高校应用数学学报
2017, 32(1): 79-86

csf可数空间的注记

林　寿[1]，　葛　英[2]

(1. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建漳州 363000;

2. 苏州大学 数学科学学院, 江苏苏州 215006)

摘　要: 讨论csf可数空间的性质, 把csf可数空间刻画为度量空间的映像, 同时探讨了伪紧的csf可数空间的第一可数性质, 推广了Arhangel'skiĭ关于度量空间伪开s映像的结果, 证明了正则伪紧的仿拓扑群是可度量化的当且仅当它是csf可数的Fréchet空间.

关键词: csf可数空间; 序列覆盖映射; 伪紧空间; 仿拓扑群

中图分类号: O189.1

文献标识码:　　　**文章编号**: 1000-4424(2017)01-0079-08

§1　引　言

作为度量空间的重要推广, 第一可数空间已获得了充分的研究. 与第一可数相关的空间, 如弱第一可数空间, csf可数空间等, 同样在广义度量空间, 函数空间和拓扑代数等的研究中发挥了积极的作用[1-5].

设X是一个拓扑空间. 空间X的子集族$\mathscr{P}$称为X的cs网[6], 若$\{x_n\}$是X中收敛于x的序列且U是x在X中的邻域, 则存在$P \in \mathscr{P}$使得$\{x_n\}$终于P且$x \in P \subset U$. X称为csf可数空间[7], 若对于每一$x \in X$, 存在X的子集的可数族$\mathscr{P}_x$满足: $x \in \cap\mathscr{P}_x$, 且如果X中的序列$\{x_n\}$收敛于x且U是x在X中的邻域, 则存在$P \in \mathscr{P}_x$使得$\{x_n\}$终于P且$P \subset U$. 上述$\mathscr{P}_x$称为x在X中的(可数)cs网.

显然, 第一可数空间是csf可数空间. 第一可数空间可刻画为度量空间的开映像[8]. 本文关心的第一个问题是如何用度量空间的映像刻画csf可数的空间?

Miščenko[9]证明了具有点可数基的可数紧空间是一个紧度量空间. 进一步, 具有点可数k网的可数紧的k空间或序列紧空间都是可度量化的空间[10-11]. Shakhmatov[12]和Watson[13]曾独立地构造下述著名的例子: 存在具有点可数基的完全正则的伪紧空间, 使其不是紧空间. 更进一步, Arhangel'skiĭ[14]证明了如果一个完全正则的伪紧空间是一个度量空间的伪开s映像, 则它具有点可数基. 由于度量空间的伪开s映像既具有点可数k网, 又是csf可数空间, 作者关心的第二个问题是探讨伪紧csf可数空间的第一可数性质, 并寻求csf可数空间在拓扑代数中的应用.

收稿日期: 2016-05-10　　修回日期: 2016-09-28
基金项目: 国家自然科学基金(11471153; 11461005)

本文所论空间均是满足T_2分离性质的拓扑空间. 映射是连续的满函数.

§2 度量空间的序列覆盖映像

本节主要探讨如何用度量空间的映像刻画具有csf可数的空间. 先回忆几个概念. 设X, Y都是拓扑空间, 映射$f: X \to Y$. f称为序列覆盖映射[15], 若S是Y中的收敛序列, 则存在X中的收敛序列L使得$f(L) = S$. f称为1序列覆盖映射[16], 若对于每一$y \in Y$, 存在$x \in f^{-1}(y)$满足: 如果S是Y中收敛于y的序列, 则存在X中收敛于x的序列L使得$f(L) = S$.

度量空间上的开映射是1序列覆盖映射[16]. 1序列覆盖映射是序列覆盖映射. 通过构造拓扑和的方法, 可以证明每一拓扑空间都可表示为某一度量空间的序列覆盖的映像, 所以可以说一般的度量空间的序列覆盖映像并未产生新的信息. 但是, 特定的度量空间的序列覆盖映像可以刻画一些拓扑性质. Ponomarev[8]证明了拓扑空间X是第一可数空间当且仅当X是某一度量空间的开映像. Ponomarev的方法已被证明是构造度量空间映像的有效方法, 导出了Ponomarev系$(f, M, X, \mathscr{P})$的概念[2]. 由此, 可以建立许多覆盖族与度量空间的映射联系.

再回忆几个与csf可数空间相关的概念. 设X是拓扑空间. 空间X的子集P称为点$x \in X$的序列邻域, 若X中每一收敛于x的序列是终于P的. 空间X称为snf可数空间[7], 若对于每一$x \in X$, 存在x的序列邻域组成的可数族$\mathscr{P}_x$满足: 如果$x \in U$, 其中U是X的开集, 则存在$P \in \mathscr{P}_x$使得$P \subset U$. 显然, 第一可数空间是snf可数空间, snf可数空间是csf可数空间. 对于空间X的覆盖$\mathscr{P}$, 设$(f, M, X, \mathscr{P})$是Ponomarev系, 则

(1) f是1序列覆盖映射当且仅当$\mathscr{P}$是X的snf网, 即X是snf可数空间[2,引理2.6.4];

(2) f是序列覆盖映射当且仅当$\mathscr{P}$是X的csf网[2,引理2.5.16].

一般说来, 度量空间的序列覆盖映像未必是csf可数空间[2,例1.4.2]. 为了用度量空间的映像来刻画csf可数空间, 似乎要寻求介于1序列覆盖映射与序列覆盖映射之间的映射. 为了避免引入新的映射类, 通过映射的复合来解决csf可数空间的映射问题.

下述命题可以直接验证, 但也可以通过映射定理来证明.

命题2.1 1序列覆盖映射保持csf可数空间.

证 设$f: Y \to X$是一个1序列覆盖映射, 其中空间Y是csf可数空间~~具有点可数的cs网$\mathscr{P}$~~. 对于每一$x \in X$, 存在$y_x \in Y$满足使f是1序列覆盖映射的条件. 令$\mathscr{P}_x$是y_x的可数cs网, 再令$\mathscr{F}_x = \{f(P): P \in \mathscr{P}_x\}$, 则$\mathscr{F}_x$是可数的且$x \in \cap \mathscr{F}_x$. 若$\{x_n\}$是$X$中收敛于$x$的序列且$U$是$x$在$X$中的邻域, 则存在$Y$中收敛于点$y_x \in Y$的序列$\{y_n\}$使得每一$y_n \in f^{-1}(x_n)$, 于是$y_x \in f^{-1}(x) \subset f^{-1}(U)$. 因为$\mathscr{P}_x$是$y_x$的$cs$网, 存在$P \in \mathscr{P}_x$使得$P \subset f^{-1}(U)$且序列$\{y_n\}$是终于$P$的, 那么$f(P) \in \mathscr{F}_x$且序列$\{x_n\} = \{f(y_n)\}$终于$f(P) \subset U$. 这表明$\mathscr{F}_x$是$x$在$X$中的$cs$网. 故$X$是$csf$可数空间.

引理2.2 拓扑空间X是csf可数空间当且仅当X是具有点可数cs网空间的1序列覆盖映像.

证 由命题2.1得充分性. 只需证明必要性. 设(X, τ)是一个csf可数空间. 对每一$x \in X$, 对于空间(X, τ)及$x_0 \in X$可重新定义拓扑τ^*如下: 对于$x \neq x_0$, $\{x\} \in \tau^*$, x_0的邻域基取为原拓扑τ在X中的邻域基. 空间(X, τ^*)称为(X, τ)在x_0的正则化拓扑空间. 这时, τ与τ^*有相同的收敛于x_0的序列. 令$Y = \oplus\{X_x : x \in X\}$, 其中每一$X_x$是$X$在$x$的正则化拓扑空间. 再令$f: Y \to X$是自然映射.

对于每一$y \in Y$, 存在唯一的$x \in X$使得$y \in X_x$. 如果$y = x$, 则存在x在X中的可数cs网$\mathscr{P}_x$, 令$\mathscr{P}_y = \mathscr{P}_x$. 如果$y \neq x$, 则令$\mathscr{P}_y = \{y\}$. 再令$\mathscr{P} = \bigcup_{y \in Y} \mathscr{P}_y$. 易证: $\mathscr{P}$是空间Y的点可数

的cs网. 设$\{x_n\}$是X中收敛于$x \in X$的序列. 由于X_x赋予正则化拓扑, 则在Y的子空间X_x中序列$\{x_n\}$也收敛于$x \in X_x \subset Y$, 且$f(x_n) = x_n$. 故f是1序列覆盖映射.

由于具有点可数cs网的空间可刻画为某一度量空间的序列覆盖的s映像[16], 结合引理2.2, 有下述定理, 它把csf可数空间刻画为度量空间的确定映像, 给出了本文所探讨的第一个问题的一个回答.

定理2.3　空间X是csf可数空间当且仅当存在拓扑空间Y和度量空间M, 使得Y是M的序列覆盖的s映像且X是Y的1序列覆盖映像.

下面介绍一个介于snf可数空间与csf可数空间之间的空间类. 拓扑空间X称为$\aleph_0$-snf可数空间, 若对于每一$x \in X$, 存在X的子集列$\mathscr{P}_x = \{P_x(i,k) : i,k \in \mathbb{N}\}$满足:

(1) 对于每一$i \in \mathbb{N}$, $\{P_x(i,k) : k \in \mathbb{N}\}$是$x$在$X$中递减的网;

(2) 对于每一$i \in \mathbb{N}$及$k_i \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} P_x(i,k_i)$是$x$的序列邻域.

上述$\mathscr{P}_x$称为x在X中的$\aleph_0$-snf可数网.

$\aleph_0$-snf可数空间与Sirois-Dumais[17]引入的弱拟第一可数空间及拟第一可数空间密切相关. 事实上, 弱拟第一可数空间等价于$\aleph_0$-snf可数的序列空间[18]; 拟第一可数空间等价于$\aleph_0$-snf可数的Fréchet空间[18]. 对于$\aleph_0$-snf可数空间的讨论将有助于更深入地探讨弱拟第一可数空间及拟第一可数空间的性质[19].

引理2.4　$\aleph_0$-snf可数空间是csf可数空间.

证　设X是$\aleph_0$-snf可数空间. 让$\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$, 其中每一$\mathscr{P}_x = \{P_x(i,k) : i,k \in \mathbb{N}\}$是$x$在$X$中的$\aleph_0$-$snf$可数网. 先证明下述断言.

断言. 若X中的序列$\{x_n\}$收敛于x, 则存在$i \in \mathbb{N}$及$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一$x_{n_k} \in P_x(i,k)$.

事实上, 不妨设所有的$x_n \neq x$. 置$H = X \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 则$H$不是$x$在$X$中的序列邻域, 于是存在$i \in \mathbb{N}$使得对于每一$k \in \mathbb{N}$有$P_x(i,k) \not\subset H$. 记$T_k = P_x(i,k) \cap \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, 那么$T_k \neq \varnothing$. 若有$k_0 \in \mathbb{N}$使得$T_{k_0}$是有限集, 由于$\{P_x(i,k) : k \in \mathbb{N}\}$是$x$在$X$中递减的网, 则存在$m_0 > k_0$使得$P_x(i,m_0) \subset X \setminus T_{k_0}$, 于是$T_{m_0} = \varnothing$, 矛盾. 从而每一$T_k$为无限集. 因此, 存在$\{x_n\}$ 的子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一$x_{n_k} \in P_x(i,k)$.

对于每一$x \in X$, 置$\mathscr{F}_x = \{\cup\mathscr{P}'_x : \mathscr{P}'_x \in [\mathscr{P}_x]^{<\omega}\}$, 则$\mathscr{F}_x$是可数的. 下证$\mathscr{F}_x$是$x$在$X$中的$cs$网. 若$X$中的序列$\{x_n\}$收敛于$x$且$V$是$x$在$X$中的邻域, 令$\{P \in \mathscr{P}_x : P \subset V\} = \{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 则存在$k \in \mathbb{N}$使得序列$\{x_n\}$终于$\bigcup_{i\leqslant k} P_i \in \mathscr{F}_x$. 否则, 存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一$x_{n_k} \in X \setminus \bigcup_{i\leqslant k} P_i$. 由上述断言, 存在$i_0 \in \mathbb{N}$和序列$\{x_{n_k}\}$的子序列$\{x_{n_{k_j}}\}$使得每一$x_{n_{k_j}} \in P_x(i_0,j)$. 由于$\{P_x(i_0,j) : j \in \mathbb{N}\}$是$x$在$X$中递减的网, 存在$j_0 \in \mathbb{N}$使得$P_x(i_0,j_0) \subset V$, 于是存在$m \in \mathbb{N}$使得$P_x(i_0,j_0) = P_m$. 取自然数$m_0 = \max\{m, j_0\}$, 则$x_{n_{k_{m_0}}} \in P_x(i_0,m_0) \setminus \bigcup_{i\leqslant k_{m_0}} P_i \subset P_x(i_0,j_0) \setminus P_m = \varnothing$, 矛盾. 故$X$是$csf$可数空间.

注　csf可数空间未必是$\aleph_0$-snf可数空间[20,例6].

设映射$f : X \to Y$. f称为可数到一映射[11], 如果每一$f^{-1}(y)$是可数集. f称为序列商映射[21], 如果S是Y中的收敛序列, 则存在X中的收敛序列L使得$f(L)$是S的子序列.

定理2.5　空间X是$\aleph_0$-snf可数空间当且仅当X是某一第一可数空间的可数到一的序列商映像.

证　设X是$\aleph_0$-snf可数空间. 让$\mathscr{P} = \bigcup_{x\in X} \mathscr{P}_x$, 其中每一$\mathscr{P}_x = \{P_x(i,k) : i,k \in \mathbb{N}\}$是$x$

在X中的$\aleph_0$-snf可数网. 记$X=\{x_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 并记$Y=\{y_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$且$X\cap Y=\varnothing$. 令$Z=X\cup Y$. 对于每一$i\in\mathbb{N}$, 赋予集$Z$如下拓扑$\tau_i$: 对于$\alpha\in\Lambda$, x_α是孤立点, y_α的邻域基元形如$\{y_\alpha\}\cup(P_i(x_\alpha,k)\setminus\{x_\alpha\})$, $\forall k\in\mathbb{N}$. 显然, (Z,τ_i)是第一可数的T_2空间.

令$M=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}(Z,\tau_i)$, 则$M$是第一可数空间. 定义$f:M\to X$使得$f(x_\alpha)=f(y_\alpha)=x_\alpha,\forall\alpha\in\Lambda$, 则$f$是可数到一映射. 若$\{x_n\}$是$X$中收敛于某点$x_\alpha\in X$的序列, 不妨设每一$x_n\neq x_\alpha$, 由引理2.4的断言, 存在$i\in\mathbb{N}$及$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一$x_{n_k}\in P_i(x_\alpha,k)$, 于是$\{x_{n_k}\}$是$(Z,\tau_i)\subset M$ 中收敛于点y_α的序列且每一$f(x_{n_k})=x_{n_k}$. 故f 是序列商映射.

反之, 设$f:M\to X$是序列商的可数到一映射, 其中M是第一可数空间. 对于每一$z\in M$, 让$\mathscr{B}_z=\{B_z(k):k\in\mathbb{N}\}$是$z$在$M$中递减的可数局部基. 对于每一$x\in X$, 记$f^{-1}(x)=\{z(i,x):i\in\mathbb{N}\}$, 令$\mathscr{P}_x=\{P_x(i,k):i,k\in\mathbb{N}\}$, 其中每一$P_x(i,k)=f(B_{z(i,x)}(k))$. 下面证明$\mathscr{P}_x$是$x$在$X$中的$\aleph_0$-$snf$可数网.

对于每一$i\in\mathbb{N}$, 由于$\mathscr{B}_{z(i,x)}$是点$z(i,x)$在M中可数递减的局部基, 所以$\{P_x(i,k):k\in\mathbb{N}\}$是$x$在$X$中递减的网.

设$i,k_i\in\mathbb{N}$且$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}P_x(i,k_i)$不是$x$在$X$中的序列邻域, 则存在$X$中收敛于$x$的序列$\{x_n\}$使得每一$x_n\notin\bigcup_{i\in\mathbb{N}}P_x(i,k_i)$. 由于$f$是序列商映射, 存在$M$中的收敛序列$\{z_j\}$使得$\{f(z_j)\}=\{x_{n_j}\}$是$\{x_n\}$的子序列. 不妨设序列$\{z_j\}$收敛于某$z(i,x)\in f^{-1}(x)$. 由于$B_{z(i,x)}(k_i)$是$z(i,x)$的开邻域, 存在$z_j\in B_{z(i,x)}(k_i)$, 于是$x_{n_j}=f(z_j)\in f(B_{z(i,x)}(k_i))=P_x(i,k_i)$, 矛盾. 这表明$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}P_x(i,k_i)$总是$x$在$X$中的序列邻域.

综上所述, X是$\aleph_0$-snf可数空间.

注 定理2.5表明: 序列商的可数到一映射保持$\aleph_0$-snf可数空间. 但是, 定理2.5中的第一可数性不可加强为可度量性, 甚至第一可数空间也未必可表为可度量空间的序列商的可数到一映像. 让X是Mrówka空间$\psi(\mathbb{N})$[2,例1.4.3], 则X是非亚Lindelöf 空间的第一可数的正则空间. 若X是某一度量空间的序列商的可数到一映像, 则X具有点可数基[2], 矛盾. 故X不可表为可度量空间的序列商的可数到一映像.

关于度量空间的可数到一映像, 有下述已知的结果: 对于空间X,

(1) X是度量空间的开可数到一映像$\Leftrightarrow$ X具有点可数基[20];

(2) X是度量空间的1序列覆盖的可数到一映像$\Leftrightarrow$ X具有点可数的sn网[22];

(3) X是度量空间的序列商的可数到一映像$\Leftrightarrow$ X具有点可数的$\aleph_0$-sn网[23-24].

有下述问题:

问题2.6 如何刻画度量空间的序列覆盖的可数到一映像?

§3 伪紧的csf可数空间

拓扑空间X称为伪紧的(pseudo-compact)[25], 如果X上的每一实值连续函数是有界的. 拓扑空间X称为feebly紧的[26], 如果X的每一局部有限的开集族是有限的. 显然, 可数紧空间是feebly紧的, feebly紧空间是伪紧的, 而完全正则的伪紧空间是feebly紧的[25].

设X是拓扑空间. X称为Fréchet空间, 如果$A\subset X$ 且$x\in\overline{A}$, 则存在由A中点组成的序列收敛于x. X称为强Fréchet空间[15], 如果$\{A_n\}$是X中递减的集列且$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 则存在$X$中收敛于$x$的序列$\{x_n\}$使得每一$x_n\in A_n$. 显然, 第一可数空间是强Fréchet空间; 强Fréchet空间是Fréchet空间.

定理3.1 设X是feebly紧的正则空间. 若X是csf可数的Fréchet空间, 则X是第一可数空间.

证 取定$x\in X$. 设$\mathscr{P}_x$是x在X中可数的cs网. 令

$$\mathscr{B}_x=\{\overline{\cup\mathscr{P}'}:\mathscr{P}'\text{是}\mathscr{P}_x\text{的有限子集}\},$$

则$\mathscr{B}_x$是可数的. 下面证明$\{B\in\mathscr{B}_x:x\in B^\circ\}$是$x$在$X$中的邻域基.

设V是x在X中的开邻域. 记$\mathscr{Q}=\{\overline{P}\subset V:P\in\mathscr{P}_x\}=\{Q_n:n\in\mathbb{N}\}$.

(1) 设$A\subset X$. 若$x\in\overline{A}$, 则存在$n\in\mathbb{N}$使得$x\in\overline{Q_n\cap A}$.

因为X是Fréchet空间, 存在A中的序列C使得C收敛于x. 由X的正则性, 存在X中的开集U使得$x\in U\subset\overline{U}\subset V$. 因为$\mathscr{P}_x$是$x$的$cs$网, 存在$P\in\mathscr{P}_x$使得$C$终于$P$且$P\subset U$, 于是$\overline{P}\in\mathscr{Q}$, 从而存在$n\in\mathbb{N}$使得$\overline{P}=Q_n$, 那么$x\in\overline{Q_n\cap A}$. (1)得证.

对于每一$n\in\mathbb{N}$, 令$B_n=\cup\{Q_i:i\leqslant n\}$, 那么$x\in Q_n\subset B_n\subset V$且$B_n\in\mathscr{B}_x$. 又令$A_n=X\setminus B_n$, 则$A_n$是$X$的开集. 再令

$$\begin{aligned}S=\{s\in X:&\text{存在}X\text{的开集列}\mathscr{W}_s=\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}\text{满足:}\\&\mathscr{W}_s\text{在}s\text{不是局部有限的, 且每一}W_i\subset A_i,x\notin\overline{W_i}\}.\end{aligned}$$

(2) 若$x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$, 则$x\in\overline{S}$.

对于x的任意邻域O, 由正则性, 存在x的开邻域G使得$\overline{G}\subset O$. 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 由于$x\in\overline{A_n}$, 存在A_n的可数子集D_n使得$x\in\overline{D_n}$. 因为$x\notin A_n$, 所以D_n是无限集. 记$D_n=\{d_{n,i}:i\in\mathbb{N}\}$. 又因为$A_n$是$X$的开集, 于是存在$X$的开集列$\{W_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$使得对每一$i\in\mathbb{N}$有

$$x\notin\overline{W_{n,i}}\text{且}d_{n,i}\in W_{n,i}\subset A_n.$$

于是$x\in\overline{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}W_{n,i}}$, 因此存在$i(n)\in\mathbb{N}$使得$G\cap W_{n,i(n)}\neq\varnothing$. 由于$X$是feebly紧空间, 所以存在$s\in X$使得开集族$\{G\cap W_{n,i(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$在$s$不是局部有限的. 这时$s\in S\cap\overline{G}\subset S\cap O$. 因而, $x\in\overline{S}$.

(3) 存在$n\in\mathbb{N}$使得$x\in B_n^\circ$.

否则, 对于每一$n\in\mathbb{N}$, 有$x\in\overline{A_n}$. 由(2), $x\in\overline{S}$. 由于X是Fréchet空间, 存在S中的序列$\{s_n\}$收敛于x. 因为$s_n\in S$, 存在X的开集列$\mathscr{H}_n=\{H_{n,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$使得$\mathscr{H}_n$在$s_n$不是局部有限的, 且每一$H_{n,i}\subset A_i$, $x\notin\overline{H_{n,i}}$. 令$H=\cup\{H_{n,i}:n\leqslant i,n,i\in\mathbb{N}\}$, 则$x\in\overline{H}$. 由(1), 存在$i\in\mathbb{N}$使得$x\in\overline{Q_i\cap H}$. 对于自然数$j\geqslant i$, $B_i\cap H_{n,j}\subset B_i\cap A_i=\varnothing$, 从而$x\in\overline{B_i\cap H}=\cup\{\overline{H_{n,j}}:n\leqslant j<i\}$, 矛盾. (3)得证.

这表明, $\{B\in\mathscr{B}_x:x\in B^\circ\}$是$x$的可数邻域基. 即, X是第一可数空间.

由定理3.1, 可导出下述Arhangel'skiĭ 的结果.

推论3.2[14] 设X是正则的feebly紧空间. 若X是一个度量空间的伪开s映像, 则X具有点可数基.

证 因为伪开映射保持Fréchet空间性质, 所以X是Fréchet空间. 下面证明X是csf可数空间. 由于X是度量空间的伪开s映像, 存在度量空间M和伪开s映射$f:M\to X$. 让$\mathscr{B}$是M的σ局部有限基. 对于每一$x\in X$, 令$\mathscr{P}=\{B\in\mathscr{B}:B\cap f^{-1}(x)\neq\varnothing\}$, 则$\mathscr{P}$是可数的. 让$\mathscr{F}=\{\cup\mathscr{P}':\mathscr{P}'\in[f(\mathscr{P})]^{<\omega}\}$, 则$\mathscr{F}$是可数的. 若$X$中的序列$\{x_n\}$收敛于$x$且$V$是$x$在$X$中的邻域, 令$\{F\in f(\mathscr{P}):F\subset V\}=\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 则存在$k\in\mathbb{N}$使得序列$\{x_n\}$终于$\bigcup_{i\leqslant k}F_i$. 否则, 存

在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一$x_{n_k} \in X \setminus \bigcup_{i \leqslant k} F_i$. 令$H = \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\} \setminus \{x\}$, 则$H$不是$X$的闭集. 由于$f$是商映射, 于是$f^{-1}(H)$不是$M$的闭集, 从而存在$f^{-1}(H)$中的序列$\{z_k\}$收敛于某点$z \in M \setminus f^{-1}(H)$. 不妨设每一$f(z_k) = x_{n_k}$. 这时, $f(z) = x$, 即$z \in f^{-1}(x) \subset f^{-1}(V)$, 于是存在$B \in \mathscr{B}$使得$z \in B \subset f^{-1}(V)$, 从而存在$m, k_0 \in \mathbb{N}$使得$f(B) = F_m$且$\{z_k : k \geqslant k_0\} \subset B$. 取自然数$m_0 = \max\{m, k_0\}$, 则$f(z_{m_0}) = x_{n_{m_0}} \in F_m \setminus \bigcup_{i \leqslant m_0} F_i = \varnothing$, 矛盾, 因此序列$\{x_n\}$终于某$\bigcup_{i \leqslant k} F_i \in \mathscr{F}$. 故$X$是$csf$可数空间.

由定理3.1, X是第一可数空间. 又由于度量空间的第一可数的正则的商s映像具有点可数基[11,推论3.6], 所以X具有点可数基.

设G是一个拓扑空间, 又是一个群. 若从乘积空间$G \times G$ 到拓扑空间G上的乘积映射$(x, y) \mapsto x \cdot y$是连续的, 则称G是仿拓扑群(paratopological group). 若G 是仿拓扑群且从拓扑空间G到自身的逆映射$x \mapsto x^{-1}$是连续的, 则称G是拓扑群(topological group). 拓扑代数的中心问题之一是度量化问题[27]. 如, 林福财和刘川证明了每一第一可数的feebly紧的仿拓扑群是次可度量空间[28]; 沈荣鑫证明了每一feathered的csf可数的拓扑群是可度量化的[4].

定理3.3 正则伪紧的仿拓扑群是可度量化的当且仅当它是csf可数的Fréchet空间.

证 只需证明充分性. 设伪紧的仿拓扑群G是正则csf可数的Fréchet空间. 由于正则的仿拓扑群是完全正则空间[29], 于是G是feebly紧空间. 由定理3.1, G是第一可数空间, 从而G具有正则的G_δ对角线[30]. 又由于具有正则G_δ对角线的feebly紧空间是可度量化空间[31], 所以G是可度量化空间.

问题3.4 设X是feebly紧的正则空间. 若X是csf可数的序列空间, 那么X是否是第一可数空间?

问题3.5 设X是feebly紧的正则空间. 若X是度量空间的商s映像, 那么X是否具有点可数基?

本文第二作者曾提出下述csf网和cs^*f网的概念[32]. 设$\mathscr{P}$是空间X的覆盖. $\mathscr{P}$称为X的csf网, 若S是X中收敛于x的序列, 则存在$\mathscr{P}$的可数子族$\mathscr{P}'$使得$\mathscr{P}'$是x在X中的网且S终于$\mathscr{P}'$中的每一元. $\mathscr{P}$称为X的cs^*f网, 若S是X中收敛于x的序列, 则存在$\mathscr{P}$的可数子族$\mathscr{P}'$使得$\mathscr{P}'$是x在X中的网, 且$\mathscr{P}'$中每一有限子集之交集含有S中的无限项. 显然, csf可数空间是具有csf网的空间, csf网是cs^*f网. 文[2, 问题2.7.23]提出问题: 强Fréchet空间是否具有cs^*f网? 这是一个平凡的问题, 因为每一空间都具有csf网, 所以每一空间都具有cs^*f网. 若把cs^*f网强加为csf可数空间, 情况发生了变化.

定理3.6 空间X是第一可数空间当且仅当X是强Fréchet的csf可数空间.

证 显然, 第一可数空间是强Fréchet的csf可数空间. 反之, 设(X, τ)是强Fréchet的csf可数空间. 对于每一$x \in X$, 让$\mathscr{P}_x$是x在X中可数的cs网. 若$x \in U \in \tau$, 令$\{P \in \mathscr{P}_x : P \subset U\} = \{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 则存在$m \in \mathbb{N}$使得$x \in \mathrm{int}(\bigcup_{n \leqslant m} P_n)$. 否则, $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{X \setminus \bigcup_{n \leqslant m} P_n}$. 因为$X$是强Fréchet空间, 存在$X$中收敛于$x$的序列$\{x_m\}$使得每一$x_m \in X \setminus \bigcup_{n \leqslant m} P_n$. 由于$\mathscr{P}_x$是$x$在$X$中的$cs$网, 存在$P \in \mathscr{P}_x$使得序列$\{x_m\}$是终于$P$的且$P \subset U$, 从而存在$k \in \mathbb{N}$使得$P = P_k$, 这与每一$x_m \in X \setminus \bigcup_{n \leqslant m} P_n$相矛盾. 因此, 存在$m \in \mathbb{N}$使得$x \in \mathrm{int}(\bigcup_{n \leqslant m} P_n)$. 这表明$\{\mathrm{int}(\cup \mathscr{P}') : x \in \mathrm{int}(\cup \mathscr{P}'), \mathscr{P}' \in [\mathscr{P}_x]^{<\omega}\}$是$x$在$X$中的可数邻域基. 即, X是第一可数空间.

推论3.7 拓扑群是可度量化的当且仅当它是csf可数的Fréchet空间.

证 只需证明充分性. 设拓扑群G是csf可数的Fréchet空间. 由于Fréchet的拓扑群是

强Fréchet的[27], 于是G是强Fréchet空间. 由定理3.6, X是第一可数空间. 又由于第一可数的拓扑群是可度量化的, 所以G是可度量化的.

致谢　作者对评审人提出的修改意见表示感谢.

参考文献:

[1] 林福财. 拓扑代数与广义度量空间[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 2012.

[2] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射, 第二版[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

[3] Sakai M. Function spaces with a countable cs^*-network at a point[J]. Topology Appl, 2008, 156: 117-123.

[4] Shen Rongxin. On generalized metrizable properties in quasitopological groups[J]. Topology Appl, 2014, 173: 219-226.

[5] 沈荣鑫, 林寿. 拓扑群中广义度量性质的一个注记[J]. 数学年刊A辑, 2009, 30(5): 697-704.

[6] Guthrie J A. A characterization of $\aleph_0$-spaces[J]. General Topology Appl, 1971, 1: 105-110.

[7] Lin Shou. A note on the Arens' space and sequential fan[J]. Topology Appl, 1997, 81: 185-196.

[8] Ponomarev V I. Axioms of countability and continuous mappings (in Russian)[J]. Bull Acad Pol Sci, Sér Sci Math Astron Phys, 1960, 8: 127-134.

[9] Miščenko A. Spaces with a pointwise denumerable basis (in Russian)[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1962, 145(6): 1224-1227.

[10] Cai Zhangyong, Lin Shou. Sequentially compact spaces with a point-countable k-network[J]. Topology Appl, 2015, 193: 162－166.

[11] Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers[J]. Pacific J Math, 1984, 113: 303-332.

[12] Shakhmatov D B. On pseudocompact spaces with point-countable base[J]. Soviet Math Dokl, 1984, 30: 747-751.

[13] Watson W S. A pseudocompact meta-Lindelöf space which is not compact[J]. Topology Appl, 1985, 20: 237-243.

[14] Arhangel'skiĭ A V. Components of first-countability and various kinds of pseudoopen mappings[J]. Topology Appl, 2011, 158: 215-222.

[15] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient mappings[J]. General Topology Appl, 1971, 1: 143-154.

[16] 林寿. 关于序列覆盖s映射[J]. 数学进展, 1996, 25: 548-551.

[17] Sirois-Dumais R. Quasi-and weakly quasi-first-countable spaces[J]. Topology Appl, 1980, 11: 223-230.

[18] 林寿. 序列网与度量空间的序列商映像[J]. 数学学报, 1999, 42: 49-54.

[19] 沈荣鑫. 拟第一可数空间和弱拟第一可数空间[J]. 高校应用数学学报, 2010, 25: 224-228.

[20] Liu Chuan, Lin Shou. On countable-to-one maps[J]. Topology Appl, 2007, 154: 449-454.

[21] Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings[J]. Czech Math J, 1976, 26: 174-182.

[22] Ge Xun. On countable-to-one images of metric spaces[J]. Topology Proc, 2007, 31: 115-123.

[23] 孙秀华, 吕诚. 度量空间的子序列覆盖可数到一映像[J]. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2013, 31(3): 446-447, 450.

[24] Wang Pei, Li Zhongmin, Liu Shiqin. On $\aleph_0$-sn-metric spaces[J]. 广西科学, 2010, (1): 32-35.

[25] Engelking R. General Topology (revised and completed edition)[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[26] Stephenson Jr R M. Symmetrizable, $\mathscr{F}$-, and weakly first countable spaces[J]. Can J Math, 1977, 29: 480-488.

[27] Arhangel'skiĭ A V, Tkachenko M. Topological Groups and Related Structures[M]. Paris: Atlantis Press and World Sci, 2008.

[28] Lin Fucai, Liu Chuan. On paratopological groups[J]. Topology Appl, 2012, 159: 2764-2773.

[29] Banakh T, Ravsky A. Each regular paratopological group is completely regular[J]. Proc Amer Math Soc, to appear, see arXiv: 1410.1504v9.

[30] Liu Chuan. A note on paratopological groups[J]. Comment Math Univ Carolinae, 2006, 47: 633-640.

[31] McArthur W G. G_δ-diagonals and metrization theorems[J]. Pacific J Math, 1973, 44: 613-617.

[32] Ge Ying. Mappings in Ponomarev-systems[J]. Topology Proc, 2005, 29: 141-153.

A note on csf-countable spaces

LIN Shou[1], GE Ying[2]

(1. School of Math. Sta., Minnan Normal Univ., Zhangzhou 363000, China;

2. School of Sci. Math., Soochow Univ., Suzhou 215006, China)

Abstract: In this paper some properties of csf-countable spaces are discussed. csf-countable spaces can be characterized by certain images of metrizable spaces, the first-countability of pesudo-compact csf-countable spaces are explored, and it is proved a regular pseudo-compact paratopological group is metrizable if and only if it is a csf-countable Fréchet space.

Keywords: csf-countable spaces; sequence-covering mappings; pseudo-compact spaces; paratopological groups

MR Subject Classification: 54C10; 54E99; 54H11