第4卷第2期　　苏州大学学报　　Vol.4 No.2
1988年4月　　JOURNAL OF SUZHOU UNIVERSITY　　Apr. 1988

闭映射不能保持T_1仿紧性及紧式仿紧性

林　寿
（数学系）

摘　要：本文构造两个例子说明
（1）T_1仿紧性不被闭映射所保持.
（2）紧式仿紧性不被闭映射所保持.
它们分别否定地回答了高国士和*D.K.Burke*的问题.

关键词：强仿紧，仿紧，紧式仿紧，*cs*—式仿紧.

E.Michael[1]证明了T_2仿紧性为闭映射所保持．至于不附加分离公理的仿紧性能否为闭映射所保持？这一问题似乎尚未解决．*J.M.Worrell，Jr.*[2]给出了弱仿紧性（*metacompactness*）的饶有意义的刻划，证明了“闭映射保持弱仿紧性”后，宣称用类似的技巧可以证明“（不附加分离公理的）仿紧性能为既开且闭的映射保持”．高国士[3]改进了上述结果证明了这仿紧性能为几乎开的（*almost—open*）闭映射所保持（稍修改[3]中定理2的证明可得稍强的结果：双商（*bi—quotient*）闭映射保持这仿紧性）．至于能否去掉“几乎开”（或“双商”）这是[3]中最后提出的问题．本文否定地解决这一问题，给出反例说明即使是T_1仿紧性也不能为闭映射所保持．此外，稍稍修改上述反例可以得T_0紧式仿紧性（*mesocompactness*）不能为闭映射所保持，解决了*D.K.Burke*在[4]中未解决的问题（见[4]*p.*20），且使高国士与吴利生[5]中对紧式仿紧性的映射理论的研究（[5]证明了完备映射保持紧式仿紧性及闭映射保持正规紧式仿紧性）更完整．

§1　定义及关系

为了完备起见，先叙述几个必要的概念以及它们之间的关系．$\boldsymbol{N}$总表示自然数集．

定义1　拓扑空间X的子集族$\boldsymbol{F}$称为紧有限（*cs*—有限）的，若$\boldsymbol{X}$中的每一紧子集（收敛序列*）至多与$\boldsymbol{F}$中有限个元相交．

---

*设序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于x，那么$\{x\}\cup\{x_n: n\in\boldsymbol{N}\}$称为一收敛序列．

本文于1986年11月5日收到．

定义2 若拓扑空间$\boldsymbol{X}$的任一开覆盖都有一星有限(局部有限、紧有限、cs--有限、点有限)的开加细覆盖，那么$\boldsymbol{X}$就称为是强仿紧(*strongly paracompact*)[仿紧(*paracompact*)、紧式仿紧(*mesocompact*)、cs—式仿紧(*sequentially mesocompact*)、弱仿紧(*metacompast*)]空间。

若将上述的开覆盖用可数开覆盖代替，相应地可得到可数强仿紧、可数仿紧、可数紧式仿紧、可数cs—式仿紧和可数弱仿紧空间的定义。

显然，有下列关系

$$\begin{tikzcd}
\text{强仿紧} \arrow[r] \arrow[d] & \text{可数强仿紧} \arrow[d] \\
\text{仿紧} \arrow[r] \arrow[d] & \text{可数仿紧} \arrow[d] \\
\text{紧式仿紧} \arrow[r] \arrow[d] & \text{可数紧式仿紧} \arrow[d] \\
cs\text{—式仿紧} \arrow[r] \arrow[d] & \text{可数}cs\text{—式仿紧} \arrow[d] \\
\text{弱仿紧} \arrow[r] & \text{可数弱仿紧}
\end{tikzcd}$$

§2 反 例

例1. 存在T_1强仿紧空间使得在某一闭映射下的象不是可数仿紧空间。

构造. 取$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{N}\cup\{0\})\times(\boldsymbol{N}\cup\{0\})\setminus\{(0,0)\}$. 对于$m,n,K\in\boldsymbol{N}$，置

$$V(n,m)=\{(n,k):k\geqslant m\}.$$

在$\boldsymbol{X}$上导入如下拓扑：点$(n,m)\in\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$的邻域基为$\{\{(n,m)\}\}$；点$(n,0)$的邻域基为$\{V(n,m)\cup\{(n,0)\}\}_{m=1}^{\infty}$；点$(0,n)$的邻域基为$\{V(n,m)\cup\{(0,n)\}\}_{m=n}^{\infty}$. 易知这时$\boldsymbol{X}$成为一$T_1$型的拓扑空间.

i) X是强仿紧空间.

对于X的任一开覆盖$\mathscr{U}$. X中每一形如$(n,0)$的点属于$\mathscr{U}$中的某一元U，从而存在$(n,0)$的邻域基中的元$V(n,m)\cup\{(n,0)\}\subset U$，其中$m$随$n$而变，可以写作$m=f(n)$，$f$是$\boldsymbol{N}$到$\boldsymbol{N}$内的函数. 所以存在$f\in\boldsymbol{N}^N$使对每一$n\in\boldsymbol{N}$，$V(n,f(n))\cup\{(n,0)\}$包含在$\mathscr{U}$的某一元内. 对$X$中每一形如$(0,n)$的点作同样的处理，存在$g\in\boldsymbol{N}^N$且$g(n)\geqslant n$使对每一$n\in\boldsymbol{N}$，$V(n,g(n))\cup\{(0,w\}$包含在$\mathscr{U}$的某一元内. 置

$$\mathscr{W}=\Big\{V(n,f(n))\cup\{(n,0)\}:n\in\boldsymbol{N}\}\cup\{V(n,g(n))\cup\{(0,n)\}:n\in\boldsymbol{N}\Big\}\cup$$
$$\cup\Big\{\{x\}:x\in X\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}(V(n,f(n))\cup\{(n,0)\}\cup V(n,g(n))\cup\{(0,n)\})\Big\},$$

则$\mathscr{W}$中每一形如$V(n,f(n))\cup\{(n,0)\}$的元至多与$\mathscr{W}$中一个形如$V(n,g(n))\cup\{(0,n)\}$的元以及$(f(n)-1)$个单点集相交. 同样，每一形如$V(n,g(n))\cup\{(0,n)\}$的元至多与$\mathscr{W}$中一个形如$V(n,f(n))\cup\{(n,0)\}$的元及$(g(n)-1)$个单点集相交. 所以$\mathscr{W}$是$\mathscr{U}$的星有限

的开加细复盖。故X是强仿紧空间。

将X的子集$\{0\}\times\boldsymbol{N}$黏合成一点$0^*$所得到的商空间记为$Y=(\boldsymbol{N}\times(\boldsymbol{N}\cup\{0\}))\cup\{0^*\}$。设$q$是从$X$到$Y$上的商映射，$q(\{0\}\times\boldsymbol{N})=\{0^*\}$。由于$\{0\}\times\boldsymbol{N}$是$X$的闭子集，所以$q$是闭映射。

ii）Y不是可数仿紧空间。

由商拓扑的定义，$\boldsymbol{N}\times(\boldsymbol{N}\cup\{0\})$（$\subset Y$）中的点的邻域基取为$X$中相应点的邻域基；点$0^*$的邻域基应是

$$\{V^g=\cup\{V(n,g(n)):n\in\boldsymbol{N}\}\cup\{0^*\}:g\in\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}\text{且}g(n)\geqslant n\}. \qquad (1)$$

现在取g_0：$\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$使$g_0(n)=n(n\in\boldsymbol{N})$，那么$Y$的可数开覆盖

$$\mathscr{U}=\{V^{g_0}\}\cup\{V(n,n)\cup\{(n,0)\}:n\in\boldsymbol{N}\}\cup\{(n,m):n>m,n,m\in\boldsymbol{N}\}$$

的任何开加细覆盖$\mathscr{W}$都不可能在点0^*是局部有限的，这是因为由（1）知0^*的任一邻域V^g与每一个$V(n,m)\cup\{(n,0)\}$（$m,n\in\boldsymbol{N}$）相交。因而$\mathscr{U}$不存在局部有限的开加细覆盖。故Y不是可数仿紧空间。

特别地，由例1我们知道T_1仿紧性不为闭映射所保持。

为了例2证明过程中的需要，我们先叙述一条简单的引理。

引理 若$\boldsymbol{F}$是满足第一可数性公理的空间X的cs—有限族，那么$\boldsymbol{F}$是X的局部有限族。

证明 若$\boldsymbol{F}$不是X的局部有限族，那么存在$x_0\in X$，使得x_0的任意邻域与$\boldsymbol{F}$中的无限多个元相交。因为X满足第一可数性公理，设$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$是点x_0的邻域基。于是，对每一$n\in\boldsymbol{N}$，存在$F_n\in\boldsymbol{F}$使得$F_n\cap V_n\neq\phi$且所有的F_n两两不同。取$x_n\in F_n\cap V_n$，由于$\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$是点x_0的邻域基，所以序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$收敛于x_0。这时X的收敛序列$\{x_0\}\cup\{x_n:n\in\boldsymbol{N}\}$与$\boldsymbol{F}$中的无限个元相交，这与假设矛盾。因而$\boldsymbol{F}$是$X$的局部有限族。

例2 存在T_0强仿紧空间使得在某一闭映射下的象不是可数cs—式仿紧空间。

构造，使用例1所使用的记号$V(n,m)$。取$X=(\boldsymbol{N}\cup\{0\})\times(\boldsymbol{N}\cup\{0\})\setminus\{(0,0)\}$。在$X$上导入如下拓扑：$\boldsymbol{N}\times(\boldsymbol{N}\cup\{0\})$中的点的邻域基同例1中$X$的相应点的邻域基；点$(0,n)$的邻域基由单元族$\left\{V(n,n)\cup\{(0,n)\}\right\}$构成。易知按上述的定义$X$成为一$T_0$型的拓扑空间（因为点$(0,n)$的邻域总包含点$(n,n)$）。类似例1的证法知$X$是强仿紧空间。

将X的子集$\{0\}\times\boldsymbol{N}$黏合成一点$0^*$所得到的商空间记为$Y$。让$q$是从$X$到$Y$上的商映射。因为$\{0\}\times\boldsymbol{N}$是$X$的闭子集，所以$q$是闭映射。

由商拓扑的定义知Y的点0^*的邻域基由单元素族$\left\{V_0=\{(n,m):m\geqslant n>0\}\cup\{0^*\}\right\}$构成。于是$Y$满足第一可数性公理。用例1一样的证法知$Y$不是可数仿紧空间。利用引理知$Y$存在一可数开覆盖不具有$cs$—有限的开加细覆盖。即$Y$不是可数$cs$—式仿紧空间。

由例2可知在§1中所提到的介于强仿紧性和可数cs—式仿紧性之间的拓扑性质均非闭映射所能保持。特别地，紧式仿紧性非闭映射所能保持。

感谢导师高国士教授对本文的关心和指导。

参 考 文 献

[1] *Michael, E., Another note on paracompast spaces, Proc. Amer. Math. Soc.*, 8(1957), 822—828.

[2] *Worrell, Jr., J. M., The closed continuous images of metacompast topological spaces, Portugal. Math.*, 25(1966), 175—179.

[3] *Gao Guoshi* (高国士), *Mapping theorems on paracompact spaces,* 苏州大学学报, 1985年第一期, 1—3.

[4] *Burke, D.K., Closed mappings, in Surveys in General Topology, Acad. Press*, 1980, 1—32.

[5] *Kuo—Shih Kao* (高国士) *and Li—Sheng Wu* (吴利生), *Mapping theorems on mesocompact spaces, Proc. Amer. Math. Soc.*, 89(1983), 355—358.

T_1 Paracompactness and Mesocompactness Cannot Be Preserved by Closed Maps

Lin Shou

(Department of Mathematics)

Abstract: *In this paper, we construct two examples: to show that* (1) T_1 *paracompactness is not preserved by closed maps,* (2) *mesocompactness is not preserved by closed maps, which negatively answer the questions of Gao Guoshi and D.K. Burke respectively.*

Key Words: *Strongly paracompact, paracompact, mesocompact sequentially mesocompact.*