四川大学学报(自然科学版)
Journal of Sichuan University Natural Science Edition　　Vol. 30 No. 2 1993

弱基与度量化定理*

林　寿**
(福建省宁德师专)

摘要　建立了几个关于弱基的度量化定理,推广了 H. Martin 和蒋继光的一些度量化定理.

关键词　弱基, cs- 正则基, cs -展开, 度量化定理.
中图法分类号　O189. 11

本文的目的是建立蒋继光的几个度量化定理[1]的弱基形式. 本文所论空间均指满足 T_2 分离性公理的拓扑空间. N 表示自然数集. 对于 X 中的收敛序列 $\langle x_n\rangle \to x$, 记 $T(x) = \{x\} \cup \{x_n : n \in N\}$, $T(x,m) = \{x_n : n \geqslant m\}$.

定义 1　空间 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的弱基[4], 如果对于每一 $x \in X$, 存在 $\mathscr{B}_x \subset \mathscr{B}$ 满足: (1) $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}_x : x \in X\}$; (2) $x \in \bigcap \mathscr{B}_x$; (3) 对于任意的 V、$U \in \mathscr{B}x$, 存在 $W \in \mathscr{B}x$ 使 $W \subset V \cap U$; (4) F 是 X 的闭子集当且仅当对于任给的 $x \in X \backslash F$, 存在 $B \in \mathscr{B}_x$ 使 $B \cap F = \phi$. 这时 $\mathscr{B}_x$ 称为 X 在点 x 的局部弱基. 若 $B \in \mathscr{B}_x$, 并且 $B \subset U$, 那么 U 称为点 x 的弱邻域.

定义 2　空间 X 的覆盖列 $\{g_n\}$ 称为 X 的弱展开[3], 如果对于每一 $x \in X$, $\{\mathrm{st}(x, g_n) : n \in N\}$ 形成点 x 的局部弱基.

定义 3　空间 X 的开覆盖列 $\{g_n\}$ 称为 X 的 cs- 展开[1], 如果对 X 中的任一收敛序列 $\langle x_n\rangle \to x$, 集族 $\{\mathrm{st}(T(x,m), g_n) : m, n \in N\}$ 形成了点 x 的局部基.

若将开覆盖列换为覆盖列, 局部基换为局部弱基, 那么 $\{g_n\}$ 称为 X 的 cs -弱展开.

定义 4　空间 X 的基 $\mathscr{B}$ 称为 cs- 正则[1], 如果对于 X 中的任一收敛序列 $\langle x_n\rangle \to x$ 及点 x 在 X 中的任一开邻域 U, 存在 $m \in N$ 使 $T(x,m) \subset U$, 并且 $|\{B \in \mathscr{B} : B \cap T(x,m) \neq \phi, B \cap (X \backslash U) \neq \phi\}| < \aleph_0$.

若将上述的基换为弱基, 那么 $\mathscr{B}$ 〗称为 X 的 cs -正则弱基.

结合 H. Martin[3] 和蒋继光[1]的结果, 有下列度量化定理.

引理 1　下列条件相互等价:

(1) X 是可度量化空间;

(2) X 有弱展开 $\{g_n\}$ 满足: 对于任给的 $x \in V$, 存在 x 的开邻域 U 和 $n \in N$ 使 $\mathrm{st}(U, g_n) \subset V$, 其中 V 是 X 的开子集;

本文于 1991 年 11 月 7 日收到
* 国家自然科学基金资助项目
** 四川大学数学系访问学者

(3) X 有弱展开 $\{\mathscr{g}_n\}$ 满足：对于 $K \subset V$，存在 $n \in N$ 使 $\mathrm{st}(K, \mathscr{g}_n) \subset V$，其中 K、V 分别是 X 的紧子集和开子集；

(4) X 具有 cs- 正则基；

(5) X 具有 cs- 展开；

(6) X 有弱展开 $\{\mathscr{g}_n\}$ 满足：对任给的 $x \in X$，$\{\mathrm{st}^2(x, \mathscr{g}_n) : n \in N\}$ 构成点 x 的局部弱基.

引理 2　若 $\{\mathscr{g}_n\}$ 是 X 的弱展开，那么存在 X 的弱展开 $\{\mathscr{W}_n\}$ 使 $\mathscr{W}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{W}_n$ 和 $\mathscr{g}_n$. 这时，对于 X 的有限子集 $F \subset V$，存在 $n \in N$ 使 $\mathrm{st}(F, \mathscr{W}_n) \subset V$，其中 V 是 X 的开子集.

引理 3　设 X 中的序列 $\langle x_n \rangle \to x$，$B$ 是点 x 的弱邻域，那么存在 $m \in N$ 使 $T(x, m) \subset B$.

证明　记 $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}_z : z \in X\}$ 是 X 的弱基，$\mathscr{B}_z$ 是点 z 的局部弱基. 不妨设 $B \in \mathscr{B}_x$. 我们只须证明 $x \in (T(x) \cap B)^{\circ}{}_{T(x)}$. 否则 $x \in T(x) \backslash (T(x) \cap B)^{\circ}{}_{T(x)}$. 而 $(T(x) \cap B)^{\circ}{}_{T(x)} = T(x) \backslash \overline{T(x) \backslash B}$[5]，所以 $x \in \overline{T(x) \backslash B}$，于是 $T(x) \backslash B$ 不是 X 的闭子集. 另外，对 $z \overline{\in} T(x) \backslash B$，若 $z = x$，则 $B \in \mathscr{B}_x$ 且 $B \cap (T(x) \backslash B) = \phi$；若 $z \neq x$，则 $z \in X \backslash \overline{T(x) \backslash B}$. 于是有 $B' \in \mathscr{B}_z$ 使 $B' \subset X \backslash \overline{T(x) \backslash B}$，从而 $B' \cap (T(x) \backslash B) = \phi$. 因为 $\mathscr{B}$ 是 X 的弱基，所以 $T(x) \backslash B$ 是 X 的闭子集. 矛盾.

定理　下列条件相互等价：

(1) X 是可度量化空间；

(2) X 有弱展开 $\{\mathscr{g}_n\}$ 满足：对于任给的 $x \in V$，存在 x 的弱邻域 U 和 $n \in N$ 使 $\mathrm{st}(U, \mathscr{g}_n) \subset V$，其中 V 是 X 的开子集；

(3) X 有弱展开 $\{\mathscr{g}_n\}$ 满足：对于 X 中的任一收敛序列 $\langle x_n \rangle \to x$，若 $T(x) \subset V$，则存在 $n \in N$ 使 $\mathrm{st}(T(x), \mathscr{g}_n) \subset V$，其中 V 是 X 的开子集；

(4) X 有 cs- 正则弱基；

(5) X 有 cs- 弱展开.

证明　由引理 1 知条件(1)⇒(2)、(4)、(5).

(2)⇒(3)　由引理 2，不妨设满足条件(2)的 X 的弱展开 $\{\mathscr{g}_n\}$ 有 $\mathscr{g}_{n+1} > \mathscr{g}_n$. 对于 X 中的任一收敛序列 $\langle x_n \rangle \to x$，若 $T(x) \subset V$，其中 V 是 X 的开子集，由条件(2)，存在点 x 的弱邻域 U 和 $n \in N$ 使 $\mathrm{st}(U, \mathscr{g}_n) \subset V$. 由引理 3，存在 $m \in N$ 使 $T(x, m) \subset U$. 令 $F = \{x, x_1, \cdots, x_{m-1}\}$，由引理 2，存在 $k \in N$ 使 $\mathrm{st}(F, \mathscr{g}_k) \subset V$，那么 $\mathrm{st}(T(x), \mathscr{g}_{n+k}) \subset V$.

(4)⇒(3)　设 $\mathscr{B}$ 是 X 的 cs- 正则弱基. 记 $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}_x : x \in X\}$，其中 $\mathscr{B}_x$ 是点 x 的局部弱基. 若 x 是 X 的孤立点，那么 $\{x\} \in \mathscr{B}_x$；若 x 不是 X 的孤立点，那么 $|\mathscr{B}_x| \geqslant \aleph_0$，这时记 $\mathscr{B}_x$ 的一个可数无限子族为 $\{B_{n,x} : n \in N\}$. 置

$$V_n(x) = \begin{cases} \{x\}, & x \text{ 为 } X \text{ 的孤立点}, \\ \bigcap\limits_{i \leqslant n} B_{i,x}, & x \text{ 不是 } X \text{ 的孤立点}. \end{cases}$$

记 $\mathscr{g}_n = \{V_n(x) : x \in X\}$，那么 X 的覆盖列 $\{\mathscr{g}_n\}$ 满足条件(3). 先证明它是 X 的弱展开，即对于 $x \in X$，$\{\mathrm{st}(x, \mathscr{g}_n) : n \in N\}$ 构成点 x 的局部弱基. 这只须验证对于 $F \subset X$，F 是 X 的闭子集当且仅当对于 $x \in X \backslash F$，存在 $n \in N$ 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{g}_n) \cap F = \phi$. 若 F 是 X 的闭子集且 $x \in X \backslash F$，由于 B 是 X 的 cs- 正则弱基，存在 $m \in N$ 使 $m \geqslant |\{B \in \mathscr{B} : x \in B, B \cap F \neq \phi\}|$，设 $x \in V_{m+1}(y)$，若 y 是 X 的孤立点，那么 $V_{m+1}(y) = \{y\}$，于是 $V_{m+1}(y) \cap F = \phi$；若 y 不是 X 的孤立点，

$MV_{m+1}(y)$ 是 B 中 $m+1$ 个元的交,并且 x 属于这每一个元,由 m 的意义知 $V_{m+1}(y)\cap F=\phi$,从而 $\mathrm{st}(x,g_{m+1})\cap F=\phi$. 如果 X 的子集 F 满足:对于 $x\in X\backslash F$,存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{st}(x,g_n)\cap F=\phi$,那么 $V_n(x)\cap F=\phi$,由弱基的定义,存在 $B_x\in\mathscr{B}_x$ 使 $B_x\subset V_n(x)$,于是 $B_x\subset F=\phi$,因而 F 是 X 的闭子集. 故 $\{g_n\}$ 是 X 的弱展开. 对于 X 中的收敛序列 $\langle x_n\rangle\to x$,若 $T(x)\subset V$,其中 V 是 X 的开子集,因为 $\mathscr{B}$ 是 X 的 cs- 正则弱基,存在 $m\in N$ 和 $n\in N$ 使 $|\{B\in\mathscr{B}: T(x,m)\cap B\neq\phi, B\cap(X\backslash V)\neq\phi\}|\leqslant n$,于是 $\mathrm{st}(T(x,m),g_{n+1})\subset V$. 对于 $F=\{x,x_1,\cdots,x_{m-1}\}$,由引理 2,存在 $k\in N$ 使 $\mathrm{st}(F,g_k)\subset V$,从而 $\mathrm{st}(T(x),g_{k+n})\subset V$.

(5)⇒(3) 设 $\{g_n\}$ 是 X 的 cs- 弱展开. 不妨设 $g_{n+1}<g_n$. 显然,$\{g_n\}$ 是 X 的弱展开. 对于 X 中的任一收敛序列 $\langle x_n\rangle\to x$. 设 $T(x))\subset V$,其中 V 是 X 的开子集. 因为 $\{\mathrm{st}(T(x,m),g_n): m,n\in N\}$ 构成了点 x 的局部弱基,存在 $m,n\in N$ 使 $\mathrm{st}(T(x,m),g_n)\subset V$. 用(4)⇒(3) 中使用的相同论证知存在 $k\geqslant n$ 使 $\mathrm{st}(T(x),g_k)\subset V$.

(3)⇒(1) 设 X 有弱展开列 $\{g_n\}$ 满足(3) 的条件. 下证 $\{g_n\}$ 满足引理 1 中的条件(6). 不妨设 $g_{n+1}<g_n$. 若结论不真,则存在 $x\in X$ 使 $\{\mathrm{st}^2(x,g_n): n\in N\}$ 不构成点 x 的局部弱基,于是存在点 x 在 X 中的开邻域 V 使对于任一 $n\in N$, $\mathrm{st}^2(x,g_n)\not\subset V$. 从而存在 $G_n\in g_n$ 使 $\mathrm{st}(x,g_n)\cap G_n\neq\phi$ 且 $G_n\not\subset V$. 取定 $x_n\in\mathrm{st}(x,g_n)\cap G_n$. 由于 $\{\mathrm{st}(x,g_n): n\in N\}$ 形成了点 x 的局部弱基,所以序列 $\langle x_n\rangle\to x$,于是存在 $m\in N$ 使 $T(x,m)\subset V$. 由条件(3),存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{st}(T(x,m),g_n)\subset V$,因此 $G_{n+m}\subset\mathrm{st}(T(x,m),g_{n+m}\subset\mathrm{st}(T(x,m),g_n)\subset V$. 矛盾. 故 X 是可度量化空间.

蒋继光[1]提出问题:能否用 cs- 正则网络来刻划可度量空间?. 我们的定理对此给出了一个部分的回答. 应当注意的是,对于任何空间 X, $\{\{x\}: x\in X\}$ 就构成了 X 的一个 cs- 正则网络. 鉴于第一可数的具有 σ- 局部有限 k- 网络的正则空间是可变化空间,我们提出下列问题:具有 cs- 正则 k- 网络的第一可数的正则空间是否是可度量空间?

作者对蒋继光教授的热情帮助及悉心指导表示感谢.

参考文献

[1] Jiang Jiguang(蒋继光), *Q and A Gen. Top.*, 1987, 5: 243—248.
[2] Hodel R., *Pacific J. Math.*, 1974, 55: 441—459.
[3] Martin H., *Trans. AMS.*, 1976, 222: 337—344.
[4] Arhangel'skii A., Mappings and Spaces, Russian Math. Surveys, 1966, 21: 115—162.
[5] Engelking R., General Topology, Warszawa, 1977.

WEAK BASES AND METRIZATION THEOREM

Lin Shou
(Ningde Teacher's College, 352100)

Abstract In this paper, several weak base (in the sense of A. Arhangel'skii) metrization theorems are established, including a weak base generalization of H. Martin's and Jiang Ji-guang's metrization theorems.

Key Words Weak base, *cs*-regular base, cs-development, metrization theorem.
(1991 MSC 54E35)