_m \in P_{\alpha_{im}} \in \mathcal{F}_i$. 让 $x_m = (\alpha_{im}) \in \prod_{i\in N} A_i$, 可以验证 $\{P_{\alpha_{im}}, i \in N\}$ 是点 y_m 在 Y 中的网络，因而对每一 $m \in \omega$ 有 $x_m \in X$ 且 $f(x_m) = y_m$. 对每一 $i \in N$ 存在 $n(i) \in N$ 使当 $n \geq n(i)$ 时有 $\alpha_{in} = \alpha_{i0}$, 因此在 A_i 中序列 $\{\alpha_{in}\}$ 收敛于 α_{i0}, 于是在 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0. 这表明 f 是强序列覆盖映射，定理证毕.

现在，给出度量空间的强紧覆盖 s 映象的特征.

引理 设 $\mathcal{P}$ 是空间 Y 的点可数 cs 网络. 如果 $y \in K\bigcap W$, 其中 W 是 Y 的开子集、K 是 Y 的紧且第一可数的子集，那么存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $y \in \mathrm{int}_K(P\bigcap K) \subset P \subset W$.

证　让 $\{V_n : n \in N\}$ 是点 y 在 K 中的局部基. 置

$$\mathcal{F} = \{P \cap K : P \in \mathcal{P}, \text{并且} P \subset W \text{ 或} P \subset Y \setminus \{y\}\},$$

$$\mathcal{F}' = \{F \in \mathcal{F} : \text{存在} n \in N \text{ 使得} V_n \subset F\},$$

那么 $\mathcal{F}$ 是子空间 K 的点可数 cs 网络，并且由文 [9] 引理 7(3) 的证明知 $\mathcal{F}'$ 是 y 在 K 中的邻域基，于是存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $y \in \mathrm{int}_K(F) \subset K \bigcap W$, 即存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $y \in \mathrm{int}_K(P \bigcap K) \subset P \subset W$.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 Y 的子集族，并且让 $K \subset Y$, 记

$$(\mathcal{P}|K)^0 = \{\mathrm{int}_K(P \cap K) : P \in \mathcal{P}\},$$

$$(\mathcal{P}|K)^{0-} = \{\mathrm{cl}_K(\mathrm{int}_K(P \cap K)) : P \in \mathcal{P}\}.$$

定理 2　空间 Y 是度量空间的强紧覆盖 s 映象当且仅当 Y 具有点可数 cs 网络且 Y 的任一紧子集可度量化.

证　我们仅需证明充分性. 由定理 1, 存在度量空间 X 和强序列覆盖 s 映射 $f : X \to Y$. 我们仍使用定理 1 证明中的记号，并且证明 f 是紧覆盖映射. 让 K 是 Y 的紧子集，那么 K 可度量，并且由引理知 $(\mathcal{P}|K)^0$ 是子空间 K 的可数基. 置

$$\mathcal{H} = \{P \in \mathcal{P} : \mathrm{int}_K(P \cap K) \neq \phi\},$$

那么 $\mathcal{H}$ 是可数的. 让

$$\{\mathcal{H}' \subset \mathcal{H} : \mathcal{H}' \text{ 是有限的并且} \cup (\mathcal{H}'|K)^0 = K\} = \{\mathcal{H}_k : k \in N\},$$

那么对每一 $n,\ m \in N$ 存在 $k \in N$ 使得 $\mathcal{H}_k < \mathcal{H}_n \wedge \mathcal{H}_m$. 我们断言对每一 $i \in N$ 存在 $j \in N$ 使得 $(\mathcal{H}_j|K)^{0-} < (\mathcal{H}_i|K)^0$. 事实上，对每一 $y \in K$, 存在 $H \in \mathcal{H}_i$, K 的开子集 G 以及 $Q \in \mathcal{H}$ 使得 $y \in \mathrm{int}_K(Q \bigcap K) \subset G \subset \mathrm{cl}_K(G) \subset \mathrm{int}_K(H \bigcap K)$, 因此 $\mathrm{cl}_K(\mathrm{int}_K(Q \bigcap K)) \subset \mathrm{int}_K(H \bigcap K)$. 由 K 的紧性，存在 $j \in N$ 使得 $(\mathcal{H}_j|K)^{0-} < (\mathcal{H}_i|K)^0$. 取 $\{\mathcal{H}_k\}$ 的子序列 $\{\mathcal{L}_i\}$ 满足对每一 $i \in N$ 有 $\mathcal{L}_i < \mathcal{H}_i$ 并且 $(\mathcal{L}_{i+1}|K)^{0-} < (\mathcal{L}_i|K)^0$, 则存在 A_i 的有限子集 B_i 使得 $\mathcal{L}_i = \{P_\alpha : \alpha \in B_i\}$. 置

$$L = \{\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i \in N} B_i : \text{对每一} i \in N \text{ 有}$$
$$\phi \neq \mathrm{cl}_K(\mathrm{int}_K(P_{\alpha_{i+1}} \cap K)) \subset \mathrm{int}_K(P_{\alpha_i} \cap K)\},$$

那么 L 是 $\prod_{i \in N} B_i$ 的闭子集，于是 L 是 $\prod_{i \in N} B_i$ 的紧子集.

对于每一 $\beta = (\alpha_i) \in L$, 取点 $y \in \bigcap_{i \in N} \mathrm{int}_K(P_{\alpha_i} \bigcap K)$. 如果 W 是 Y 的开子集且 $y \in W$, 那么，由引理，存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $y \in \mathrm{int}_K(P \bigcap K) \subset P \subset W$; 因为 $K \setminus \mathrm{int}_K(P \bigcap K)$ 是紧子集，存在 $\mathcal{H}$ 的有限子集 $\mathcal{H}'$ 使得 $K \setminus \mathrm{int}_K(P \bigcap K) \subset \cup(\mathcal{H}'|K)^0 \subset \cup \mathcal{H}' \subset Y \setminus \{y\}$, 于是存在 $i \in N$ 使得 $\mathcal{H}_i = \{P\} \bigcup \mathcal{H}'$, 因此 $y \in P_{\alpha_i} \subset P \subset W$, 即 $\{P_{\alpha_i} : i \in N\}$ 是点 y 在 Y 中的网络，从而 $\beta \in X$ 且 $f(\beta) = y$, 故 $L \subset X$ 且 $f(L) \subset K$.

另一方面，对每一 $y \in K$ 和 $i \in N$, 置

$$\mathcal{U}_i = \{U \in (\mathcal{L}_i|K)^0 : y \in U\},$$

那么 $\mathcal{U}_i$ 是非空有限集. 如果 $V \in \mathcal{U}_{i+1}$, 那么存在 $U \in \mathcal{U}_i$ 使得 $\mathrm{cl}_K(V) \subset U$. 由 König 引理 [6, 引理 37.4], 存在 $(\alpha_i) \in \prod_{i \in N} B_i$ 满足 $\mathrm{cl}_K(\mathrm{int}_K(P_{\alpha_{i+1}} \bigcap K)) \subset \mathrm{int}_K(P_{\alpha_i} \bigcap K) \in \mathcal{U}_i$, $i \in N$, 因此 $(\alpha_i) \in L$ 并且 $y \in \bigcap_{i \in N} \mathrm{int}_K(P_{\alpha_i} \bigcap K)$, 所以 $\{P_{\alpha_i} : i \in N\}$ 是 y 在 Y 中的网络，即

$f((\alpha_i))=y$, 故 $f(L)\supset K$.

综上所述，L 是 X 的紧子集并且 $f(L)=K$, 因而 f 是紧覆盖映射.

定理 3 对于空间 Y 下述条件相互等价

(1) Y 是度量空间的强序列覆盖商 s 映象；

(2) Y 是度量空间的强紧覆盖商 s 映象；

(3) Y 是具有点可数 cs 网络的序列空间.

证 我们只需证明 (3) $\Rightarrow$ (2). 让 Y 是具有点可数 cs 网络的序列空间. 由定理 B 知 Y 是度量空间的商 s 映象，于是由文 [3] 定理 3.3 知 Y 的每一紧子集是可度量化. 由定理 2, 存在度量空间 X 和强紧覆盖 s 映射 $f:X\to Y$, 再由文 [6] 引理 45.8 知 f 也是商映射.

注 (1) βN 是具有点可数 cs 网络的紧空间，但它不是度量空间.

(2) βN 的子空间 $N\bigcup\{p\}$ (其中 $p\in\beta N\backslash N$) 是具有点可数 cs 网络的空间并且它的每一紧子集可度量化，但是它不是序列空间.

(3) 由文 [9] 注记 14(2) 知度量空间的紧覆盖商 s 映象未必具有点可数 cs 网络.

本文是在参加数学天元基金合作访问项目期间完成的，感谢刘应明教授的帮助.

参 考 文 献

[1] Cho, M. H. & Just, W., Countable-compact-covering maps and compact-covering maps, *Topology Appl.*, **58** (1994), 127-143.

[2] Gao Zhimin, $\aleph$-spaces are invariant under perfect mappings, *Questions Answers in General Topology*, **5** (1987), 271-279.

[3] Gruenhage, G., Michael, E. & Tanaka, Y., Spaces determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, **113** (1984), 303-332.

[4] Guthrie, J. A., A characterization of $\aleph_0$-spaces, *General Topology Appl.*, **1** (1971), 105-110.

[5] Just, W. & Wicke, H., Some conditions under which tri-quotient or compact-covering maps are inductively perfect, *Topology Appl.*, **55** (1994), 289-305.

[6] Kodama, Y. & Nagami, K., Theory of topological spaces, Iwanami, Tokyo, 1974.

[7] Lin Shou, On a generalization of Michael's theorem, *Northeastern Math. J.*, **4** (1988), 162-168.

[8] Lin Shou, The sequence-covering s-images of metric spaces, *Norhteastern Math. J.*, **9** (1993), 81-85.

[9] Lin Shou & Tanaka Y., Point-countable k-networks, closed maps, and related results, *Topology Appl.*, **59** (1994), 79-86.

[10] Michael, E., $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 983-1002.

[11] Michael, E., Some problems, In: Open Problems in Topology, J. van Mill and G. M. Reed Eds., Amsterdam: North-Holland, 1990, pp. 271-278.

[12] Michael, E. & Nagami, K., Compact-covering images of metric spaces, *Proc. AMS*, **37** (1973), 260-266.

[13] Siwiec, F., Sequence-covering and countably-bi-quotient mappings, *General Topology Appl.*, **1** (1971), 143-154.

[14] Tanaka, Y., Point-countable covers and k-networks, *Topology Proc.*, **12** (1987), 327-349.