Some Properties of the Minus Partial Order

of Morphism Set in a Category

Zhuang Wajin

(Zhangzhou Normal College, 363000)

Abstract

In this paper, we proved some properties of the minus partial order of a morphism set in a category, and also obtained three characterizations of a regular morphism which have a invertible (1) - inverse in a preadditive category.

Key words: category, regular morphism, generalized inverse, minus partial order.

（上接第47页）

定理2 当

$$0<k<2\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)\sum_{i=1}^{p_1}\lambda_i^{-2}\Big/\left(\|(X_1'X_1)\beta_1\|^2+\sigma_{11}\sum_{i=1}^{p_1}\lambda_i^{-3}\right)$$

时，在均方误差意义下估计量$\widetilde{\beta}_1(k)$优于$\widetilde{\beta}_1$，即：

$$\mathrm{MSE}(\widetilde{\beta}_1(k))<\mathrm{MSE}(\widetilde{\beta}_1)$$

这里$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{p_1}>0$是$X_1'X_1$的特征根，$\rho_{12}^2=\sigma_{12}^2\big/\sigma_{11}\sigma_{22}$

定理1和定理2说明，只要我们将k取得充分小，则$\widetilde{\beta}_1(k)$在均方误差意义下优于$\widetilde{\beta}_1$。

需要指出的是，对于线性回归系统（1）的第二个方程的回归系数β_2，当设计阵X_2呈病态时，我们可以构造相应的有偏估计来改进β_2的协方差改进估计。

参 考 文 献

1 Wang Song gui（王松桂）Covariance improvement estimate of the parameters in seemingly unrelated regression models. The Proceding of the Second Japan —— China Symposium on Statistics, Japan, 1986. 318—321

2 Zeller, A. An efficient method of estimating Seemingly unrelated regression and tests of aggregation bias, J Amer Statist Asso 1962 57 348—368

3 张尧庭、方开泰，多元统计分析引论，北京科学出版社1983

4 王松桂，线性模型的理论及应用，安徽教育出版社1987

5 刘爱义、王松桂，一类相依回归系统的参数的有偏估计，应用概率统计，1991 7(3)：266—273。

漳州师院学报（自然科学版） Journal of Zhaugzhou Teachers College
1993年 第7卷 第2期 （Nat.Sci.）Vol.7 No.2 1993

k-网与k-系*

林 寿 李进金
（宁德师专数学系） （漳州师院数学系）

摘要 本文研究拓扑空间中的k-网和k-系之间的关系，我们主要讨论在点可数族或σ-遗传闭包保持族中紧k-网与k-系的转换问题，主要结果是Hausdorff空间X具有点可数（或σ-遗传闭包保持）的可度量k-系当且仅当X是具有点可数（或σ-遗传闭包保持）的紧k-网的k-空间。

关键词 k-网，k-系，点可数集族，遗传闭包保持集族

本文所论空间均指满足Hausdorff分离性公理的拓扑空间。

设X是一个空间，ρ是X的子集族。ρ称为X的k-网〔1〕，如果对于X的紧子集K及K在X中的开邻域U，存在ρ的有限子族ρ′使$K\subset\bigcup\rho'\subset U$。若X的k-网ρ中的每一元是X的紧子集，那么ρ称为X的紧k-网。设ρ是空间X的一个覆盖，称X关于ρ具有弱拓扑，如果X的子集A是X的闭子集当且仅当对于$P\in\rho$，$P\cap A$是P的闭子集。X的子集族ρ称为X的k-系〔2〕，如果ρ中的元是X的紧子集且X关于ρ具有弱拓扑。若X的k-系ρ中的每一元是X的可度量化的子空间，那么ρ称为X的可度量k-系。

空间X称为k-空间〔3〕，如果X关于由X的所有紧子集组成的族具有弱拓扑。显然，空间X具有k-系当且仅当X是一个k-空间。

k-网与k-系是两个不同的概念。本文的目的是寻求这两个概念能相互转化的条件。

定理1 设ρ是空间X的紧k-网，那么ρ是X的k-系当且仅当X是k-空间。

证 只须证充分性。设ρ是k-空间X的紧k-网，我们要证X关于ρ具有弱拓扑。若X的子集A满足对于$P\in\rho$，$P\cap A$是P的闭子集，对于X的紧子集K，因为ρ是X的k-网，存在ρ的有限子集ρ′使$K\subset\bigcup\rho'$，于是$K\cap A=\bigcup\{P\cap A: P\in\rho'\}$，从而$K\cap A$是K的闭子集。又因为X是k-空间，所以A是X的闭子集，故ρ是X的k-系。

下面转入研究怎样的k-系是一个紧k-网。对于非单点集的紧空间X，{X}是X的k-系，但是{X}不是X的k-网。因而关于怎样的k-系是一个紧k-网的问题可讨论如下的模式：设P是一个集族性质，若空间X具有性质P的k-系，那么X是否具有性质P的紧k-网？

*国家自然科学基金资助项目。

定理 2 空间X具有点只数的可度量k-系当且仅当X是具有点可数的紧k-网的k-空间。

证 必要性。设ρ是空间X的点可数的可度量k-系。显然，X是一个k-空间。记

$$\rho=\{P_\alpha : \alpha\in A\}。$$

对于$\alpha\in A$，因为P_α是紧度量空间，所以P_α具有点可数的紧k-网，让ρ_α是P_α的点可数的紧k-网。置

$$\rho'=\bigcup\{\rho_\alpha : \alpha\in A\}。$$

那么ρ'是X的点可数的紧子集族。对X的紧子集K及K在X中的开邻域U，我们断言存在A的有限子集A'使$K\subset\bigcup\{P_\alpha : \alpha\in A'\}$。否则，对$x\in X$，记$\{P\in\rho : x\in P\}=\{P_n(x) : n\in N\}$。取定$x_1\in K$，则存在K的无限子集$D=\{x_n : n\in N\}$使每一$x_{n+1}\in K\setminus\bigcup_{i,j\leqslant n}P_i(x_j)$，那么对每一$P\in\rho$，$P\cap D$是有限集，于是D是紧空间K的无限闭离散子集，矛盾。对于$\alpha\in A'$，因为ρ_α是P_α的k-网，存在ρ_α的有限子集ρ_α'使$K\cap P_\alpha\subset\bigcup\rho_\alpha'\subset V\cap P_\alpha$。定义

$$\rho''=\bigcup\{\rho_\alpha' : \alpha\in A'\},$$

那么ρ''是ρ'的有限子集，并且$K\subset\bigcup\rho''\subset V$。故$\rho'$是X的点可数的紧k-网。

充分性。设ρ是k-空间X的点可数的紧k-网。由定理1，ρ是X的k-系。再由文〔4〕推论3.7：具有点可数k-网的紧空间是可度量化空间，ρ的元是X的可度量化的子空间，故ρ是X的点可数的可度量k-系。

点可数集族是σ-局部有限集族的推广。对于σ-局部有限集族的另一重要推广的σ-闭包保持集族，相应于定理2的命题并不成立。

例 1 存在空间X具有闭包保持的可度量k-系，但是X不具有σ-闭包保持的紧k-网。

证 令$I=[0,1]$，$X=I\times I$。集合X赋予如下拓扑：$I\times(0,1]$中的点是X的孤立点，对$s\in I$，点$(s,0)$在X中的邻域基的元形如$V\times I\setminus[\{s\}\times(0,1]]$，其中V是s在I中的欧氏邻域。显然，X是$T_3$空间。由文〔5〕例3.1，X不具有$\sigma$-闭包保持的紧k-网。往证X具有闭包保持的拔度量k-系。令

$$\beta=\{\{(x_n,y_n) : n\in N\} : \{x_n\}是I中互不相同元组成的收敛序列且y_n\in(0,1]\},$$

$$Y=I\times\{0\},$$

$$\rho=\{Y\}\cup\{Y\cup P : P\in\beta\}。$$

对于$P\in\beta$，$Y\cup P$是X的紧度量子空间，于是ρ是X的由紧度量空间组成的覆盖。对于ρ'

$\subset \rho$，$\bigcup \rho' \supset Y$，于是$\bigcup \rho'$是X的闭子集，从而ρ是X的闭包保持集族。设X的子集A满足对于$F \in \rho$，$F \cap A$是F的闭子集，对于$z \in X \setminus A$，若$z \in X \setminus Y$，则$\{z\}$是X的开子集且$\{z\} \cap A = \phi$。若$z \in Y$，记$Z = A \cap Y$，那么Z是X的闭子集，且$z \notin Z$，于是存在X的开子集V使$z \in V$且$\overline{V} \cap Z = \phi$。让

$J = \{x \in I$：存在$y \in I$使$(x, y) \in A \cap (V \times I)\}$，则J是有限集。否则，存在A中的序列$\{(x_n, y_n)\}$使$x_n \in V$，$x_n$互不相同且$y_n \in (0, 1]$（因为$V \cap Z = \phi$）。这时$\{x_n\}$存在收敛的子序列，不妨设序列$\{x_n\}$收敛于$x_0 \in I$，则$x_0 \in \overline{V}$，从而序列$\{(x_n, y_n)\}$在X中收敛于$(x_0, 0)$。定义

$P = \{(x_n, y_n) : n \in N\}$，

那么$P \in \beta$且$(Y \cup P) \cap A = Z \cup P$。因为$(x_0, 0) \notin Z$，所以$(Y \cup P) \cap A$不是X的闭子集，矛盾。故J是有限集。因此存在z在X中的开邻域W使$W \cap A = \phi$，所以A是X的闭子集。这说明X关于ρ具有弱拓扑，X具有闭包保持的可度量k-系。

空间X的子集族ρ称为X的遗传闭包保持集族〔6〕，如果对$H(P) \subset P \in \rho$有$\bigcup \{\overline{H(P)} : P \in \rho\} = \overline{\bigcup \{H(P) : P \in \rho\}}$，空间X的局部有限集族是遗传闭包保持集族，而遗传闭包保持集族是闭包保持集族。

定理3 空间X具有σ-遗传闭包保持的可度量k-系当且仅当X是具有σ-遗传闭包保持紧k-网的k-空间。

证 必要性。设ρ是空间X的σ-遗传闭包保持的可度量k-系。显然，X是一个k-空间。记$\rho = \bigcup_{n \in N} \rho_n$，其中每一$\rho_n$是X的遗传闭包保持集族。不妨认为对于$n \in N$有$\rho_n \subset \rho_{n+1}$。定义

$X_n = \bigcup \rho_n$，

$Z_n = \oplus \rho_n$，$n \in N$.

让$f_n : Z_n \to X_n$是显然映射，则f_n是从局部紧度量空间Z_n到X_n上的连续的闭映射（利用ρ_n的遗传闭包保持性）。由Nagata—Smirnov度量化定理，Z_n具有σ-局部有限的紧k-网β_n。令

$\gamma = \bigcup_{n \in N} f_n(\beta_n)$，

由f_n的闭性，γ是X的σ-遗传闭包保持的紧子集族。往证γ是X的k-网，对于$K \subset V \subset X$，其中K、V分别是X的紧子集和开子集，我们先证明存在$m \in N$使$K \subset X_m$。否则，存在X的无限子集$A = \{x_n : n \in N\}$使每一$x_n \in K \setminus X_n$，对于$P \in \rho$，存在$n \in N$使$P \in \rho_n$，于是$A \cap P$是有限集。因为ρ是X的k-系，所以A是紧空间K的无限的闭离散子集，矛

盾。故存在$m\in N$使$K\subset X_m$。由于f_m是连续的闭映射，存在Z_m的紧子集L使$f_m(L)=K$。又由于β_m是Z_m的k-网，存在β_m的有限子集β'_m使$L\subset\bigcup\beta'_m\subset f_m^{-1}(X_m\cap U)$，于是$K\subset\bigcup f_m(\beta'_m)\subset U$，因而$\gamma$是X的$\sigma$-遗传闭包保持的紧k-网。

充分性。设ρ是k-空间X的σ-遗传闭包保持的紧k-网，由定理1，ρ是X的k-系。因为X具有σ-遗传闭包保持k-网，所以X是σ-空间，于是X的紧子集是可度量化的子空间，从而ρ是X的可度量化k-系。

本文的第二部分讨论与k-空间相关的k_R－空间。空间X称为k_R－空间〔7〕，如果f是X上的实值函数使f在X的每一紧子集上的限制是连续的，那么f是X上的连续函数。每一个k-空间是k_R－空间，但是k_R－空间却未必是k-空间。Michael〔7〕构造了一个具有可数k-网的k_R-空间使它不是k-空间。但是，具有星可数的紧k-网的k_R空间是k-空间〔8〕。定理4说明具有σ-遗传闭包保持的紧k-网的k_R－空间也是一个k-空间。

引理　设k_R-空间X可表为可数个闭的正规k-空间$\{X_n: n\in N\}$之并。如果X满足：对于X的紧子集K，存在$n\in N$使$K\subset\bigcup\{X_i: i\leqslant n\}$，那么X是k-空间。

证　先证明X关于$\{X_n: n\in N\}$具有弱拓扑，若不然，则存在X的非闭子集A使对于$n\in N$，$A\cap X_n$是X的闭子集，取定$a\in\overline{A}\setminus A$，则存在$m\in N$使$a\in X_m$，对于$i\in N$，令$Y_i=\bigcup\{X_n: n\leqslant m+i-1\}$，那么$a\in Y_1\subset Y_i\subset Y_{i+1}$，$Y_i$是X的闭的正规的k-空间，并且$A\cap Y_i$是X的闭子集，不妨设$A\cap Y_1\neq\phi$，因为$a\notin A\cap Y_1$，存在$Y_1$上的实值连续函数$f_1$使$f_1(a)=1$，$f_1(A\cap Y_1)=\{0\}$。定义$g_1$：$A\cap Y_2\to R$，使$g_1(A\cap Y_2)=\{0\}$。由于$Y_1$，$A\cap Y_2$是X的闭子集，$f_1$在$Y_1$上连续，$g_1$在$A\cap Y_2$上连续，且在$Y_1\cap(A\cap Y_2)=A\cap Y_1$上$f_1=g_1$，于是$h_1: Y_1\cup(A\cap Y_2)\to R$ 使

$$h_1(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in Y_1\\ g_1(x), & x\in A\cap Y_2\end{cases}$$

是连续的，因为Y_2是正规空间，并且$Y_1\cup(A\cap Y_2)$是Y_2的闭子空间，所以h_1可以扩张成Y_2上的实值连续函数$f_2: Y_2\to R$。这时有$f_2(A\cap Y_2)=\{0\}$且$f_2|_{Y_1}=f_1$。由数学归纳法，我们可以定义连续函数$f_n: Y_n\to R$使$f_n(A\cap Y_n)=\{0\}$且$f_n|_{Y_{n-1}}=f_{n-1}$。定义$f: X\to R$使$f|_{Y_n}=f_n$，那么$f(A)=\{0\}$且$f(a)=1$。而$a\in\overline{A}$，于是$f(\overline{A})\not\subset\overline{f(A)}$，故f不是X上的连续函数。另一方面，对于X的紧子集K，存在$n\in N$使$K\subset Y_n$，由于f在Y_n上连续，于是f在k上连续。又由于X是一个k_R－空间，所以

f是X上的连续函数，矛盾。故X关于$\{X_n: n\in N\}$具有弱拓扑。置

$$Z=\oplus\{X_n: n\in N\},$$

那么Z是k-空间。让q是从Z到X上的显然映射。由于X关于$\{x_n: n\in N\}$具有弱拓扑，q是连续的商映射，从而X是k-空间。

定理4 具有σ-遗传闭包保持的紧k-网的k_R-空间是k-空间。

证 设空间X是具有σ-遗传闭包保持的紧k-网的k_R-空间。让$\rho=\cup\{\rho_n: n\in N\}$是X的一个σ-遗传闭包保持的紧k-网，其中每一$\rho_n$是X的遗传闭包保持的紧子集族。对于$n\in N$，定义$X_n=\cup\rho_n$，那么$X_n$是X的闭子集。令$Z_n=\oplus\rho_n$，$f_n: Z_n\to X_n$是显然映射，那么$f_n$是从仿紧局部紧空间$Z_n$到$X_n$上的连续的闭映射，于是$X_n$是仿紧的k-空间。又由于ρ是X的k-网，从而对于X的非空紧子集K，存在$m\in N$使$K\subset\bigcup_{n\leqslant m}X_n$。由引理，X是k-空间。

问题1 具有点可数的紧k-网的k_R-空间是否是k-空间？

问题2 具有σ-闭包保持的紧k-网的k_R-空间是否是k-空间？

本文的第三部分构造一些与紧k-网相关的空间的反例。我们在文〔8〕和文〔9〕给出了具特定性质的紧k-网的空间的如下关系。

定理5 在k-空间类中，下述条件相互等价：

（1）X具有σ-离散的紧k-网。

（2）X具有σ-局部有限的紧k-网。

（3）X具有局部可数的紧k-网。

（4）X具有σ-局部可数的紧k-网。

（5）X具有星可数的紧k-网。

在Fréchet空间类中，上述条件还与具有点可数的紧k-网的空间相互等价。

下面的4个例子说明定理5中的一些附加条件是不可少的。

例2 在k-空间类中，点可数的紧k-网不能$\Longrightarrow$星可数的紧k-网。

证 让空间X是文〔10〕中例3所示的具有点有限的可度量k-系的仿紧空间使X^2不是k-空间。由定理2，X是具有点可数的紧k-网的k-空间。若X具有星可数的紧k-网。由定理1，X具有星可数的k-系，再由数〔10〕命题2，X^2是一个k-空间，矛盾。故X不具有星可数的紧k-网。

例3 星可数的紧k-网不能$\Longrightarrow$σ-局部可数的紧k-网。

证 让X是文〔11〕中例所示的空间，即X是一个不具有点G_δ-性质且所有紧子集为有限集的正则Lindelöf空间。这时$\{\{x\}: x\in X\}$构成了X的星可数的紧k-网。

由X的Lindelöf性，如果X具有σ-局部可数的紧k-网，那么X具有可数的紧k-网，于是X具有点G_δ -性质，矛盾。故X不具有σ-局部可数的紧k-网。

例 4 局部可数的紧k-网不能⟹σ-局部有限的紧k-网。

证 让X是文〔12〕中的例1所示的不具有σ-局部有限的k-网的正则空间。仍采用文〔12〕中的记号，则ρ是X的局部可数的紧k-网。

例 5 σ-局部有限的紧k-网不能⟹局部可数的紧k-网。

证 让$X=R\cup(R\times\{1/n: n\in N\})$，集合X赋予下述拓扑：X＼R中的点是X的孤立点，对于$x\in R$，x在X中的邻域基元形如

$$\{x\}\cup(\bigcup_{n\geqslant m}\{(a_{x,n},x)\times\{1/n\}\}),$$

其中$m\in N$且$X-1/n<a_{x,n}<x$。显然，X是T_2空间。对于$x\in R$，x在X中的任何闭邻域都不是X的Lindelöf子空间，所以X不是局部Lindelöf空间，从而X不具有局部可数的紧k-网。利用文〔13〕例1同样的方法知X的所有紧子集是有限集，而R和$R\times\{1/n\}$都是X的闭离散子空间，所以$\{\{x\}: x\in X\}$构成了X的σ-局部有限的紧k-网。

参 考 文 献

1 P.O'Meara, On paracompactness in function spaces with the compact-open topology, Proc.AMS, 29(1971), 183—189

2 A.Arhangel'skii, On quotient mappings on metric spaces, Dokl.Akad.Nauk.SSSR, 155(1964), 247—250(Russian)

3 R.Engelking, General Topology, PWN, 1977

4 G.Gruenhage, E.Michael, Y.Tanaka, Spaces determined by point-countable covers, Pacific J.Math., 113(1984), 303—332

5 J.Chaber, Generalizations of Lašnev's theorem, Fund.Math., 119(1983), 85—91

6 N.Lašnev, Closed images of metric spaces, Dokl.Akad.Nauk. SSSR, 170(1966), 505—507(Russian)

7 E.Michael, On K—spaces k_R -spaces and k(X), Pacific J.MAth., 47(1973), 487—498

8 Shou Lin, Note on k_R -spaces, Q and A in General Topology, 9(1991), 227—236

9 Y.Tanaka, Point-countable k-systems and products of k-spaces, Pacific

9 林寿，度量空间商映象的若干研究方向，烟台一般拓扑学学术研讨会，1992

J.Math., 101 (1982), 199—208

10 Shou Lin, A study of pseudobases, Q and A in General Topology, 6 (1988), 81—97

11 Shou Lin, Spaces with a locally countable k-network, 东北数学, 6 (1990), 39—44

12 Shou Lin, On normal separable aleph spaces, Q and A in General Topology, 5 (1987), 249—254.

K-networks and K-syatems

Lin Shou (Mingde Teachers' College)

Li Jinjing (Department of Mathematics)

Abstract In this paper the relationships between k-networks and k-systems in topological spaces are discussed. we study mainly a question on the mutual transformations of compact k-networks and k-systems in point countable or σ-hereditarily closure-preserving collections of subsets for a space. The main result is that a Hausdorff space X has a point countable (or σ-hereditarily closure-preserying) metrizable k-system if and only if X is a k-space with a point countable (or σ-hereditarily closure-preserving) compact k-network.

key words: k-network, k-system, point countable family, hereditarily closure-preserving family