第 24 卷第 4 期
1995 年 8 月

数 学 进 展
ADVANCES IN MATHEMATICS

Vol.24, No.4
Aug., 1995

g- 可度量空间的完备逆象

林寿 陈焕然

(宁德师专，福建， 352100) (吉首大学，湖南， 416000)

摘要 本文的主要目的是建立 g- 可度量空间的两个映射定理：
(1) g- 可度量空间是度量空间的商紧映象；
(2) g- 可度量空间的完备逆象若具有 G_δ- 对角线，那么它是 g- 可度量空间.
关键词 g- 可度量空间； G_δ- 对角线；完备映射

g- 可度量空间是一类重要的广义度量空间类. 近来， Tanaka 等 [1,2] 研究了 g- 可度量空间的映射定理. 然而，在什么条件下， g- 可度量空间的完备逆象是 g- 可度量空间，仍是尚未解决的问题. 本文首先应用覆盖列刻画 g- 可度量空间，然后借助映射建立 g- 可度量空间与度量空间的联系，由此可给出上述问题的满意回答. 最后，我们构造一例子否定 Tanaka 的一个问题.

1 术语及引理

本文所论空间均满足正则且 T_1 分离性公理，映射指连续的满函数.

定义 1.1 设 $\mathbb{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathbb{P}$ 称为 X 的弱基，如果 $\mathbb{P}=\cup\{\mathbb{B}_x : x\in X\}$ 并且满足下述条件：

(1) $x\in\cap\mathbb{B}_x, x\in X$.

(2) 如果 $U,V\in\mathbb{B}_x$, 则存在 $W\in\mathbb{B}_x$ 使 $W\subset U\cap V$;

(3) X 的子集 G 是 X 的开子集当且仅当对 $x\in G$, 存在 $B\in\mathbb{B}_x$ 使 $B\subset G$.

上述集族 $\mathbb{B}_x$ 称为点 x 在 X 中的弱邻域基. 若每一 B_x 是可数族， X 称为 g- 第一可数空间. 具有 σ- 局部有限弱基的空间称为 g- 可度量空间 [3].

由定义易知， g- 可度量空间是 g- 第一可数空间，而 g- 第一可数空间是序列空间.

定义 1.2 设 $\mathbb{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathbb{P}$ 称为 X 的 cs^*- 网 [4], 若对 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$, 如果 $x_n\to x\in U$, 其中 U 是 X 的开子集，则存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $P\in\mathbb{P}$ 使 $\{x\}\cup\{x_{n_i}: i\in N\}\subset P\subset U$. 具有 σ- 局部有限 $cs*$- 网的空间称为 $\aleph$- 空间.

引理 1.3[1,2,5] 下述条件相互等价：

(1) X 是 g- 可度量空间； (2) X 具有 σ- 离散闭弱基； (3) X 是 g- 第一可数的 $\aleph$- 空间.

收稿日期： 1992-08-28.

定义 1.4　空间 X 的覆盖列 $\{\mathbb{F}_n\}$ 称为 X 的弱展开，如果对 $x\in X,\{st(x,\mathbb{F}_n):n\in N\}$ 是点 x 在 X 中的弱邻域基.

引理 1.5[6]　空间 X 是度量空间的商紧映象当且仅当 X 具有点有限覆盖列 $\{F_n\}$ 构成 X 的弱展开.

定义 1.6[7]　$f:X\to Y$ 称为序列商映射，如果对 Y 中的收敛序列 $\{y_n\}$, 存在子序列 $\{y_{n_i}\}$ 和 X 中的收敛序列 $\{x_i\}$ 使每一 $x_i\in f^{-1}(y_{n_i})$.

序列商映射与商映射有密切的关系.

引理 1.7[7]　设 $f:X\to Y$.

(1) 若 X 是序列空间并且 f 是商映射，则 f 是序列商映射.

(2) 若 Y 是序列空间并且 f 是序列商映射，则 f 是商映射.

2　映射定理

设 $\mathbb{C}$ 是广义度量空间类，$\mathbb{C}$ 中的元具有 G_δ- 对角线. 称 $\mathbb{C}$ 满足完备逆象 G_δ- 对角线定理，如果 $f:X\to Y$ 是完备映射，其中 X 具有 G_δ- 对角线，Y 属于类 $\mathbb{C}$, 那么 X 也属于类 $\mathbb{C}$. 由于紧度量空间的完备逆象未必具有 G_δ- 对角线，因而在完备逆象 G_δ- 对角线定理中对定义域空间附加 G_δ- 对角线性质是必需的. 完备逆象 G_δ- 对角线定理是研究广义度量空间映射定理的重要模式. 从 60 年代到 80 年代，人们相继证明了度量空间类、层空间类、Nagata 空间类、可展空间类、σ- 空间类、半层空间类、半度量空间类、$\aleph$- 空间类都满足完备逆象 G_δ- 对角线定理. 本节，我们将证明 g- 可度量空间类满足完备逆象 G_δ- 对角线定理.

引理 2.1　下述条件相互等价：

(1) X 是 g- 可度量空间；(2) X 具有局部有限的覆盖列 $\{\mathbb{F}_n\}$ 构成 X 的弱展开.

证　(1)⇒(2). 设 X 是 g- 可度量空间. 由引理 1.3, 让 $\mathbb{P}=\cup_n\mathbb{P}_n$ 是 X 的弱基，其中每一 $\mathbb{P}_n$ 是 X 的离散闭集族. 记 $\mathbb{P}=\cup\{\mathbb{B}_x:x\in X\}$, 其中每一 $\mathbb{B}_x$ 是 x 在 X 中的弱邻域基. 对 $n\in N$, 令

$$F_n=\{x\in X:\mathbb{B}_x\cap\mathbb{P}_n=\emptyset\},\qquad \mathbb{F}_n=\{F_n\}\cup\mathbb{P}_n,$$

则 $\mathbb{F}_n$ 是 X 的局部有限覆盖. 注意到

(i) $|\mathbb{P}_n\cap\mathbb{B}_x|\le 1$.

(ii) 若 $\mathbb{P}_n\cap\mathbb{B}_x\ne\emptyset$, 那么 $st(x,\mathbb{F}_n)=st(x,\mathbb{P}_n)$.

(iii) 若 $\mathbb{P}_n\cap\mathbb{B}_x=\emptyset$, 那么 $st(x,\mathbb{F}_n)\supset X\setminus\cup\{P\in\mathbb{P}_n:x\notin P\}$, 于是 $st(x,\mathbb{F}_n)$ 是 x 在 X 中的邻域.

可以验证 $\{\mathbb{F}_n\}$ 是 X 的弱展开. 从而 X 的局部有限覆盖列 $\{\mathbb{F}_n\}$ 构成 X 的弱展开.

(2)⇒(1). 设局部有限的覆盖列 $\{\mathbb{F}_n\}$ 构成空间 X 的弱展开. 显然，X 是 g- 第一可数空间. 由引理 1.3, 为证明 X 是 g- 可度量空间，只须证 $\cup_n\mathbb{F}_n$ 是 X 的 $cs*$- 网. 对 X 中的序列 $\{x_n\}$, 设 $x_n\to x\in U$, 其中 U 是 X 的开子集，置

$$Z=\{x_n:n\in N\},$$

不妨设 Z 不是 X 的闭子集. 由于 $\{\mathbb{F}_n\}$ 是 X 的弱展开，那么对每一 $n\in N$ 有 $st(x,\mathbb{F}_n)\cap Z\ne\emptyset$, 于是存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $m\in N$ 使 $\{x_{n_i}:i\in N\}\subset st(x,\mathbb{F}_m)\subset U$, 这时存在 $F\in\mathbb{F}_m$ 使

$x \in F \subset U$ 且 F 含有序列 $\{x_{n_i}\}$ 的无限多项，故 $\cup_n \mathbb{F}_n$ 是 X 的 σ- 局部有限 $cs*$- 网．因此， X 是 g- 可度量空间．

由引理 1.5, 我们用商紧映射建立 g- 可度量空间与度量空间的联系．

定理 2.2 g- 可度量空间是度量空间的商紧映象．

上述定理的重要应用是建立 g- 可度量空间的完备逆映象定理．

定理 2.3 g- 可度量空间类满足完备逆映象 G_δ- 对角线定理．

证 设 $f: X \to Y$ 是完备映射，其中 X 具有 G_δ- 对角线， Y 是 g- 可度量空间．由定理 2.2, 存在度量空间 M 和商紧映射 $g: M \to Y$. 置

$$Z = \{(x, \alpha) \in X \times M : f(x) = g(\alpha)\},$$

设 h_1, h_2 分别是 $X \times M$ 到第一个坐标和第二个坐标上的投影映射在 Z 上的限制．我们验证它们满足下述条件：

(1) Z 是 $X \times M$ 的具有 G_δ- 对角线的闭子空间．

由于 X, M 都具有 G_δ- 对角线，所以 Z 具有 G_δ- 对角线．又由于 f, g 都是连续函数，于是 Z 是 $X \times M$ 的闭子空间．

(2) h_1 是商、紧映射．

由于 k- 空间的完备逆象是 k- 空间，所以 X 是 k- 空间．又由于具有点 G_δ- 性质的 k- 空间是序列空间，于是 X 是序列空间．由引理 1.7, 为证明 h_1 是商映射，只须证明 h_1 是序列商映射．对 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$, 那么 $\{f(x_n)\}$ 是 Y 中的收敛序列．由引理 1.7,g 是序列商映射，于是存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 和 M 中的收敛序列 $\{\alpha_i\}$ 使每一 $\alpha_i \in g^{-1}f(x_{n_i})$, 这时 $\{(x_{n_i}, \alpha_i)\}$ 是 Z 中的收敛序列且 $(x_{n_i}, \alpha_i) \in h_1^{-1}(x_{n_i})$, 故 h_1 是序列商映射，所以 h_1 是商映射，而对 $x \in X, h_1^{-1}(x) = \{x\} \times g^{-1}f(x)$ 是 Z 的紧子集，因此 h_1 也是紧映射．

(3) h_2 是完备映射．

对 $\alpha \in M, h_2^{-1}(\alpha) = f^{-1}g(\alpha) \times \{\alpha\}$ 是 Z 的紧子集，于是 h_2 是紧映射．对 $\alpha \in M$ 及 $X \times M$ 的开子集 W 使 $h_2^{-1}(\alpha) \subset W$, 由于 $f^{-1}g(\alpha) \times \{\alpha\}$ 是 $X \times M$ 的紧子集，存在 X 的开子集 U, M 的开子集 V 使 $f^{-1}g(\alpha) \times \{\alpha\} \subset U \times V \subset W$. 因为 f 是闭映射，存在 Y 的开子集 O 使 $g(\alpha) \in O$ 且 $f^{-1}(O) \subset U$. 由 g 的连续性，存在 M 的开子集 V_1 使 $\alpha \in V_1 \subset V$ 且 $g(V_1) \subset O$, 那么 $h_2^{-1}(V_1) \subset f^{-1}g(V_1) \times V_1 \subset W$, 所以 h_2 是闭映射，故 h_2 是完备映射．

因为 M 是度量空间，并且度量空间类满足完备逆象 G_δ- 对角线定理 [8], 由条件 (1), (3), Z 是度量空间．由条件 (2) 和引理 1.5, X 是 g- 第一可数空间．又由于 $\aleph$- 空间类满足完备逆象 G_δ- 对角线定理 [9], 于是 X 是 $\aleph$- 空间．再由引理 1.3, X 是 g- 可度量空间．故 g- 可度量空间类满足完备逆象 G_δ- 对角线定理．

由定理 2.2, 人们自然会问：度量空间的商紧映象是否是 g- 可度量空间？ 1990 年 9 月， Tanaka 在给本文第一作者的一封来信中曾问：局部紧度量空间的商紧映象是否具有点可数弱基？下面的例子否定地回答了这些问题．

例 2.4 局部紧度量空间的商紧映象不具有点可数弱基．

以 I 表示单位闭区间．对 $x \in I$, 设 $S(x)$ 同胚于欧氏子空间 $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in N\}$. 置 $Z = I \oplus (\oplus_{x \in I} S(x))$, 则 Z 是局部紧的度量空间．让 X 是将 $x \in I$ 与 $S(x)$ 的极限点贴合成一点得到的商空间，用 f 表示这个商映射，那么 f 是紧映射．显然， X 是正则空间．往证 X 不具有点可数弱基．否则，设 $\mathbb{B}$ 是 X 的关于有限交封闭的点可数弱基．对 $x \in X$,

注意到 $X\setminus I$ 中的点是 X 的孤立点，并且 X 的子空间 I 就是欧氏子空间，于是可选取 x 在 X 中的可数弱邻域基 $\mathbb{B}_x=\{B(n,x):n\in N\}\subset\mathbb{B}$ 满足：

(1) $B(n+1,x)\subset B(n,x)$;

(2) 对 $x\in X\setminus I, B(n,x)=\{x\}$;

(3) 对 $x\in I$, 存在 I 中的由有理端点构成的含点 x 的开区间组成的集列 $\{V(n,x)\}$ 使每一 $V(n,x)\subset B(n,x)$.

令 $\mathbb{P}=\cup\{\mathbb{B}_x:x\in X\},\mathbb{P}'=\cup\{\mathbb{B}_x:x\in I\}$, 则 $\mathbb{P}$ 是 X 的弱基. 一方面， $\mathbb{P}\setminus\mathbb{P}'$ 是 x 的 σ- 离散集族. 另一方面，对于固定的 $V(n,x)$, 由 $\mathbb{B}$ 的点可数性， $\{B\in\mathbb{P}':V(n,x)\subset B\}$ 是可数的，又由于 $\mathbb{P}'=\{B\in\mathbb{P}'$: 存在 $n\in N,x\in I$ 使 $V(n,x)\subset B\}$, 所以 $\mathbb{P}'$ 也是可数的，从而 X 具有 σ- 离散弱基，于是 X 是 $\aleph$- 空间. 将 X 的紧子空间 I 贴成一点得到的商空间记为 Y, 用 g 表示这个商映射，则 g 是完备映射，从而 Y 也是 $\aleph$- 空间 [9]. 然而， Y 含有闭子空间同胚于 S_{w_1}, 于是 Y 不是 $\aleph$- 空间 [10], 矛盾. 故 X 不具有点可数弱基.

参考文献

1 Tanaka Y. σ-hereditarily closure-preserving k-networks and g-metrizability. *Proc. AMS.*, 1991, 112: 283–290.

2 林寿. g- 可度量空间. 数学年刊， 1992, 13A: 403–409.

3 Siwiec F. On defining a space by a weak base. *Pacific J. Math.*, 1974, 52: 233–245.

4 Gao Zhimin(高智民). $\aleph$-space is invariant under perfect mappings. *Questions and Answers in Gen. Topology*, 1987, 5: 271–279.

5 Foged L. On g-metrizability. *Pacific J. Math* , 1982, 98: 327–332.

6 林寿. 关于度量空间的商紧象. 数学进展， 1992, 21(1): 93–97.

7 Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings. *Czech. Math. J.*, 1976, 26: 174–182.

8 Borges C R. On stratifiable spaces. *Pacific J. Math.*, 1966, 17: 1–16.

9 Lin Shou(林寿). Mapping theorems on $\aleph$-spaces. *Topology Applications*, 1988, 30: 159–164.

10 林寿. 关于 Lašnev 空间. 数学学报， 1991, 34: 222–225.

The Perfect Preimages of g-Metrizable Spaces

Lin Shou (*Ningde Teachers' College, Fujian, 352100*)

Chen Huanran (*Jishou University, Hunan, 416000*)

Abstract The purpose of this paper is to establish two mapping theorems on g-metrizable spaces: (1) Every g-metrizable space is a quotient compact image of a metrizable space. And (2) If a perfect preimage of a g-metrizable space has a G_δ-diagonal then it is a g-metrizable space.

Key words g-metrizable space; metric space; G_δ-diagonal; perfect mapping