第13卷 第6期　　吉首大学学报(自然科学)　　Vol. 13 No. 6
1992年12月　　Journal of Jishou University (Nataral Science)　　12. 1992

具有局部可数(modk)—基的空间*

林　寿
(宁德师专数学科)

[摘要]本文讨论具有局部可数(modk)—基空间的一些映射性质，其主要结果是：
(1) 局部可分度量空间的完备逆像刻划为具有局部可数(modk)—基的空间.
(2) 局部可数(modk)—基的空间的SL—映像刻划为具有局部可数(modk)—网的空间.

关键词：(modk)—基，(modk)—网，度量空间，完备映射，SL—映射.

用映射作为工具以联结各种拓扑空间类是1961年苏联数学家Alexandroff在布拉格拓扑会议上提出的空间分类原则. 熟知，度量空间的完备逆像刻划为仿紧p-空间，而仿紧p-空间的σ—局部有限映像刻划为强$\sum$—空间[1]. 作为上述重要定理的类比所产生的问题是局部可分的度量空间的完备逆像具有怎样的内在特征？本文引进具有局部可数(modk)—基的空间以完全刻划局部可分度量空间的完备逆像. 另外，我们还讨论了这类空间的一些映射性质.

本文所论空间均满足正则且T_1分离性公理，映射指连续的满函数，而N表示自然数集.

定义1　空间X的开子集族β称为x的(modk)—基[2]，如果存在由x的某些非空紧子集组成的x的覆盖κ满足：对于$k\in\kappa$及$K\subset U$，其中的U是x的开子集，存在$B\in\beta$使$K\subset\beta$，使$K\subset B\subset U$. 我们也称β是关于κ的(modk)—基，为了叙述的简洁起见，对于空间x，κ表示由x的某些非空紧子集组成的x的覆盖.

空间X称为局部Lindelof空间，如果对于$x\in X$，存在点x在X中的开邻域V使$\overline{V}$是X的Lindelof子空间.

映射$f:X\to Y$称为完备映射[3]，如果f是闭映射，并且对于$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的紧子集，度量空间的完备逆像称为(modk)—可度量空间[2].

引理1[2]　空间X是(modk)—可度量空间当且仅当X具有σ—局部有限的(modk)—基.

引理2[4]　具有可数(modk)—基的空间是Lindelof空间.

定理1　下列条件相互等价：

(1)　X是局部可分度量空间的完备逆像.

(2)　X具有局部可数的(modk)—基.

(3)　X是局部Lindelof的(modk)—可度量空间.

证　(1)⇒(2)设空间X是局部可分度量空间的完备逆像，那么存在局部可分的度量空间Y和完备映射$f:X\to Y$. 由引理1，X具有σ—局部有限的(modk)—基. 对于$x\in X$，存在Y的开子集V使$f(x)\in V$且$\overline{V}$是Y的Lindelof子空间，由[3]定理3.8.8，$f^{-1}(V)$是X的Lindelof

* 国家自然科学基金资助项目

子空间，于是 $f^{-1}(V)$ 也是 X 的 Lindelof 子空间. 易验证，Lindelof 空间的 σ—局部有限集族是可数族. 设 β 是空间 X 的 σ-局部有限的(modk)—基，于是 $\{B\in\beta:B\cap f^{-1}(V)\neq\varphi\}$ 是可数的，而 $f^{-1}(V)$ 是点 x 在 X 中的开邻域，所以 β 是 X 的局部可数的(modk)—基.

(2)⇒(3) 设空间 X 具有局部可数的(modk)—基. 由引理 2，X 是局部 Lindelof 空间，下证 X 是(modk)—可度量空间. 设 β 是 X 的关于 κ 的局部可数的(modk)—基. 记 $\kappa=\{K_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，对于 $\alpha\in\Lambda$，由 K_α 的紧性及 β 的局部可数性，存在 X 的开子集 G_α 使 $K_\alpha\subset G_\alpha$ 且 $\{B\in\beta:B\cap G_\alpha\neq\varphi\}$ 是可数的. 又由于 β 是 X 的(modk)—基，存在 $B_\alpha\in\beta$ 使 $K_\alpha\subset B_\alpha\subset G_\alpha$. 让 $\upsilon=\{B_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，那么 υ 是 X 的星可数覆盖. 由文[5]引理 3.10，υ 有分解 $\{\upsilon_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 使每一 υ_β 是可数集族且 $(\bigcup\upsilon_\beta)\cap(\bigcup\upsilon_{\beta'})\neq\varphi$ 当且仅当 $\beta=\beta'$. 置 $\upsilon_\beta=\{B(\beta,m):m\in N\}$，

$$\{B\in\beta:B\cap B(\beta,m)\neq\varphi\}=\{B(\beta,m,n):n\in N\},$$
$$U(\beta,m,n)=B(\beta,m)\cap B(\beta,m,n),$$
$$\mu=\{U(\beta,m,n):\beta\in\Gamma,m,n\in N\}$$

那么 μ 是 X 的 σ-局部有限(modk)—基. 事实上，对于 $\alpha\in\Lambda$ 及 X 的开子集 $H\supset K_\alpha$，存在 $\beta_0\in\Gamma$，$m_0\in N$ 和 $B\in\beta$ 使 $B_\alpha=B(\beta_0,m_0)$，$K_\alpha\subset B\subset H$，那么 $B(\beta_0,m_0)\cap B\neq\varphi$，于是存在 $n_0\in N$ 使 $B=B(\beta_0,m_0,n_0)$，从而

$$U(\beta_0,m_0,n_0)\in\mu,\text{且 } K_\alpha\subset U(\beta_0,m_0,n_0)\subset H,$$

因此，μ 是 X 的关于 κ 的(modk)—基. 对于固定的 $m_0,n_0\in N$，给定 $x\in X$，存在唯一的 $\beta_0\in\Gamma$ 使 $x\in\bigcup\upsilon_{\beta_0}$，这时 $\bigcup\upsilon_{\beta_0}$ 是点 x 在 X 中的开邻域且它仅交 $\{U(\beta,m_0,n_0):\beta\in\Gamma\}$ 中的一个元 $U(\beta_0,m_0,n_0)$，从而 μ 是 X 的 σ-局部有限的开子集族. 故 X 具有 σ—局部有限的(modk)—基. 所以 X 是局部 Lindelof 的(modk)—可度量空间.

(3)⇒(1) 设空间 X 是局部 Lindelof 的(modk)—可度量空间. 由引理 1，存在度量空间 Y 和完备映射 $f:X\to Y$. 易验证完备映射保持局部 Lindelof 性质，从而 Y 是局部 Lindelof 的度量空间. 故 Y 是局部可分的度量空间，因而 X 是局部可分度量空间的完备逆像.

推论 1 设 $f:X\to Y$ 是完备映射，那么空间 X 具有局部可数的(modk)—基.

证：设空间 X 具有局部可数(modk)—基。当且仅当空间 Y 具有局部可数的(modk)—基。由定理 1，X 是局部 Lindelof 的(modk)—可度量空间，因为完备映射保持(modk)—可度量空间[6]和局部 Lindelof 空间，所以 Y 也是局部 Lindelof(modk)—可度量空间，因而 Y 具有局部可数(modk)—基。。若空间 Y 具有局部可数(modk)—基，由定理 1，存在局部可分的度量空间 Z 和完备映射 $g:Y\to Z$，那么 $f\circ g:X\to Z$ 是完备映射，故 X 具有局部可数的(modk)—基.

推论 2 设 $f:X\to Y$ 是既开且闭的映射。若空间 X 具有局部可数(modk)—基，那么空间 Y 也具有局部可数(modk)—基.

证 由于既开且闭的映射保持局部 Lindelof 空间和(modk)—可度量空间[7]，所以既开且闭的映射保持具有局部可数的(modk)—基的空间.

本文的后一部分讨论具有局部可数(modk)—基空间的映像特征.

定义 2 空间 X 的子集族 R 称为 X 的(modk)—网[2]，如果存在由 X 的某些非空的紧子集组成的 X 的覆盖 κ 使对于 $K\in\kappa$ 及 $K\subset U$，其中 U 是 X 的开子集，有 $P\in R$ 使 $K\subset P\subset U$.

对于空间 X，X 的子集族 R 称为 X 的某一子集 K 的外网，如果 $K\subset\bigcap R$，并且若 $K\subset U$，其中 U 是 X 的开子集，那么存在 $P\in R$ 使 $P\subset U$.

映射：$f:X\to Y$ 称为强 Lindelof 映射，如果对于 $y\in Y$，存在点 y 在 Y 中的开邻域 V 使 $f^{-1}(V)$ 是 X 的 Lindelof 子空间．强 Lindelof 映射简记为 SL－映射．

引理 3　设空间 X 具有局部可数的(modk)－网，那么 X 有关的 κ 的(modk)－网 R 满足：

(a)　R 是 X 的关于有限交封闭的局部可数的闭子集族．

(b)　对于 $x\in P\in R$，存在 $K\in\kappa$ 使 $x\in K\subset P$．

证　设 Q 是空间 X 的关于 κ' 的局部可数的(modk)－网，其中 κ 是由 X 的某些非空紧子集组成的 X 的覆盖．置

$$M' = \{\bar{H}: H \in M\},$$

$$R = \{\bigcap R': R' \text{ 是 } Q \text{ 的有限子集族}\}$$

因为 X 是正则空间，R 仍是 X 的关于 κ' 的(modk)－网，并且 R 满足结论(a)．对于 $x\in X$，存在 $k'(x)\in\kappa'$，使 $x\in k'(x)$，记

$$K(x) = k'(x) \cap (\bigcap \{P \in R: x \in P\}),$$

$$\kappa = \{K(x): x \in X\}$$

那么 κ 是由 X 的某些紧子集组成的 X 的覆盖，并且 R 及 κ 满足结论(b)，下面证明 R 是 X 的在于 κ 的(modk)－网，对于 $x\in X$ 及 $K(x)\subset U$，其中 U 是 X 的开子集，置

$$\{P \in R: x \in P\} = \{P_n: n \in N\}$$

$$G_n = \bigcap \{P_i: i \leqslant n\}, n \in N$$

那么 $G_n\in R$ 且 $K(x)=k'(x)\cap(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$．再置

$$L = \kappa'(x)\setminus U$$

那么 L 是 X 的紧子集且 $L\cap k(x)=\varphi$，于是

$$L \subset X\setminus K(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X\setminus G_n \cap K'(x)),$$

故存在 $n\in N$ 使 $L\subset(X\setminus G_n\cap K'(x))$，从而 $K'(x)\subset U\cup(X\setminus G_n\cap K'(x))$，因此 $K'(x)\subset U\cup(X\setminus G_n)$，所以存在 $m\in N$ 使 $P_m\subset U\cup(X\setminus G_n)$，选取 $j\geqslant max\{m,n\}$，那么 $G_j\subset U\cup(X\setminus G_n)$ 并且 $G_j\cap(X\setminus G_n)=\varphi$，因而 $K(x)\subset G_j\subset U$．即 R 是关于 κ 的(modk)－网．

定理 2　空间 Y 是具有局部可数的(modk)－基空间的 sL-映像当且仅当 Y 具有局部可数的(modk)－网．

证　易验证，sL-映射保持局部可数集族，连续函数保持(modk)－网，以及(modk)－基是(modk)－网，所以局部可数(modk)－基空间的 sL-映像具有局部可数的(modk)－网．

反之，设 R 是空间 Y 的关于 κ 的局部可数的(modk)－网，并且设 R 及 κ 满足引理 3 的结论(a)、(b)，记 $R=\{P_\alpha:\alpha\in\wedge\}$，对于 $i\in N$，让 $\wedge_i$ 是集合 $\wedge$ 赋予离散拓扑．置

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} \wedge_i: \{P_{\alpha_i}\}_{i\in N}$$

是某个 $K_\alpha\in\kappa$ 的外网且对于 $i\in N$ 有 $P_{\alpha_{i+1}}\subset P_{\alpha_i}\}$，

并且赋予 M 离散空间族$\{\wedge_i: i\in N\}$的 Tychonoff 积拓扑所诱导的子空间拓扑，那么 M 是一个度量空间，由于 X 是 T_1 空间，对于 $\alpha\in M$，K_α 是唯一确定的．置

$$X = \{(y,\alpha) \in Y \times M: y \in K_\alpha\}$$

并且让 f，g 分别是从 $Y\times M$ 到 Y 和 M 上的投影映射在 X 上的限制．对于 $n\in N$ 及$(\beta_1,\beta_2,\cdots,$

$\beta_n) \in \prod_{i=1}^{n} \wedge_i$，置

$$B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = \{\alpha \in M: 对于 i \leqslant n 有 \alpha_i = \beta_i\}$$

$$\beta = \{B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n): n \in N, \beta_n \in \wedge_n 且 P_{\beta_1} \supset \cdots \supset P_{\beta_n}\},$$

那么 β 是度量空间 M 的基．定理的证明分下面三步完成．

(1) 对于 $B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) \in \beta$ 有 $fg^{-1}(B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\} = P_{\beta_n}$。

事实上，如果 $\alpha \in B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，那么 $fg^{-1}(\alpha) \subset P_{\alpha_n} = P_{\beta_n}$，于是 $fg^{-1}(B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)) \subset P_{\beta_n}$．另一方面，如果 $y \in P_{\beta_n}$，由引理 3 的结论(b)，存在 $k \in h$ 使 $y \in K \subset P_{\beta_n}$．记

$$\{P \in R: K \subset P\} = \{P_{\alpha_i}: i \in N\}$$

由引理 3 的结论(a)及 $K \subset P_{\beta_i}$ $(i \leqslant n)$，不妨设当 $i \leqslant n$ 时 $\alpha_i = \beta_i$ 且当 $i \in N$ 时 $P_{\alpha_{i+1}} \subset P_{\alpha_i}$．让 $\alpha = (\alpha_i)$，那么 $\alpha \in B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 且 $y \in K = fg^{-1}(\alpha)$．故 $P_{\beta_n} \subset fg^{-1}(B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n))$．因而 $fg^{-1}(B(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)) = P_{\beta_n}$．

由(1) 知 $R = \{fg^{-1}(B): B \in \beta\}$．

(2) g 是完备的映射．

对于 $\alpha \in M$，$g^{-1}(\alpha) = K_\alpha \times \{\alpha\}$ 是 X 的紧子集，另一方面，设 $\alpha \in M$ 且 U 是 $g^{-1}(\alpha)$ 在 X 中的开邻域，由于 $g^{-1}(\alpha) = K \times \{\alpha\}$，并且 $\{B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n): n \in N\}$ 是点 α 在 M 中的局部基，所以存在 $m \in N$ 及 Y 中的开子集 $W \supset K_\alpha$ 使

$$(W \times B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)) \cap X \subset U,$$

这时，存在 $n \geqslant m$ 使 $K_\alpha \subset P_{\alpha_n} \subset W$，置

$$V = B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),$$

那么 V 是 α 在 M 中的开邻域，并且由(1)得

$$g^{-1}(V) \subset (P_{\alpha_n} \times V) \cap X \subset (W \times B(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m) \cap X \subset U$$

由[3]定理 1.4.13，g 是闭映射．所以 g 是完备映射．

(3) f 是 SL-映射．

对于 $y \in Y$，由 R 的局部可数性，存在点 y 在 Y 中的开邻域 V 使 $\{P \in R: P \cap \overline{V} \neq \varphi\}$ 是可数的．由于 $R = \{fg^{-1}(B): B \in \beta\}$，$\{B \in \beta: g^{-1}(B) \cap f^{-1}(\overline{V}) \neq \varphi\}$ 是可数的，因为 β 是 M 的基且 g 是完备映身射，易验证，$\{g^{-1}(B) \cap f^{-1}(\overline{V}): B \in \beta\}$ 是 X 的子空间 $f^{-1}(\overline{V})$ 的关于 $\{g^{-1}(\alpha): \alpha \in gf^{-1}(\overline{V})\}$ 的可数的(modk)一基，由引理 2，$f^{-1}(\overline{V})$ 是 X 的 Lindelof 子空间，于是 $f^{-1}(\overline{V})$ 是 X 的 Lindelof 子空间．故 f 是 SL-映射．

由(2)知 X 是(modk)一可度量空间，由(3)知 X 是局部 Lindelof 空间，再由定理 1，X 具有局部可数的(modk)一基，综上所述，Y 是具有局部可数(modk)一基空间的 SL-映像．

推论 3 空间 Y 是具有可数的(modk)一基空间的连续像当且仅当 Y 具有可数的(modk)一网．

证 必要性是显然的(见定理 2 的证明)．至于充分性，设空间 Y 具有可数(modk)一网，由

定理 2,存在具有局部可数的(modk)—基的空间 X 和 SL-映射 $f:X\to Y$. 因为具有可数(modk)—网的空间是 Lindelof 空间[4],所以 Y 是 Lindelof 空间,而 f 是 SL-映射,于是 X 也是 Lindelof 空间,从而 X 的局部可数(modk)—基也是 X 的可数(modk)—基,故 Y 是具有可数(modk)—基空间的连续像.

对照定理 1. 值得一提的是具有局部可数(modk)—网的空间未必具有 σ—局部有限(modk)—网. 让 ω_1 是所有可数序数的集合并且赋予序拓扑. 由于 ω_1 自身是局部可数空间,所以 ω_1 具有局部可数的(modk)—网. 然而 ω_1 不具有 σ—局部有限的(modk)—网,因为具有这种性质的可数紧空间是紧空间[5].

参考文献

[1] E. Michael, σ—locally finite maps, Proc. AMS, 65(1977),159—165.

[2] E. Michael, On Nagemi's $\sum$ — spaces and some related matters, Proc. Washington State Univ. Top Conf. ,(1970),13—19.

[3] R. Engelking, General Topology, Warszawa:PWN, 1977.

[4] Y. Tanada, Y. Yajima, Decompositions for closed maps, Topology Proc. , 10 (1985),399—411.

[5] D. Burke, Covering porperties, Handbook of Set—Theoretic Topology, (1984), 347—422.

[6] V. V. Filippov, On the perfect image of a paracompact p—space, Soviet Math. Dokl. , 8(1976),1151—1153.

[7] K. Morita, Completion of hyperspaces of compact subsets and topological completion of open—closed maps, Gen. Top. Appl. , 4(1974),217—234.

SPACES WITH LOCALLY COUNTABLE(MODK)—BESES

Lin Shou

(Ningde Teacher's College,)

ABSTRACT

In this paper some mapping properties of spaces with locally countable (modk)—bases are discussed. The main results are

(1) The perfect pre—images of locally separable metric spaces can be characterized spaces with locally cocally countable (modk)—bases.

(2)The sL—images of spaces with locally countable (modk)—bases can be characterized spaces with locally countable(modk)—nets.

Keywords:(modk)—base,(modk)—net,metric space perfect mapping,sL—mapping.