第10卷第4期　　苏州大学学报(自然科学)　　Vol. 10, No. 4
1994年10月　　JOURNAL OF SUZHOU UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)　　Oct. 1994

关于Jameson的一个定理①

林　寿
(福建省宁德师专数学科,352100)
刘　川
(广西大学数学系,530004)

摘　要:本文证明了函数空间$C_n^*(X)$是可分或者局部可分空间当且仅当X是一个紧度量空间,它推广了G. Jameson的一个经典定理.

关键词:函数空间,范数拓扑,稠密度.

本文所论空间均指满足Tychonoff分离性公理的拓扑空间.对于拓扑空间X,$C^*(X)$表示X上所有有界实值连续函数的全体.对于$f\in C^*(X)$,实数$\varepsilon>0$,记

$$\|f\|=\sup\{|f(X)|: x\in X\},$$

$$W(f,\varepsilon)=\{g\in C^*(X): \|g-f\|<\varepsilon\},$$

那么集族$\{W(f,\varepsilon): f\in C^*(X),\varepsilon>0\}$形成$C^*(X)$上某一拓扑的基.这个拓扑称为$C^*(X)$上的范数拓扑,$C^*(X)$在赋0予范数拓扑下的函数空间记为$C_n^*(X)$.本文的目的是用X的拓扑性质来刻划$C_n^*(X)$的稠密度.1974年G. Jameson证明了如果$C_n^*(X)$是可分空间,那么X是第二可数空间(见文[1]定理2.1),并且A. Okuyama[1]叙述了如果X是一个紧的第二可数空间,那么$C_n^*(X)$是一个可分空间.本文证明了$C_n^*(X)$是可分(或者局部可分)空间当且仅当X是紧度量空间.

对于拓扑空间X,置

$d(X)=\omega+\min\{\tau: Y$为X的稠子集且$|Y|=\tau\}$,

$W(X)=\omega+\min\{\tau: \mathscr{B}$为X的基且$|\mathscr{B}|=\tau\}$.

引理1　对于拓扑空间X有$W(X)\leqslant d(C_n^*(X))$.

证　设F是$C_n^*(x)$的稠子集使$|F|=d(C_n^*(X)(X))$.记$F=\{f_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$,其中$f_\alpha\in C_n^*(X)$且

$|\Lambda|=d(C_n^*(X))$.对于$\alpha\in\Lambda$,置

$$U_\alpha=\{x\in X: |f_\alpha(x)|<\frac{2}{3}\},$$

那么$\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$形成了X的一个基.事实上,对于$x\in U$,其中U是X的开子集,取连续函数

① 国家自然科学基金资助课题
收稿日期:1991-10-25

$f: x \to [0,1]$使$f(x)=0$且$f(X\setminus U)\subset\{1\}$，那么存在$\alpha\in A$使$f_\alpha\in W(f,\frac{1}{3})$. 由于$|f_\alpha(x)|<\frac{1}{3}$，所以$x\in U_\alpha$. 若$y\in U_\alpha$，那么$|f_\alpha(y)|<\frac{2}{3}$，于是$f(y)<1$，从而$y\in U$，故$U\alpha\subset U$. 因此$W(X)\leqslant d(C_n^*(X))$.

注 对于单位区间I，若记$C_n^*(X,I)=\{f\in C_n^*(X):\|f\|\leqslant 1\}$，从引理1的证明可以看出基数不等式$W(X)\leqslant d(C_n^*(X,I))$成立.

引理2 (Jameson，见Okuyama[1]命题2.2)设E是$C_n^*(X)$的线性子空间使对X的任两互不相交的闭子集A、B存在$f\in E$满足$f(X)\subset I$，$f(A)\subset\{0\}$，$f(B)\subset\{1\}$，那么E在$C_n^*(X)$中稠密.

引理3 若X是紧空间，那么$d(C_n^*(X))=W(X)$.

证 由引理1，只须证明$d(C_n^*(X))\leqslant W(X)$. 设$\mathscr{B}$是X的基使$|\mathscr{B}|\leqslant W(X)$. 不妨设$\mathscr{B}$关于有限并封闭. 置

$$\mathscr{P}=\{(U,V): U、V\in\mathscr{B}\text{ 且 }Cl(U)\subset V\}.$$

对$(U,V)\in\mathscr{P}$，由X的正规性，让$f_{(U,V)}$是从X到单位区间I的连续函数使得$f_{(U,V)}(U)=\{0\}$，$f_{(U,V)}(V)=\{1\}$. 以1表示从X到数1的常值映射，让E是$C_n^*(X)$的由$\{1\}\cup\{f_{(U,V)}:(U,V)\in\mathscr{P}\}$产生的线性子空间. 由X的紧性，E满足引理2的条件，所以E是$C_n^*(X)$的稠子集. 再由E的构造知$|E|\leqslant W(X)$，故$d(C_n^*(X))\leqslant W(X)$.

引理4 对于拓扑空间X，$d(C_n^*(X))=W(\beta X)$.

证 不妨设$X\subset\beta X$. 对于$f\in C_n^*(X)$，存在唯一的$F\in C_n^*(\beta X)$使$F_{|X}=f$，让$e: C_n^*(X)\to C_n^*(\beta X)$使得$e(f)=F$，即$e(f)$是f到$\beta X$上的连续扩张. 显然e是满映射. 由于X是$\beta X$的稠子集，e是一对一的. 又因为对于$f\in C_n^*(X)$，$\varepsilon>0$，有$e(W(f,\varepsilon))=W(e(f),\varepsilon)$，所以e是同胚. 从而$d(C_n^*(X))=d(C_n^*(\beta X))$，故$d(C_n^*(X))=W(\beta X)$.

注 $C_n^*(X)$是一个度量空间(事实上，它是一个完备度量空间)，因而在$C_n^*(X)$上的许多基数函数是与稠密度函数一致的，例如$d(C_n^*(X))=W(C_n^*(X))=nW(C_n^*(X))=L(C_n^*(X))=c(C_n^*(X))$，关于这方面的详细内容可参考R. Hodel[2]的综述.

定理 对于拓扑空间X，下述条件相互等价：

(1)$C_n^*(X)$是可分空间.

(2)$C_n^*(X)$是局部可分空间.

(3)X是紧可度量空间.

证 只须验证(2)⇒(3). 设$C_n^*(X)$是局部可分空间. 让f_0是X到{0}的常值映射，那么存在$\varepsilon>0$使$W(f_0,2\varepsilon)$是可分的子空间. 因为$C_n^*(X)$是可度量空间，所以$\{f\in C_n^*(X):\|f\|\leqslant\varepsilon\}$是可分子空间. 由于闭区间$[-\varepsilon,\varepsilon]$同胚于单位区间I，于是$C_n^*(X,I)$是可分空间. 由上述定理的证明知$C_n^*(X,I)$同胚于$C_n^*(\beta X,I)$，而从引理1的注知$d(C_n^*(\beta X,I))\geqslant W(\beta X)$，因此$\beta X$是紧度量空间，于是X是度量空间. 若X不是紧空间，那么X不是可数紧空间，于是X存在闭可数离散子空间N，从而$\beta N=cl_{\beta X}(N)\subset\beta X$（见R. Engelking[3]推论3.6.8)，所以βN是紧度量空间，矛盾. 故X是紧度量空间.

参 考 文 献

1 Okuyama A, Terada T. Function spaces. Topics in General Topology, Elsevier Science Publishers: Amsterdam, 1989, 411—458.

2 Hodel R. Cardinal fanctions I. Handbook of Set—theoretic Topology, North—Holland: Amsterdam, 1984, 1—61.

3 Engelking R. General Topology. P. W. N. : Warszawa, 1977.

ON A JAMESON'S THEOREM

Lin Shou
(*Ningde Teachers' College*)
Liu Chuan
(*Guangxi University*)

Abstract: In this short note it is shown that function space $C_n^*(X)$ is separable or locally separable if and only if X is a compact metrizable space which generalizes a classic theorem of G. Jameson.

Keywords: Function space, norm topology, density.

(本文责任编辑:董张维)