总 28 卷 第 2 期 数 学 研 究 Vol. 28 No. 2
1995 年 6 月 Journal of Mathematical Study June 1995

具有可数弱基空间的一个新特征①

林 寿
(宁德师专数学系,宁德 352100)

摘 要 本文证明了正则空间 X 具有可数弱基当且仅当它是具有可数 k 网的 k 空间并且不含闭子空间同胚于 S_ω. 它肯定地回答了 Y. Tanaka 在 1983 年提出的一个问题.

关键词 k 网,弱基,闭映射,S_ω

本文中所有空间均满足正则且 T_1 分离性公理,映射是连续的满函数,N 表示自然数集.

k 网与弱基的概念在拓扑学的研究中已产生积极的作用[1,2]. F. Siwiec[3]证明了空间 X 具有可数弱基当且仅当 X 是具有可数 k 网的 gf 可数空间. 然而 gf 可数性不便于进一步应用,以至于给人们带来许多研究具有可数弱基空间的困难. 例如至今为止具有可数弱基空间尚未发现较好的映射定理. 因而寻求具有可数弱基空间的新特征是富有意义的. Y. Tanaka[4]在研究商空间度量化时曾提出问题:设 X 是具有可数 k 网的 k 空间,如果 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 是否是具有可数弱基的空间? 本文的主要结果肯定地回答了 Tanaka 的这一问题,由此获得了具有可数弱基空间的一些映射定理.

定义 1[5] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族,$\mathscr{P}$ 称为 X 的 k 网,若对于 $K\subset U$,其中 K,U 分别是 X 的紧子集和开子集,存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{F}$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{F}\subset U$.

定义 2[6] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族,$\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基,若 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x:x\in X\}$ 满足

(1) $x\in\bigcap\mathscr{P}_x$,

(2) U、$V\in\mathscr{P}_x\Rightarrow$存在 $W\in\mathscr{P}_x$ 使 $W\subset U\cap V$,

(3) G 是 X 的开子集$\Leftrightarrow$对 $x\in G$ 存在 $P\in\mathscr{P}_x$ 使 $P\subset G$.

空间 X 称为 gf 可数空间,如果 X 有弱基 $\mathscr{P}$ 使每一 $\mathscr{P}_x$ 是可数的.

定义 3 由可数无限个非平凡的收敛序列的拓扑和将其极限点贴成一点得到的商空间称为序列扇,记为 S_ω.

本文未定义的概念或术语请参看[3]. 我们的主要结果是如下定理.

定理 空间 X 具有可数弱基当且仅当 X 是具有可数 k 网的 k 空间并且 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

证明 必要性. 设空间 X 具有可数弱基,由文[3]定理 1.15,X 是具有可数 k 网的 k 空间. 如果 X 含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 S_ω 具有可数弱基,再由文[3]定理 1.10,S_ω 是度量空间,这与 S_ω 不是第一可数空间相矛盾. 因而 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

① 本文于 1994-03-29 收到,国家数学天元基金资助课题;福建省自然科学基金资助课题

充分性. 设空间 X 是具有可数 k 网的 k 空间并且 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω. 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的可数 k 网, 不妨设 $\mathscr{P}$ 关于有限并封闭.

对 $x\in X$, 置

$\mathscr{B}_x=\{P\in\mathscr{P}:P$ 是 x 在 X 中的序列邻域$\}$,

其中 X 的子集 P 称为点 x 在 X 中的序列邻域, 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 那么存在 $i\in N$ 使 $\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant i\}\subset P$. 再置

$\mathscr{P}_x=\{\bigcap\mathscr{F}:\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{B}_x$ 的有限子集,$\}$

往证 X 的可数子集族 $\bigcup\{\mathscr{P}_x:x\in X\}$ 是 X 的弱基. 这只须验证它满足定义 2 的条件(3). 对 $G\subset X$, 如果对每一 $X\in G$, 存在 $P\in\mathscr{P}_x$ 使 $P\subset G$, 那么 G 是 G 中每一点的序列邻域. 因为 X 是序列空间, 所以 G 是 X 的开子集. 另一方面. 设 G 是 X 的开子集且存在点 $z\in G$ 使得对每一 $P\in P_z$ 有 $P\not\subset G$.

令

$\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}:z\in P\subset G\}$,

则 $\mathscr{P}'$ 是可数的. 记 $\mathscr{P}'=\{P_i:i\in N\}$. 对 $n\in N$, 让

$F_n=\bigcup\{P_i:i\leqslant n\}$,

则 F_n 不是点 z 在 X 中的序列邻域, 由 X 的正则性, 取 X 的开子集 V 使 $z\in V\subset\overline{V}\subset G$. 这时每一 $F_n\cap V$ 不是点 z 在 X 中的序列邻域, 再由 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网, 可归纳地构造 X 中的序列 $\{x_{ij}\}$ 及 $n_i\in N$ 使对每一 $i\in N$、有 $x_{ij}\in V\cap F_{n_{i+1}}\setminus F_{n_i}$, $n_i<n_{i+1}$ 且序列 $\{x_{ij}:j\in N\}$ 收敛于点 z. 对 $i\in N$, 令

$Z_i=\{z\}\cup\{x_{ij}:j\in N\}$.

我们先证明 $\{Z_i:i\in N\}$ 是 X 的遗传闭包保持集族, 即对于 $H_i\subset Z_i$ 有 $\bigcup\{\overline{H}_i:i\in N\}=\overline{\bigcup\{H_i:i\in N\}}$. 因为 X 是 k 空间, 并且每一 Z_i 是 X 的闭子集, 我们只须证对于 $p_i\in Z_i$, $\{p_i:i\in N\}$ 是 X 的离散子集[7]. 若不然, 则存在序列 $\{y_k\}$ 和 $i_k\in N$ 使得 $y_k\in Z_{i_k}\setminus\{z\}$, i_k 互不相同且 $\{y_k:k\in N\}$ 不是 X 的闭子集. 因为 X 是序列空间, 不妨设 $\{y_k\}$ 是收敛序列. 让 y 是序列 $\{y_k\}$ 的极限点, 则 $y\in\overline{V}\subset G$. 由于 $\{z,y\}\cup\{y_k:k\in N\}$ 是 X 的紧子集, 存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $\{z,y\}\cup\{y_k:k\in N\}\subset P\subset G$. 由 $\mathscr{P}'$ 的定义知存在 $m\in N$ 使 $P=P_m$ 取 $i_k\geqslant m$, 那么 $y_k\in P_m\setminus F_{n_{i_k}}$, 这与 $P_m\subset F_{n_{i_k}}$ 相矛盾. 故 $\{Z_i:i\in N\}$ 是 X 的遗传闭包保持集族. 令

$Z=\bigcup\{Z_i:i\in N\}$,

那么 Z 是 X 的闭子空间, 并且 Z 是拓扑和 $\bigoplus\{Z_i:i\in N\}$ 由贴合所有极限点所成的商空间, 即 Z 是 X 的同胚于 S_ω 的闭子空间, 这与假设相矛盾. 因而空间 X 具有可数弱基. 定理证毕.

注 定理中 X 是 k 空间的条件不可省略. 如取定 $p\in\beta N\setminus N$, 那么 βN 的子空间 $N\cup\{p\}$ 具有可数 k 网并且不含有(闭)子空间胚于 S_ω, 但是 $N\cup\{p\}$ 不是 k 空间.

称空间 X 具有局部可数弱基(k 网), 如果 X 有一弱基(k 网)是 X 的局部可数集族.

推论 1 对空间 X 下述条件相互等价:

(1) X 具有局部可数弱基.

(2) X 是具有可数弱基空间的拓扑和.

(3) X 是具有局部可数 k 网的 k 空间并且 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

证明 由文[8]引理 1 知(1)$\Leftrightarrow$(2), 由文[9]定理 1 和本文的定理知(2)$\Leftrightarrow$(3)

推论 2 设 $f:X\to Y$ 是闭映射. 如果 X 具有局部可数弱基, 那么下述条件相互等价:

(1) Y 具有局部可数弱基.

(2) Y 是 gf 可数空间.

(3) Y 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

证明 只须证(3)⇒(1).设 Y 不含有闭子空间同胚于 S_ω.由文[10]命题1.13知对 $y\in Y$,$\partial f^{-1}(y)$是 X 的紧子集,于是可以设 f 是完备映射,那么 Y 是具有局部可数 k 网的 k 空间,由推论1知 Y 具有局部可数弱基.

推论3 设 $f:X\to Y$ 是开闭映射.如果 X 具有局部可数弱基,那么 Y 具有局部可数弱基.

证明 因为 f 是开闭映射,并且 f 具有局部可数弱基,由文[11]定理3知对 $y\in Y$ 及 $x\in f^{-1}(y)$,如果 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于点 y,则存在 X 中的序列$\{x_n\}$使每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$且$\{x_n\}$收敛于 x.于是若 Y 含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 就含有闭子空间同胚 S_ω,由推论1知 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,从而 Y 不含有闭子空间同胚于 S_ω,再由推论2,Y 具有局部可数弱基.

推论4 设 $f:X\to Y$ 是完备映射.如果 Y 具有局部可数弱基,那么 X 具有局部可数弱基当且仅当 X 具有 G_δ 对角线.

证明 由推论1知具有局部可数弱基的空间具有 G_δ 对角线.如果 X 具有 G_δ 对角线,因为 Y 具有局部可数弱基,由文[12]定理3、4知 X 是具有局部可数 k 网的 k 空间.如果 X 含有闭子空间同胚于 S_ω,不妨设 X 同胚于 S_ω,那么 Y 是度量空间.因为 X 具有 G_δ 对角线,所以 X 是度量空间,这与 S_ω 不是度量空间相矛盾.因此 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,由推论1知 X 具有局部可数弱基.

作者在文[13]中曾提出问题:如果 X 是具有 σ-局部有限 k 网的 k 空间,若 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω,那么 X 是否是具有 σ-局部有限弱基的空间?我们的定理是对这一问题的部分回答.近来,刘川和戴牧民应用本文使用的方法,充分利用了空间的点 G_δ 性质,肯定地回答了上述问题[14]

参考文献

1 Gruenhage G. Generalized metric spaces, in: K. Kunen and J. E. Vaughan, Eds, Handbook of Set—Theoretic Topology(North—Holland, 1984), 423～502.

2 Gruenhage G. Generalized metric spaces and metrization, in: M. Husek and Recent Progress in General Topology, *J. van Mill Eds* (North—Holland, 1992): 239～274

3 Siwiec F. On defining a space by a weak base. Pacific J. Math., 1974, 52: 233～245

4 Tanaka Y. Metrizability of certain quotient spaces. Fund. Math., 1983, 119: 157～168

5 O'Meara P. On paracompactness in function spaces with the compact open topology. Proc. AMS, 1971, 29: 183～189

6 Arhangel'skii A. Mapping and spaces. Russian Math. Surveys, 1966, 21(4): 115～162

7 林寿.关于遗传闭包保持集族.山西师大学报(自然科学版),1990,4(1):5～9

8 Lin Shou, Li Zhaowen. Li Jinjin, Liu Chuan. On ss—mappings, Northeastern Math. J., 1993, 9: 521～524

9 Lin Shou. Spaces with a locally countable k—network, Northeastern Math. J., 1990, 6: 39～44

10 Tanaka Y. Metrization Ⅱ, in: K Morita and J. Nagata, Eds, Topics in General Topology (Elserier Science Publication, 1989), 275～314

11 Yun Ziqiu. A new characterization of $\aleph$—spaces. Topology Proc., 1991, 16: 253～256

12 Lin Shou. Mapping theorems on $\aleph$—spaces. Topology and Appl. , 1988,30: 159～164

13 Lin Shou. A survey of the theory of $\aleph$—spaces. Q. and A. in General Topology, 1990,8: 404～419

14 Liu Chuan,Dai Mumin. On g—metrizability and copy S_ω. Topolopy and Appl.

A New Characterization on Spaces With a Countable weak Base

Lin Shou

(Department of Mathematics, Ningde Teachers College, Ningde 352100)

Abstract In this paper we prove that a space has a countable weak base if and only if it is a k-space with a countable k—network and contains no closed copy of S_ω. It affirmatively answers a problem posed by Y. Tanaka in 1983.

Key words k—network, weak base, closed map, S_ω.