数学年刊
13A: 3 (1992), 403—409.

关于 g-可度量空间*

林　寿
(宁德师范专科学校，福建，宁德 352100)

提　要

本文研究 g-可度量空间的刻划和映射性质.

本文所论空间均指满足正则且 T_1 分离性公理的拓扑空间.

具有 σ-局部有限弱基的空间称为 g-可度量空间，它是度量空间的一种重要推广，并且保持了度量空间的许多基本性质. 我们知道可度量空间与具有 σ-遗传闭包保持基的空间相互等价[1]，这意味着在一定条件下一个空间的 σ-遗传闭包保持集族可转化为 σ-局部有限集族. 因而我们感兴趣于在什么条件下具有 σ-遗传闭包保持弱基的空间是 g-度量空间. 另一方面，Foged[2] 証明了 g-可度量空间与具有 σ-局部有限 k-网的 g-第一可数空间等价，很自然的问题是具有 σ-遗传闭包保持 k-网的 g-第一可数空间是否是一个 g-可度量空间?

为了讨论上述问题，先研究 k-空间类中具有 σ-局部有限 k-网的空间的刻划 .

§1. $\aleph$-空间的刻划

定义 1.1　空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k-网，如果对于 X 的紧子集 K 和 K 的开邻域 U，存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{P}'\subset U$. 具有 σ-局部有限 k-网的空间称为 $\aleph$-空间.

定义 1.2　设 $\mathscr{W}$ 是 X 的子集族. X 称为关于子集族 $\mathscr{W}$ 具有弱拓扑，如果 $F\subset X$ 是 X 的闭子集当且仅当对于 $W\in\mathscr{W}$，$F\cap W$ 是 W 的闭子集. 若 X 关于其全体紧子集组成的族具有弱拓扑，则称 X 是一个 k-空间；若 X 关于其全体紧度量子空间组成的族具有弱拓扑，则称 X 是一个序列空间

定义 1.3　S_{ω_1} 表示从 ω_1 个非平凡收敛序列作互不相交的拓扑和由粘合所有的极限点得到的商空间.

遗传闭包保持集族简记为 HCP 集族.

引理 1.1[3]　若 $\mathscr{P}$ 是 X 的 HCP 集族，则 $\{\overline{P}: P\in\mathscr{P}\}$ 也是 X 的 HCP 集族.

对于 X 的子集族 $\mathscr{P}$，置

$$D(\mathscr{P})=\{x\in X:\ \mathscr{P}\text{ 在 } x \text{ 不是点有限的}\},$$

本文1989年5月15日收到.
* 福建省教委科学基金资助的项目，国家自然科学基金资助的课题.

$$\mathscr{F}(\mathscr{P})=\{\overline{P\backslash D(\mathscr{P})}: P\in\mathscr{P}\}\cup\{\{x\}: x\in D(\mathscr{P})\}.$$

引理 1.2 设 $\mathscr{P}$ 是 k-空间 X 的 HCP 集族，则 $D(\mathscr{P})$ 是 X 的闭离散子空间.

证 因为 X 是 k-空间，只须证明对于 X 的任何紧子集 K，$K\cap D(\mathscr{P})$ 是有限集. 若不然，则存在无限子集 $\{a_n: n<\omega\}\subset K\cap D(\mathscr{P})$. 由 $D(\mathscr{P})$ 的定义可归纳地选取 $\mathscr{P}$ 的子族 $\{P_n: n<\omega\}$ 使 $a_n\in P_n$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 X 的 HCP 集族，所以 $\{a_n: n<\omega\}$ 是紧子集 K 的闭离散子集，矛盾.

引理 1.3 设 $\mathscr{P}$ 是序列空间 X 的 HCP 闭集族. 如果 X 的任何闭子空间不同胚于 S_{ω_1}，则 $\mathscr{F}(\mathscr{P})$ 是 X 的点可数族.

证 若 $\mathscr{F}(\mathscr{P})$ 不是 X 的点可数族，则存在 $\mathscr{P}$ 的不可数子族 $\mathscr{P}'$ 和 $x\in X$ 使 $x\in\cap\{\overline{P\backslash D(\mathscr{P})}: P\in\mathscr{P}'\}$. 而 $\mathscr{P}$ 是 X 的闭集族，于是 $x\in\cap\mathscr{P}'$，因此 $x\in D(\mathscr{P})$. 我们断言对于 $P\in\mathscr{P}'$，存在 $P\backslash D(\mathscr{P})$ 中互不相同点组成的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 事实上，因为 $x\in D(\mathscr{P})$，所以 $x\in\overline{P\backslash\{x\}}$，于是 $P\backslash\{x\}$ 不是 X 的闭子集. 由于 X 是一个序列空间，存在 X 的紧度量化子空间 K 使 $(P\backslash\{x\})\cap K$ 不是 K 的闭子集，而 $P\cap K$ 是 K 的闭子集，于是 $x\in K$，从而 $(P\backslash\{x\})\cap K=P\cap K\backslash\{x\}$ 且 $x\in cl_K(P\cap K\backslash\{x\})\subset K$. 又由于 K 是度量空间，所以存在由 $P\cap K\backslash\{x\}$ 中互不相同点组成的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 x. 因为 $D(\mathscr{P})$ 是 X 的闭离散子空间(引理 1.2)，而紧空间的闭离散子集是有限集，所以 $(\{x\}\cup\{y_n: n<\omega\})\cap D(\mathscr{P})$ 是有限集. 置 $\{y_n: n<\omega\}\backslash D(\mathscr{P})=\{x_n: n<\omega\}$，那么 $\{x_n\}$ 是 $P\backslash D(\mathscr{P})$ 中互不相同点组成的序列且收敛于 x.

现在，对于每个 $P\in\mathscr{P}'$，存在由 $P\backslash D(\mathscr{P})$ 中的互不相同点组成的序列 $\{x(P, n)\}$ 收敛于 x. 由于 $x(P, n)\notin D(\mathscr{P})$，$\mathscr{P}'$ 在点 $x(P, n)$ 是点有限的 故对 $\mathscr{P}'$ 的任何可数子族 $\mathscr{P}''$，

$$\mathscr{P}'\backslash\{Q\in\mathscr{P}': x(P, n)\in Q,\ P\in\mathscr{P}'',\ n<\omega\}$$

仍是不可数子族. 由超限归纳可选取 $\mathscr{P}'$ 的子族 $\{P_\alpha: \alpha<\omega_1\}$ 使当 $\alpha\neq\beta$ 时，$x(P_\alpha, n)\neq x(P_\beta, m)$. 置

$$Y=\{x\}\cup\{x(P_\alpha, n): \alpha<\omega_1,\ n<\omega\}.$$

由于 $\{x\}\cup\{x(P_\alpha, n): n<\omega\}\subset P_\alpha$，并且 $\mathscr{P}$ 是 X 的 HCP 集族，所以 Y 是 X 的闭子空间. 显然，Y 同胚于 S_{ω_1}，矛盾. 故 $\mathscr{F}(\mathscr{P})$ 是 X 的点可数族.

定理 1.1 设 X 是一个 k-空间. X 是一个 $\aleph$ 空间当且仅当 X 具有 σ-HCP k-网且 X 的任何闭子空间不同胚于 S_{ω_1}.

证 由于 S_{ω_1} 不是一个 $\aleph$-空间[4, 例 9.2]，必要性是显然的. 设 X 是一个具有 σ-HCP k-网的 k-空间且 X 的任何闭子空间不同胚于 S_{ω_1}. 这时 X 是一个 σ-空间，于是 X 是一个具有点 G_δ-性质的 k-空间，从而 X 是一个序列空间[5]. 由引理 1.1，X 具有 σ-HCP 闭 k-网，让 $\mathscr{P}=\cup\{\mathscr{P}_n: n<\omega\}$ 是 X 的一个 σ-HCP 闭 k-网，其中 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的 HCP 闭集族. 不妨认为 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 置

$$\mathscr{F}=\cup\{\mathscr{F}(\mathscr{P}_n): n<\omega\}.$$

对于 X 的紧子集 K 和 K 的开邻域 U，存在 $n<\omega$ 和 $\mathscr{P}_n$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $K\subset\cup\mathscr{P}'\subset U$. 置

$$\mathscr{F}'=\{\overline{P\backslash D(\mathscr{P}_n)}: P\in\mathscr{P}'\}\cup\{\{x\}: x\in K\cap D(\mathscr{P}_n)\}.$$

由引理 1.2, $D(\mathscr{P}_n)$ 是 X 的闭离散子空间，所以 $K\cap D(\mathscr{P}_n)$ 是有限集，于是 $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的有限子族且 $K\subset\bigcup\mathscr{F}'\subset U$. 再由引理 1.2 和引理 1.3 知 $\mathscr{F}$ 是 X 的 σ-闭包保持且点可数闭 k-网，从而 X 是一个 $\aleph$-空间 [6, 定理 2.2 的证明].

作为上述定理的一个直接应用我们考虑乘积空间的 k-性质. 众所周知，k-空间的性质不是有限可积的，于是在适当的空间类中寻求使积空间是 k-空间的条件是拓扑学研究的课题之一. Y. Tanaka[7] 证明了对于 $\aleph$-空间 X, X^2 是 k-空间当且仅当 X 具有下列性质(P).

(P) X 是一个度量空间或者 X 关于局部紧的可数闭覆盖具有弱拓扑. G. Gruenhage 和 Y. Tanaka[8] 还证明了对于仿紧 $\aleph$-空间的闭象使 X^2 是 k-空间的上述充要条件仍然成立. 此外，存在一个 M_1-空间(因而，一个具有 σ-闭包保持 k-网的空间) X 使 X^2 是一个 k-空间，但是 X 却不具有性质 P[9, 例 4.8]. $\aleph$-空间或者仿紧 $\aleph$-空间的闭象均具有 σ-HCP k-网，并且相反的蕴函关系都不成立.

推论 1.1　设 X 具有 σ-HCP k-网. X^2 是一个 k-空间当且仅当 X 具有性质 P.

证　由于 $S^2_{\omega_1}$ 不是一个 k-空间[10, 引理 5]，若 X^2 是一个 k-空间，则 X 是一个 $\aleph$-空间(定理 1.1)，因而 X 具有性质 P[7, 定理 3.1]. 充分性见 [7, 引理 2.5]

§2.　g-可度量空间的刻划

定义 2.1　空间 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的弱基，如果对于每一 $x\in X$，存在 $\mathscr{B}_x\subset\mathscr{B}$ 使 (1) $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_x: x\in X\}$; (2) $x\in\bigcap\mathscr{B}_x$; (3) 若 U、$V\in\mathscr{B}_x$，则存在 $W\in\mathscr{B}_x$ 使 $W\subset U\cap V$; (4) X 的子集 G 是 X 的开子集当且仅当对于每一 $x\in G$，存在 $B\in\mathscr{B}_x$ 使 $B\subset G$.

定义 2.2　在定义 2.1 中，如果每一 $\mathscr{B}_x$ 是可数的，称 X 是 g-第一可数空间；如果 $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ-局部有限子集族，称 X 是 g-可度量空间.

定义 2.3　空间 X 称为 Fréchet 空间，如果对于 X 的任一子集 A 及 $x\in\overline{A\setminus\{x\}}$，存在 $A\setminus\{x\}$ 中的点组成的序列收敛于 x.

显然，有下列关系成立[11].

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{度量空间} & \longrightarrow & \text{第一可数空间} & \longrightarrow & \text{Fréchet 空间} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
g\text{-可度量空间} & \longrightarrow & g\text{-第一可数空间} & \longrightarrow & \text{序列空间} & \longrightarrow & k\text{-空间}
\end{array}$$

引理 2.1　若 X 是一个 Fréchet 空间，$\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_x: x\in X\}$ 是 X 的弱基，那么对于 $B\in\mathscr{B}_x$, $x\in B^0$.

证　若 $x\in X\setminus B^0=\overline{X\setminus B}$，那么存在由 $X\setminus B$ 中的点组成的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 让 $Z=\{x_n: n<\omega\}$，那么 Z 不是 X 的闭子集. 另一方面，对于 $y\in X\setminus Z$，若 $y=x$，则 $B\subset X\setminus Z$；若 $y\neq x$，则 $y\in X\setminus\bar{Z}$，于是存在 $G\in\mathscr{B}_y$ 使 $G\subset X\setminus\bar{Z}\subset X\setminus Z$；因为 $\mathscr{B}$ 是 X 的弱基，所以 Z 是 X 的闭子集，矛盾. 因而 $x\in B^0$.

推论 2.1[11]　X 是第一可数空间当且仅当 X 是 g-第一可数的 Fréchet 空间.

定理 2.1　下列条件相互等价:

(1) X 是 g-可度量空间.

(2) X 是具有 σ-HCP 弱基的 k-空间.

(3) X 是具有 σ-HCP k-网的 g-第一可数空间.

证 (1)⇒(2)是显然的. (2)⇒(3)设 X 是一个具有 σ-HCP 弱基的 k-空间. 这时 X 是一个 σ-空间, 于是 X 具有点 G_δ-性质, 从而 X 的弱基也是 X 的 k-网[2, 引理2.1], 故 X 具有 σ-HCP k-网. 下面我们证明 X 是 g-第一可数空间. 让 $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_{n,x}: n<\omega, x\in X\}$ 是 X 的一个 σ-HCP 弱基, 其中 $\bigcup\{\mathscr{B}_{n,x}: n<\omega\}$ 是点 x 的弱基, $\bigcup\{\mathscr{B}_{n,x}: x\in X\}$ 是 X 的 HCP 集族. 对于 $n<\omega$, $x\in X$, 不妨设 $\mathscr{B}_{n,x}\subset\mathscr{B}_{n+1,x}$. 置

$$H_{n,x}=\bigcap\mathscr{B}_{n,x},$$
$$\mathscr{H}_x=\{H_{n,x}: n<\omega\},$$
$$\mathscr{H}=\bigcup\{\mathscr{H}_x: x\in X\}.$$

我们断言每一 $\mathscr{H}_x$ 是点 x 的弱基. 事实上, $\mathscr{H}_x$ 显然满足定义 2.1 中的条件(1)—(3). 若 G 是 X 的开子集, 那么任给 $x\in G$, 存在 $n<\omega$ 和 $B\in\mathscr{B}_{n,x}$ 使 $B\subset G$, 于是 $H_{n,x}\subset G$. 若 G 是 X 的子集满足任给 $x\in G$, 存在 $n<\omega$ 使 $H_{n,x}\subset G$, 我们要证明 G 是 X 的开子集. 由于 X 是一个 k-空间, 只须证明对于 X 的任一紧子集 K, $K\cap G$ 是 K 的开子集. 任给 $x\in K\cap G$, 存在 $n<\omega$ 使 $H_{n,x}\subset G$, 从而 $K\cap H_{n,x}\subset K\cap G$. 因为 K 是 X 的闭子集, 所以 $\bigcup\{K\cap B: B\in\mathscr{B}_{m,x}, m<\omega\}$ 是 x 在 K 中的弱基. 又因为 X 是一个 σ-空间, 所以 X 的紧子集 K 是 X 的度量子空间, 由引理 2.1, 对于 $B\in\mathscr{B}_{n,x}$, $x\in(K\cap B)^0_K$. 置

$$\mathscr{C}=\{(K\cap B)^0_K: B\in\mathscr{B}_{n,x}\}.$$

由于 $\mathscr{B}_{n,x}$ 是 X 的 HCP 集族, 于是 $\mathscr{C}$ 是 K 的遗传闭包保持开子集族, 而 K 是一个 k-空间, 所以 $\bigcap\mathscr{C}$ 是 K 的开子集[1, 命题7], 并且 $x\in\bigcap\mathscr{C}\subset K\cap H_{n,x}\subset K\cap G$, 从而 $K\cap G$ 是 K 中一些开子集之并, 因此 $K\cap G$ 是 K 的开子集. 故 $\mathscr{H}_x$ 是 x 的弱基, 因而 X 是 g-第一可数空间.

(3)⇒(1) 设 X 是具有 σ-HCP k-网的 g-第一可数空间. 由于 g-可度量空间与 g-第一可数的 $\aleph$-空间等价[2, 定理2.4], 只须证明 X 是一个 $\aleph$-空间. 若 X 不是一个 $\aleph$-空间, 由定理 1.1, X 具有一个闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 因为 X 是 g-第一可数空间, 于是 S_{ω_1} 是 g-第一可数空间. 由推论 2.1, S_{ω_1} 是第一可数空间, 矛盾.

§3. g-可度量空间的映射性质

本节中的映射均指连续满映射.

引理 3.1 设 f 是从具有点 G_δ-性质的空间 X 到 Y 上的闭映射. 若 K 是 Y 的紧度量子空间, H 是 K 的无限子集, 则存在 X 的紧子集 L 使 $f^{-1}(K)\supset L$ 且 $f(L)\cap H$ 是无限的.

证 因为 H 是 K 的无限子集, 可选取 H 的可数无限子集 $A=\{y_n: n<\omega\}$ 使序列 $\{y_n\}$ 收敛于不属于 A 的点 y. 对于 $m<\omega$, 置

$$X_m=\bigcup\{f^{-1}(y_n): m<n<\omega\},$$

则对于任意的 $x_m\in X_m$, 序列 $\{x_m\}$ 的任何子序列在 $f^{-1}(y)$ 中有聚点. 事实上, 设 $\{p_i\}$ 是 $\{x_m\}$ 的一个子序列, 对于 $j<\omega$, 置

$$S_j=\{p_i: i\geqslant j\},$$

则每一 $f(S_j)$ 含有 $\{y_n: n<\omega\}$ 的一个子序列，而该子序列收敛于 y，故

$$y\in\overline{f(S_j)}=f(\overline{S_j}),$$

从而 $f^{-1}(y)\cap\overline{S_j}\neq\phi$，即 $f^{-1}(y)\cap(\cap\{\overline{S_j}: j<\omega\})\neq\phi$，故序列 $\{p_i\}$ 在 $f^{-1}(y)$ 中有聚点．因此序列 $\{x_m\}$ 的任何子列在 $f^{-1}(y)$ 中均有聚点．

现在，让 x 是序列 $\{x_m\}$ 在 $f^{-1}(y)$ 中的一个聚点．由于 X 的正则性和点 G_δ-性质，存在 x 的下降的闭邻域列 $\{V_m\}$ 使 $\{x\}=\cap\{V_m: m<\omega\}$．对于 $m<\omega$，因为

$$x\in\overline{\{x_n: n\geqslant m\}}\subset\overline{X_m},$$

所以 $V_m\cap X_m\neq\phi$，取 $z_m\in V_m\cap X_m$，我们断言序列 $\{z_m\}$ 收敛于 x．事实上，对于 $x'\neq x$，则有 $n<\omega$ 使 $x'\notin V_n$，于是 $X\setminus V_n$ 是点 x' 的开邻域，而当 $m\geqslant n$ 时，$z_m\in V_n$，从而 x' 不是 $\{z_m\}$ 的任何子序列的聚点．又由于 $\{z_m\}$ 的任何子序列在 $f^{-1}(y)$ 中有聚点，故 x 是 $\{z_m\}$ 的任何子序列的唯一聚点，因此 $\{z_m\}$ 收敛于 x．让 $L=\{x\}\cup\{z_m: m<\omega\}$，则 L 是 X 的紧子集，$L\subset f^{-1}(K)$．如果 $f(L)\cap H$ 是有限集，则 $f(L)\cap A$ 也是一个有限集，所以存在 $n<\omega$ 使 $\{z_m: m<\omega\}$ 含于 X 的闭子集 $\cup\{f^{-1}(y_i): i\leqslant n\}$ 中，从而 $x\in\cup\{f^{-1}(y_i): i\leqslant n\}$，于是 $y=y_i$ 对于某个 $i\leqslant n$ 成立，矛盾．因此 $f(L)\cap H$ 是 Y 的无限子集．

引理 3.2 闭映射保持具有 σ-HCP k-网的空间．

证 设 f 是从具有 σ-HCP k-网的空间 X 到 Y 上的闭映射．由引理 1.1，X 具有 σ-遗传闭包保持闭 k-网，设 $\mathscr{P}=\cup\{\mathscr{P}_n: n<\omega$ 是 X 的 k-网，其中每一 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的 HCP 闭集族且 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$．置

$$\mathscr{R}_n=\{f(P): P\in\mathscr{P}_n\}$$
$$\mathscr{R}=\cup\{\mathscr{R}_n: n<\omega\}.$$

因为 f 是闭映射，$\mathscr{R}$ 是 Y 的 σ-HCP 闭集族．若 K 是 Y 的紧子集且 U 是 K 在 Y 中的开邻域，对于 $n<\omega$，置

$$\mathscr{F}_n=\{R\in\mathscr{R}_n: R\subset U\},$$
$$F_n=\cup\mathscr{F}_n,$$

那么 $K\subset U=\cup\{F_n: n<\omega\}$．如果对于 $n<\omega$，$K\not\subset F_n$，则存在 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 使 $y_n\in K\setminus F_n$．置 $H=\{y_n: n<\omega\}$，那么 H 是 K 的无限子集．因为 X 是一个 σ-空间，于是 X 具有点 G_δ-性质．又因为闭映射保持 σ-空间性质不变，所以 Y 也是一个 σ-空间，从而 Y 的紧子集 K 是可度量化子空间．由引理 3.1，存在 X 的紧子集 L 使 $L\subset f^{-1}(K)$ 且 $f(L)\cap H$ 是无限集．这时 $L\subset f^{-1}(U)$，故存在 $n<\omega$ 和 $\mathscr{P}_n$ 的有限子族 $\mathscr{P}'_n$ 使 $L\subset\cup\mathscr{P}'_n\subset f^{-1}(U)$，从而 $f(L)\subset f(\cup\mathscr{P}'_n)\subset U$，因此 $f(\cup\mathscr{P}'_n)\subset F_n$，所以 $f(L)\cap H\subset F_n\cap H\subset\{y_i: i<n\}$，矛盾．故存在 $n<\omega$ 使 $K\subset F_n$．这说明 $\mathscr{F}_n$ 是紧空间 K 的 HCP 闭盖覆，于是存在 $\mathscr{F}_n$ 的有限子族 $\mathscr{F}'_n$ 使 $K\subset\cup\mathscr{F}'_n$ [12, 推论 2.2]．这时 $\mathscr{F}'_n\subset\mathscr{R}_n$ 且 $K\subset\cup\mathscr{F}'_n\subset U$，因而 Y 具有 σ-HCP k-网．

从定理 2.1 和引理 3.2，我们立即得到如下 g-可度量空间的映射定理．

定理 3.1 g-可度量空间的闭象是一个 g-可度量空间当且仅当它是 g-第一可数空间．

我们知道度量空间的闭象是一个度量空间当且仅当它是一个第一可数空间．由此可推知完备映射保持可度量性．由于定理 3.1，人们可能猜测完备映射保持 g-可度量性，其

实不然.

例 3.1 完备映射不保持 g-可度量性.

构造 取 $X=\{0\}\cup N\cup(N\times N)$. 让 $\mathscr{F}$ 表示 N 的有限子集的全体所形成的集合, N^N 表示从 N 到 N 内的所有对应的集合. 对于 $n, m, k\in N$, $F\in\mathscr{F}$ 和 $f\in N^N$, 置

$$V(n, m)=\{n\}\cup\{(n, k): k\geqslant m\},$$
$$H(F, f)=\cup\{V(n, f(n)): n\in N\backslash F\}.$$

在 X 上导入如下拓扑: 对于 $x\in X$ 取

$$\mathscr{N}_x=\begin{cases}\{\{x\}\}, & \text{当 } x\in N\times N,\\ \{V(x, m): m\in N\}, & \text{当 } x\in N,\\ \{\{x\}\cup H(F, f): F\in\mathscr{F}, f\in N^N\}, & \text{当 } x=0\end{cases}$$

作为点 x 的邻域基. 易如, X 是一个 Hausdorff 空间. 由于每一 $\mathscr{N}_x$ 是 X 的既开且闭的子集族, 于是 X 是一个正则空间.

i) X 是一个 g-可度量空间.

对于 $x\in X$, 置

$$\mathscr{B}_x=\begin{cases}\mathscr{N}_x, & \text{当 } x\in N\cup(N\times N),\\ \{\{0\}\cup(N\backslash F): F\in\mathscr{F}\}, & \text{当 } x=0,\end{cases}$$
$$\mathscr{B}=\cup\{\mathscr{B}_x: x\in X\},$$

则 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数子族. 我们验证 $\mathscr{B}$ 是 X 的弱基. 显然每一 $\mathscr{B}_x$ 满足定义 2.1 中的条件(1)—(3). 若 G 是 X 的开子集, 对于任给的 $x\in G$, 由 $\mathscr{N}_x$ 与 $\mathscr{B}_x$ 之构造, 存在 $B\in\mathscr{B}_x$ 使 $B\subset G$. 若 X 的子集 G 使对于任给 $x\in G$, 存在 $B\in\mathscr{B}_x$ 使 $B\subset G$, 要证明 G 是 X 的开子集. 对于 $x\in G$, 若 $x\in N\cup(N\times N)$, 由于 $\mathscr{B}_x=\mathscr{N}_x$, x 是 G 的内点; 若 $x=0$, 存在 $F\in\mathscr{F}$ 使 $N\backslash F\subset G$, 对于 $n\in N\backslash F$, 存在 $B\in\mathscr{B}_n=\mathscr{N}_n$ 使 $B\subset G$, 于是存在 $f\in N^N$ 使当 $n\in N\backslash F$ 时, $V(n, f(n))\subset G$, 即 $\{0\}\cup H(F, f)\subset G$, 从而 0 也是 G 的内点. 故 G 是 X 的开子集. 因此, X 具有可数弱基, 故 X 是 g-可度量空间.

将 X 的子集 $\{0\}\cup N$ 粘合成一点 0^* 所得到的商空间记为 $Y=\{0^*\}\cup(N\times N)$. 设 q 是从 X 到 Y 上的自然商映射. 由于 $\{0\}\cup N$ 是 X 的紧子集, 所以 q 是完备映射.

ii) Y 是 Fréchet 空间.

对于 $n, m\in N$, 置

$$V^*(n, m)=V(n, m)\backslash\{n\}.$$

设 A 是 Y 的子集且 $y\in\overline{A\backslash\{y\}}$. 由于 $N\times N$ 中的点是 Y 的孤立点, $y=0^*$. 如果对于每一 $n\in N$, $V^*(n, 1)\cap A$ 是有限集, 那么存在 $f\in N^N$ 使 $V^*(n, f(n))\cap A=\phi(n\in N)$. 置

$$V=\{0^*\}\cup(\cup\{V^*(n, f(n)): n\in N\}),$$

那么 V 是 0^* 的邻域且 $V\cap(A\backslash\{0^*\})=\phi$, 这与 $0^*\in\overline{A\backslash\{0^*\}}$ 相矛盾. 故存在 $n\in N$ 使 $V^*(n, 1)\cap A$ 为无限集. 设 $V^*(n, 1)\cap A=\{y_i: i\in N\}$, 那么 A 中的序列 $\{y_i\}$ 收敛于点 0^*. 故 Y 是一个 Fréchet 空间.

iii) Y 不是第一可数空间.

若 Y 是第一可数空间, 那么点 0^* 具有可数局部基. 设 $\{U_n\}$ 是点 0^* 在 Y 中的可数

局部基．于是，对于 $n\in N$，$g^{-1}(U_n)$ 是点 n 在 X 中的开邻域，从而存在 $f\in N^N$ 使

$$(n, f(n))\in g^{-1}(U_n),$$

故 $(n, f(n))\in U_n$．置

$$U=\{0^*\}\cup(\cup\{V^*(n, 1)\setminus\{(n, f(n))\}: n\in N\}),$$

那么 U 是 0^* 在 Y 中的邻域，但是所有 $U_n\not\subset U$，矛盾．故 Y 不是第一可数空间．

由推论 2.1 及 ii) 和 iii) 知 Y 不是 g-第一可数空间，因而 Y 不是 g-可度量空间．故完备映射不能保持 g-可度量性．

注 3.1 开完备映射或者有限到一闭映射保持 g-可度量性．事实上，设 f 是从 g-可度量空间 X 到 Y 上的开完备映射或者有限到一闭映射．因为 g-可度量空间是对称度量空间[11]，又因为开完备映射或者有限到一闭映射保持对称度量性不变[13]，于是 Y 是对称度量空间，从而 Y 是 g-第一可数空间，由定理 3.1，Y 是 g-可度量空间．所以开完备映射或者有限到一闭映射保持 g-可度量性．

参 考 文 献

[1] Burke, D., Engelking, R., Lutzer, D., Hereditarily closure-preserving collections and metrization, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **51** (1975), 483—488.

[2] Foged, L., On g-metrizability, *Pacific J. Math.*, **98** (1982), 327—332.

[3] Lin, S. (林 寿) On a problem of K. Tamano, Questions and Answers in Gen. Top., **6** (1988), 99—102.

[4] Gruenhage, G., Michael, E., Tanaka, Y., Spaces determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, **113** (1984), 303—332.

[5] Michael, E., A quintuple quotient quest, *Gen. Top. Appl.*, **2** (1972), 91—138.

[6] Lin, S. (林 寿), Mapping theorems on $\aleph$-spaces, *Top. Appl.*, **30** (1988), 159—164.

[7] Tanaka, Y., A characterization for the products of k-and $\aleph_0$-spaces and related results, *Proc. Amer Math. Soc.*, **59** (1976), 149—155.

[8] Gruenhage, G., Tanaka, Y., Products of k-spaces and spaces of countable tightness, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **273** (1982), 299—308.

[9] Tanaka, Y., A characterization for the product of closed images of metric spaces to be a k-spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **74** (1979), 166—170.

[10] Gruenhage, G., k-spaces and products of closed images of metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **80** (1980), 478—482.

[11] Siwiec, F., On defining a space by a weak base, *Pacific J. Math.*, **52** (1974), 233—245.

[12] Okuyama, A., On a generalization of Σ-spaces, *Pacific J. Math.*, **42** (1972), 485—495.

[13] Tanaka, Y., On symmetric spaces, *Proc. Japan Acad.*, **49** (1973), 106—111.