第 37 卷第 4 期　　　数　学　学　报　　　Vol.37, No. 4
1994 年 7 月　　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　　July, 1994

局部可数集族、局部有限集族与 Alexandroff 问题

林　寿

(宁德师范专科学校数学系，福建　352100)

摘　要: 本文引进分层强 s- 映射和分层强紧映射建立具有 σ- 局部可数网、具有 σ- 局部可数 k- 网、具有 σ- 局部可数基的正则空间以及 σ- 空间、$\aleph$- 空间、g- 可度量空间和确定的度量空间之间的联系．这些都是对 Alexandroff 问题的回答．

关键词: 分层强 s- 映射、分层强紧映射、σ- 空间、$\aleph$- 空间、g- 可度量空间

Alexandroff 在布拉格拓扑学会议上提出映射的空间分类设想 [1], 其核心问题之一是寻求适当的映射类把广义度量空间刻划为确定的度量空间类在该类映射下的象． σ- 局部可数集族或 σ- 局部有限集族在这过程中处于中心位置．然而，用怎样的映射恰好能揭示出度量空间与由这些集族定义的空间之间的规律是困惑人们多年的问题．

经验表明现成的映射类难以解决上述问题．为此，我们定义了分层强 s- 映射和分层强紧映射，建立了具有 σ- 局部可数网的空间、具有 σ- 局部可数 k- 网的空间．具有 σ- 局部可数基的空间、 σ- 空间、 $\aleph$- 空间、 g- 可度量空间与特定的度量空间的联系．它们拓广了 Arhangel'skii, Michael 等关于可数集族或局部可数集族方面的一系列工作，初步显示了这两类映射是处理 σ- 局部可数集族、 σ- 局部有限集族的一种有效工具．

本文所论空间均满足正则且 T_1 分离性公理．映射指连续的满函数．对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 及 $f: X \to Y$, 记 $f(\mathcal{P}) = \{f(P): P \in \mathcal{P}\}$. N 表示自然数集，对于积空间 $\prod_{i\in N} X_i$, p_i 表示从 $\prod_{i\in N} X_i$ 到 X_i 上的投影．

一、具有 σ- 局部可数网的空间

定义 1.1 映射 $f: X \to Y$ 称为分层强 s- 映射 (stratified strong s-mapping), 如果存在以 X 为子空间的积空间 $\prod_{i\in N} X_i$ 满足：对任意的 $y \in Y$, 存在 y 在 Y 中的开邻域列 $\{V_i\}$ 使每一 $p_i f^{-1}(V_i)$ 是 X_i 的可分子空间．如果更设所有的 X_i 是度量空间，那么 f 称为可度量的分层强 s- 映射，简记为 msss- 映射．

引理 1.2 设 $f: X \to Y$ 是 msss- 映射，则存在 X 的基 $\mathcal{B}$ 使 $f(\mathcal{B})$ 是 Y 的 σ- 局部可数网．

1992 年 1 月 13 日收到， 1993 年 3 月 2 日改为此精简稿．
宁德地区科委及国家自然科学基金的资助项目．

证明 由假设，存在度量空间族 $\{X_i\}$ 满足定义 1.1 的要求. 对于 $i \in N$, X_i 具有 σ- 局部有限基 $\mathcal{P}_i$. 令

$$\mathcal{B}_i = \left\{X \cap \left(\underset{j\leq i}{\cap} p_j^{-1}(P_j)\right) :\ P_j \in \mathcal{P}_j,\ j \leq i\right\}, \qquad \mathcal{B} = \underset{i\in N}{\cup} \mathcal{B}_i,$$

那么 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 对于 $y \in Y$, 存在 y 的开邻域列 $\{V_i\}$ 使每一 $p_i f^{-1}(V_i)$ 是 X_i 的可分子空间. 对于 $n \in N$, 令 $V = \underset{i\leq n}{\cap} V_i$, 则 $|\{Q \in f(\mathcal{B}_n):\ V \cap Q \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0$, 从而 $f(\mathcal{B}_n)$ 是 Y 的局部可数集族，所以 $f(\mathcal{B})$ 是 Y 的 σ- 局部可数网.

定义 1.3 空间 X 具有 σ- 局部可数网当且仅当 X 是某一度量空间的 msss- 映象.

证明 由引理 1.2 只须证必要性. 设空间 X 具有网 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_i :\ i \in N\}$, 其中每一 $\mathcal{P}_i = \{P_\alpha :\ \alpha \in A_i\}$ 是 X 的关于有限交封闭的局部可数的闭集族且 $X \in \mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_{i+1}$. 置

$$A = \left\{\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i\in N} A_i :\ \{P_{\alpha_i}\} \text{ 是 } X \text{ 中某点 } x(\beta) \text{ 的网且 } P_{\alpha_{i+1}} \subset P_{\alpha_i}\right\},$$

赋予 A 离散空间族 $\{A_i\}$ 的积拓扑所诱导的子空间拓扑，则 A 是度量空间. 由 $f(\beta) = x(\beta)$ 确定了从 A 到 X 上的映射 f. 往证 f 是 msss- 映射. 对 $x \in X$, $i \in N$, 存在 x 在 X 中的开邻域 V_i 使 $|\{\alpha \in A_i :\ P_\alpha \cap V_i \neq \emptyset\}| \leq \aleph_0$, 令 $B_i = \{\alpha \in A_i :\ P_\alpha \cap V_i \neq \emptyset\}$, 则 $p_i f^{-1}(V_i) \subset B_i$, 所以 $p_i f^{-1}(V_i)$ 是 A_i 的可分子空间. 故 f 是 msss- 映射.

映射 $f:\ X \to Y$ 称为强 s- 映射 [2], 简记为 ss- 映射，如果对于 $y \in Y$, 存在 y 在 Y 中的开邻域 V 使 $f^{-1}(V)$ 是 X 的可分子空间.

推论 1.4 空间 X 具有局部可数网当且仅当 X 是某一度量空间的 ss- 映象.

推论 1.5(Michael[3]) 空间 X 具有可数网当且仅当 X 是某一可分度量空间的连续象.

二、具有 σ- 局部可数 k- 网的空间

空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k- 网，如果对于 X 的紧子集 K 及 K 在 X 中的邻域 V, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子族 $\mathcal{P}'$ 使 $K \subset \cup\mathcal{P}' \subset V$. 映射 $f:\ X \to Y$ 称为紧覆盖映射，若 Y 的紧子集是 X 的紧子集在 f 下的象.

定理 2.1 空间 X 具有 σ- 局部可数 k- 网当且仅当 X 是某一度量空间的紧覆盖、msss- 映象.

证明 仅证必要性. 设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_i :\ i \in N\}$ 是空间 X 的 k- 网，其中每一 $\mathcal{P}_i = \{P_\alpha :\ \alpha \in A_i\}$ 是 X 的关于有限交封闭的局部可数的闭子集族且 $X \in \mathcal{P}_i \subset \mathcal{P}_{i+1}$. 由定理 1.3 的证明，可构造度量空间 A 及 msss- 映射 $f:\ A \to X$. 往证 f 是紧覆盖映射. 对于 X 的非空紧子集 K 及 $i \in N$, 令

$$\mathcal{P}_i(K) = \left\{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_i :\ |\mathcal{F}| < \aleph_0,\ K \subset \cup\mathcal{F} \text{ 且 } \forall F \in \mathcal{F} \text{ 有 } F \cap K \neq \emptyset\right\},$$

那么 $|\mathcal{P}_i(K)| \leq \aleph_0$, 记 $\mathcal{P}_i(K) = \{\mathcal{P}_{ij} :\ j \in N\}$. 对于 $n \in N$, 置

$$\mathcal{P}'_n = \underset{i,j\leq n}{\wedge} \mathcal{P}_{ij},$$

则 $\mathcal{P}'_n \subset \mathcal{P}_n$ 且 $\{\mathcal{P}'_n\}$ 是 K 的有限覆盖的序列．于是存在 A_n 的有限子集 A'_n 使 $\mathcal{P}'_n = \{P_\alpha: \alpha \in A'_n\}$. 让

$$L = \left\{\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i\in N} A'_i:\ \text{对于 } i \in N,\ P_{\alpha_i} \cap K \neq \emptyset \text{ 且 } P_{\alpha_{i+1}} \subset P_{\alpha_i}\right\}.$$

(1)L 是 $\prod_{i\in N} A_i$ 的紧子集．

设 $\gamma = (\alpha_i) \in \prod_{i\in N} A'_i \setminus L$, 那么或者存在 $i_0 \in N$ 使 $P_{\alpha_{i_0}} \cap K = \emptyset$, 或者存在 $i_o \in N$ 使 $P_{\alpha_{i_0+1}} \not\subset P_{\alpha_{i_0}}$. 这时或者让 V 为 $\left\{\beta \in \prod_{i\in N} A'_i:\ p_{i_0}(\beta) = \alpha_{i_0}\right\}$, 或者让 V 为 $\left\{\beta \in \prod_{i\in N} A'_i:\ p_{i_0}(\beta) = \alpha_{i_0} \text{ 且 } P_{i_0+1}(\beta) = \alpha_{i_0+1}\right\}$, 则 V 是 γ 在 $\prod_{i\in N} A'_i$ 中的开邻域且 $V \cap L = \emptyset$. 因而 L 是紧子集 $\prod_{i\in N} A'_i$ 的闭子集，所以 L 是 $\prod_{i\in N} A_i$ 的紧子集．

(2)$L \subset A$ 且 $f(L) \subset K$.

对于 $\beta = (\alpha_i) \in L$, 则 $K \cap \left(\bigcap_{i\in N} P_{\alpha_i}\right) \neq \emptyset$. 取定 $x \in K \cap \left(\bigcap_{i\in N} P_{\alpha_i}\right)$, 那么 $\{P_{\alpha_i}\}$ 是 x 在 X 中的网 (见 [2] 定理的证明). 因此 $\beta \in A$ 且 $f(\beta) = x \in K$, 故 $L \subset A$ 且 $f(L) \subset K$.

(3) $K \subset f(L)$.

对于 $x \in K$ 及 $i, j \in N$, 存在 $P_{ij} \in \mathcal{P}_{ij}$ 使 $x \in P_{ij}$. 取 $\alpha_n \in A'_n$ 使 $P_{\alpha_n} = \bigcap_{i,j\le n} P_{ij}$, 令 $\beta = (\alpha_n)$. 由于 $x \in K \cap \left(\bigcap_{n\in N} P_{\alpha_n}\right)$, $\{P_{\alpha_n}\}$ 是 x 在 X 中的网，从而 $\beta \in L$ 且 $f(\beta) = x$. 故 $K \subset f(L)$.

综上所述， f 是从度量空间 A 到 X 上的紧覆盖、 msss- 映射．

推论 2.2[2] 空间 X 具有局部可数 k- 网当且仅当 X 是某一度量空间的紧覆盖、 ss- 映象．

引理 2.3[4] 下述命题成立：

(1) 若 $f:\ X \to Y$ 是紧覆盖映射，其中 Y 是 k_R- 空间，则 f 是 R- 商映射．

(2) 若 $f:\ X \to Y$ 是从 k_R- 空间 X 到完全正则空间 Y 上的 R- 商映射，则 Y 是 k_R- 空间．如果 K 是 Y 中的紧子集，有 Y 中的下降的开集列 $\{U_n\}$ 使 $U_n \cap K \neq \emptyset$ 且 $\left(\bigcap_{n\in N} U_n\right) \cap K = \emptyset$, 那么存在 X 的紧子集 L 使每一 $f(L) \cap U_n \neq \emptyset$ 且 $f(L) \subset K \cap \mathrm{cl}(U_1)$.

下述推论拓广了文 [5] 定理 1 及文 [4] 中的一个定理．

推论 2.4 对于完全正则空间 X, 下述条件相互等价：

(1) X 是具有 σ- 局部可数 k- 网的 k_R- 空间．

(2) X 是某一度量空间的紧覆盖、 R- 商、 msss- 映象．

(3) X 是某一度量空间的 R- 商、 msss- 映象．

证明 由定理 2.1 、引理 2.3, 只须证若 X 是度量空间 M 在 R- 商、 msss- 映射 f 下的象，那么 X 具有 σ- 局部可数 k- 网．由引理 1.2, 存在 M 的基 $\mathcal{B}$ 使 $f(\mathcal{B})$ 是 X 的 σ- 局部可数网．置

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{cl}(f(B)):\ B \in \mathcal{B}\},$$

则 $\mathcal{F}$ 也是 X 的 σ- 局部可数网. 对于 $K\subset V$, 其中 K, V 分别是 X 的紧子集和开子集，置

$$\mathcal{F}'=\{F\in\mathcal{F}:\ F\cap K\neq\emptyset,\ F\subset V\},$$

则 $|\mathcal{F}'|\leq\aleph_0$, 记 $\mathcal{F}'=\{F_i:\ i\in N\}$. 选取 X 的开子集 G_1, G_2 使 $K\subset G_2\subset \mathrm{cl}(G_2)\subset G_1\subset \mathrm{cl}(G_1)\subset V$. 因为 $\mathcal{F}$ 是 X 的网，所以 $K\subset\cup\{F_i:\ i\in N\}$. 对于 $n\in N$, 令 $U_n=G_2\backslash\cup\{F_i,\ i\leq n\}$, 那么 $\left(\bigcap\limits_{n\in N}U_n\right)\cap K=\emptyset$. 由引理 2.3 可以验证存在 $n\in N$ 使 $U_n\cap K=\emptyset$ (见 [5] 定理 1 的证明). 因此， $K\subset\cup\{F_i:\ i\leq n\}\subset V$. 即 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k- 网. 故 X 是具有 σ- 局部可数 k- 网的 k_R- 空间.

由文 [5] 定理 3 中 (3)$\Longrightarrow$(1) 的证明，有下述引理成立.

引理 2.5 设 f 是从 k- 空间 M 到 X 上的商映射. 如果 $\mathcal{B}$ 是 M 的 k- 网且 $f(\mathcal{B})$ 是 X 的点可数集族，则 $f(\mathcal{B})$ 是 X 的 k- 网.

推论 2.6 对空间 X, 下列条件相互等价：

(1) X 是具有 σ- 局部可数 k- 网的 k- 空间 (Fréchet 空间).

(2) X 是某一度量空间的紧覆盖、商 (伪开) 、 msss- 映象.

(3) X 是某一度量空间的商 (伪开) 、 msss- 映象.

三、具有 σ- 局部可数基的空间

定理 3.1 对空间 X, 下列条件相互等价：

(1) X 是具有 σ- 局部可数基的空间；

(2) X 是某一度量空间的紧覆盖、开、 msss- 映象；

(3) X 是某一度量空间的开、 msss- 映象；

(4) X 是某一度量空间的可数双商、 msss- 映象.

证明 只须证 (4)$\Longrightarrow$(1)$\Longrightarrow$(2).

(4)$\Longrightarrow$(1) 设 X 是某一度量空间的可数双商、 msss- 映象. 由引理 2.5, 引理 1.2, X 是具有 σ- 局部可数 k- 网的强 Frèchet 空间. 再由 [6] 定理 3.9 和 [7] 命题 3.2, X 具有 σ- 局部可数基.

(1)$\Longrightarrow$(2) 设 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_i:\ i\in N\}$ 是空间 X 的基，其中每一 $\mathcal{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in A_i\}$ 是 X 的关于有限交封闭的开子集族且 $X\in\mathcal{P}_i\subset\mathcal{P}_{i+1}$. 置

$$A=\left\{\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A_i:\ \{P_{\alpha_i}\}\text{ 是 }X\text{ 中某点 }x(\beta)\text{ 的局部基}\right\},$$

与定理 1.3 证明中同样的方式定义 A 上的拓扑及从度量空间 A 到 X 上的函数 f, 则 f 是开、msss- 映射. 对于 X 的非空紧子集 K, 与定理 2.1 同样的步骤构造 A_n 的有限子集 A'_n 和 $\mathcal{P}_n$ 的有限子集 $\mathcal{P}'_n$. 由于 $\mathcal{P}'_{n+1}$ 部分加细 $\mathcal{P}'_n$ (即 $\mathcal{P}'_{n+1}$ 的任一元含于 $\mathcal{P}'_n$ 的某元内) 并且对于 X 的覆盖 K 的开子集族 $\mathcal{U}$ 存在 $n\in N$ 使 $\mathcal{P}'_n$ 部分加细 $\mathcal{U}$, 于是存在 N 的严格上升的子序列 $\{n_i\}$ 使 $\{\mathrm{cl}(P\cap K):\ P\in\mathcal{P}'_{n_{i+1}}\}$ 部分加细 $\mathcal{P}'_{n_i}$. 可以取 $n_1=1$. 对于 $j\in N$, 存在唯一的 $i\in N$ 使 $n_i\leq j<n_{i+1}$, 于是 $\mathcal{P}'_{n_i}\subset\mathcal{P}_j$, 从而存在 A_j 的有限子集 B_j 使 $\{P_\alpha:\ \alpha\in B_j\}=\mathcal{P}'_{n_i}$.

置

$$L=\left\{\beta=(\alpha_j)\in\prod_{j\in N}B_j:\ 对于\ j\in N,\ \emptyset\neq\mathrm{cl}(P_{\alpha n_{j+1}}\cap K)\subset P_{\alpha_{n_j}}\right.$$

$$\left.且若存在\ i\in N\ 使\ n_i<j<n_{i+1},\ 则\ P_{\alpha_j}=P_{\alpha_{n_i}}\right\}.$$

易验证 L 是 $\prod_{j\in N}A_j$ 的紧子集. 对于 $\beta=(\alpha_j)\in L$, 有 $\emptyset\neq\bigcap_{j\in N}\mathrm{cl}(P_{\alpha_j}\cap K)=\bigcap_{j\in N}(P_{\alpha_j}\cap K)$, 取定 $x\in\bigcap_{j\in N}(P_{\alpha_j}\cap K)$, 则 $\{P_{\alpha_j}\}$ 是 x 在 X 中的局部基，因此 $\beta\in A$ 且 $f(\beta)\in K$, 故 $L\subset A$ 且 $f(L)\subset K$. 另一方面，对于 $x\in K$, $i\in N$, 让 $\mathcal{Q}_i=\{P\in\mathcal{P}'_{n_i}:\ x\in P\}$, 那么 $|\mathcal{Q}_i|<\aleph_0$, 并且如果 $P\in\mathcal{Q}_{i+1}$, 则存在 $P'\in\mathcal{Q}_i$ 使 $\mathrm{cl}(P\cap K)\subset P'$. 由 König 引理 [8], 可选取 $P_{\alpha_{n_i}}\in\mathcal{Q}_i$ 使 $\mathrm{cl}(P_{\alpha_{n_{i+1}}}\cap K)\subset P_{a_{n_i}}$. 而对于满足 $n_i<j<n_{i+1}$ 的 $j\in N$, 由 B_j 的定义，可选取 $\alpha_j\in B_j$ 使 $P_{\alpha_j}=P_{\alpha_{n_i}}$. 令 $\beta=(\alpha_j)$, 则 $\beta\in L$ 且 $x\in\bigcap_{j\in N}(P_{\alpha_j}\cap K)$, 所以 $\{P_{\alpha_j}\}$ 是 x 在 X 中的局部基，从而 $f(\beta)=x$. 因此 $K\subset f(L)$. 故 $f(L)=K$, 即 f 是紧覆盖映射，所以 X 是某一度量空间在紧覆盖、开、 msss- 映射下的象.

四、 σ- 局部有限集族与分层强紧映射

空间 X 称为 σ- 空间，若 X 具有 σ- 局部有限网. 空间 X 称为 $\aleph$- 空间，如果 X 具有 σ- 局部有限 k- 网. 空间 X 称为 g- 可度量空间 [9], 如果 X 具有 σ- 局部有限弱基. 有下列关系成立 [10]:

$$度量空间\ \Longrightarrow g\text{- 可度量空间}\ \Longleftrightarrow\ \aleph\text{- 空间}\ +\ 对称度量空间$$

定义 4.1 映射 $f:\ X\to Y$ 称为分层强紧映射 (stratified strong compact mapping), 如果存在以 X 为子空间的积空间 $\prod_{i\in N}X_i$ 满足：对于任意的 $y\in Y$, 存在 y 在 Y 中的开邻域列 $\{V_i\}$ 使每一 $\mathrm{cl}\left(p_if^{-1}(V_i)\right)$ 是 X_i 的紧子空间. 如果更设所有的 X_i 是度量空间，那么 f 称为可度量的分层强紧映射，简记为 mssc- 映射.

与定理 1.2 、定理 2.1 类似的证法，有下述定理成立.

定理 4.2 空间 X 是 σ- 空间当且仅当 X 是某一度量空间的 mssc- 映象.

定理 4.3 空间 X 是 $\aleph$- 空间当且仅当 X 是某一度量空间的紧覆盖、 mssc- 映象.

对于度量空间 (X,d), 映射 $f:\ X\to Y$ 称为 π- 映射，若对于任意的 $y\in Y$ 及 y 在 Y 中的开邻域 V 有 $d\left(f^{-1}(y),X\backslash f^{-1}(V)\right)>0$.

引理 4.4[10] 设 (X,d) 是度量空间， $f:\ X\to Y$ 是商映射，那么 Y 是对称度量空间当且仅当 f 是 π- 映射.

定理 4.5 对空间 X, 下述条件相互等价：

(1) X 是 g- 可度量空间.

(2) X 是某一度量空间的紧覆盖、商、 π 、 mssc- 映象.

(3) X 是某一度量空间的商、 π 、 mssc- 映象.

证明 由定理 4.3, 引理 4.4 只须证 (3)$\Longrightarrow$(1). 设 X 是度量空间 (M,d) 在商，π, mssc- 映射 f 下的象. 由引理 1.2, 存在 M 的基 $\mathcal{B}$ 使 $f(\mathcal{B})$ 是 X 的 σ- 局部有限网. 再由引理 2.5 、引理 4.4, X 是对称度量的 $\aleph$- 空间，所以 X 是 g- 可度量空间.

注 引理 1.2 体现了 msss- 映射所建立的度量空间与具有 σ- 局部可数集族间的关系. 从而按引理 1.2 所表述的映射性质定义一类映射将起到相似的作用. 对于 mssc- 映射可以类似处理 [11].

参 考 文 献

[1] Alexandroff, P., On some results concerning topological spaces and their continuous mappings, *Proc. Symp. Gen. Top.(Prague,* (1961), 41–54.

[2] Lin Shou, On a generalization of Michael's theorem, *Northeastern Math. J.*, **4** (1988), 162–168.

[3] Michael, E., $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, **15** (1966), 983–1002.

[4] Arhangel′skii, A., On R-quotient mappings on spaces with countable bases (Russian), *Dokl. Akad. Nauk.*, **287** (1986), 14–17.

[5] 林寿，关于 R- 商、 ss- 映射，数学学报， **34** (1991), 7–11.

[6] Burke, D., Closed mappings, Surveys in General Top. (New York: Academic Press, 1980), 1–32.

[7] Gruenhage, G., Michael, E., Tanaka, Y., Spaces determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, **113** (1984), 303–332.

[8] 儿玉之宏，永见启应，拓扑空间论，北京：科学出版社， 1084.

[9] Siwiec, F., On defining a space by a weak base, *Pacific J. Math.*, **52** (1974), 233–245.

[10] Tanaka, Y., Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces, *Math. Japon.*, **36** (1991), 71–84.

[11] 林寿， σ- 映射与 Alexandroff 问题，福建省科技首届青年学术年会论文集，福州：福建科学技术出版社， 5–8.

[12] Lin shou, Li zhaowen, Li Jinjin, Liu Chuan, On ss-mappings, *Northeastern Math. J.*, **9** (1993), 521–524.

Locally Countable Collections, Locally Finite Collections and Alexandroff's Problems

Lin Shou
(Ningde Teachers' College, Fujian 352100, China)

Abstract: In this paper, stratified strong s-mappings and stratified strong compact mappings are introduced, by which the relations between matrizable spaces and spaces with σ-locally countable networks, or spaces with σ-locally countable k-networks, or spaces with σ-locally countable bases, or σ-spaces, or $\aleph$-spaces, or g-metrizable spaces are established. Those are some answers to Alexandroff's problems.

Key words: stratified strong s-mapping, stratified strong compact-mapping, σ-space, $\aleph$-space, g-metrizable space