关于统计序列紧空间

刘 丽, 唐忠宝, 林 寿 *

(闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)

摘 要: 在一般拓扑空间中, 引入了序列紧空间的统计定义并讨论其相应的拓扑性质, 深化了拓扑群与可度量化空间中关于序列紧空间的一些结果.

关键词: 统计收敛; 序列紧空间; 统计序列空间; 统计序列紧空间

1 引言

H. Fast[1] 和 H. Steinhaus[2] 各自独立地引入了实数与复数空间上统计收敛的概念. J. Connor[3−4], J. A. Fridy[5−7] 和 H. I. Miller[8] 等进一步发展了统计收敛理论. 近年来, 与统计收敛相关的性质的研究方兴未艾. 众所周知, 紧空间与度量空间是拓扑学中最重要的研究对象. 在拓扑学中, 与序列相关的紧性主要有序列紧性及可数紧性等. 如何用统计收敛性来探讨这些紧性? 2009 年, H. Çakalli[9] 引入并初步讨论了拓扑群中的统计序列紧性. 其后, 李克典, 林寿和葛英 [10] 定义并研究了锥度量空间中的统计序列紧性. 他们的研究都是假设或基于拓扑空间的第一可数性. 如何在不假设第一可数的条件下讨论 "统计序列紧性"? 我们借助 G. Di Maio 和 D. Kočinac[11] 引入的一般拓扑空间中的统计收敛性, 定义了拓扑空间中的统计序列紧性, 阐述了统计序列紧性的一些基本性质, 建立了不依赖于拓扑群或锥度量空间或第一可数空间的更一般的统计序列紧理论.

本文中用 $\mathbb{N}$ 表示全体正整数的集合, ω 表示第一个无限序数.

定义 1.1[12] 设 $A\subset\mathbb{N}$, 记 $A(n)=\{k\in A:k\le n\}$.

$$\underline{\delta}(A)=\liminf_{n\to\infty}\frac{|A(n)|}{n} \text{ 和 } \overline{\delta}(A)=\limsup_{n\to\infty}\frac{|A(n)|}{n}$$

分别称为 A 的下渐近密度和上渐近密度. 若 $\underline{\delta}(A)=\overline{\delta}(A)$, 则 $\delta(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|A(n)|}{n}$ 称为 A 的渐近密度.

定义 1.2[11] 拓扑空间 X 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为统计收敛于 $x\in X$, 若对点 x 的任意邻域 U, 有 $\delta(\{n\in\mathbb{N}:x_n\notin U\})=0$.

显然, 定义 1.2 等价于: 拓扑空间 X 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $x\in X$ 当且仅当对点 x 的任意邻域 U, 有 $\delta(\{n\in\mathbb{N}:x_n\in U\})=1$.

定义 1.3 设 X 是一个拓扑空间.

1) X 称为序列空间 [13], 若对 X 的任意非闭子集 A, 存在 $x\in X\setminus A$ 和 A 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 x.

收稿日期: 2015-05-18
资助项目: 国家自然科学基金 (11471153, 11201414)
* 通信作者

2) X 称为统计序列空间 [11], 若对 X 的任意非闭子集 A, 存在 $x \in X \setminus A$ 和 A 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x.

显然, 第一可数空间是序列空间, 序列空间是统计序列空间. 上述两类空间可分别通过序列闭集与统计序列闭集来刻画. 设 $A \subset X$. A 称为 X 的序列闭集 [13](或统计序列闭集 [14]), 若 A 中任意序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛 (或统计收敛) 于 $x \in X$, 则 $x \in A$. 显然, 一个拓扑空间的闭集是统计序列闭集, 统计序列闭集是序列闭集. 易验证: 拓扑空间 X 是序列空间 (或统计序列空间) 当且仅当 X 的每一序列闭集 (或统计序列闭集) 是闭集 [13−14].

2 紧性的统计序列定义

本节定义 "统计序列紧空间", 同时探讨 "统计可数紧空间" 的定义. 拓扑空间 X 称为序列紧空间, 若 X 中任意序列有收敛的子序列 [15]. 由此, 很自然地引入统计序列紧空间的概念.

定义 2.1 拓扑空间 X 称为统计序列紧空间 (statistically sequentially compact space), 若 X 中任意序列有统计收敛的子序列.

H. Çakalli[9] 与李克典, 林寿和葛英 [10] 分别引入过拓扑群, 锥度量空间中统计序列紧空间的定义, 其形式和上述定义基本上一致, 但本文是在一般的拓扑空间中定义此概念.

显然, 序列紧空间是统计序列紧空间. 与序列紧空间相似的紧空间类是可数紧空间. 一个空间称为可数紧空间, 若它的每一可数开覆盖具有有限子覆盖 [15]. 可数紧性可用聚点的概念来描述.

引理 2.2[16] 对于拓扑空间 X, 下述条件相互等价:

1) X 是可数紧空间;

2) X 中的每一序列有聚点;

3) X 的每一无限集 A 存在 ω 聚点, 即存在 $x \in X$ 使得 x 的任意邻域含有集 A 的无限个点.

由引理 2.2, 统计序列紧空间是可数紧空间.

如何定义 "统计可数紧空间"? 鉴于 "收敛序列是统计收敛序列" 及一些与统计收敛概念相关的拓扑空间的定义 [11], 我们认为至少所定义的 "统计可数紧空间" 要满足: "可数紧空间是统计可数紧空间". 由引理 2.2, 可以尝试从序列的 "统计聚点" 着手.

首先, Çakalli[9,17] 在拓扑群上以下述方式定义了统计序列可数紧空间 X (statistically-sequentially countably compact space): 对 X 的每一无限子集 A 存在 $x \in X$ 及 $A \setminus \{x\}$ 中统计收敛于 x 的序列. 下列引理说明即使在一般的拓扑空间, 这种定义无异于定义 2.1 所给出的统计序列紧空间.

引理 2.3 拓扑空间 X 是统计序列紧空间当且仅当对 X 中任意无限子集 F, 存在 $x \in X$ 及 $F \setminus \{x\}$ 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x.

证明 必要性. 设 X 是统计序列紧空间. 任取 X 中的无限子集 F, 则存在 F 中序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足若 $n \neq m$, 则 $x_n \neq x_m$. 因为 X 是统计序列紧空间, 所以存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x. 不妨设对任意 $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k} \neq x$. 则有 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset F \setminus \{x\}$, 且 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x.

充分性. 设空间 X 满足充分性条件. 任取 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 令 $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$. 若序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有无限项相同, 显然 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有收敛的子序列. 不妨设对任意 $n\neq m$, $x_n\neq x_m$. 则 A 是无限集, 从而存在 $x\in X$ 及 $A\setminus\{x\}$ 中的序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x. 从而 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有统计收敛的子序列. 故 X 是统计序列紧空间.

其次, 回忆序列聚点或极限点概念的几种形式. J. Fridy[6] 最早讨论了实空间的统计聚点和统计极限点. G. Di Maio 和 D. Kočinac[11] 在一般的拓扑空间中定义了这两个概念. 为了便于这些概念之间的比较, 本文引入统计收敛极限点的概念.

定义 2.4 设 X 是任意拓扑空间, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中任意序列, $x\in X$.

1) x 称为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的统计聚点 (statistical cluster point)[11], 若对点 x 的任意邻域 U, 有 $\overline{\delta}(\{n\in\mathbb{N}:x_n\in U\})>0$. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体统计聚点的集合记为 $\Gamma(\{x_n\})$.

2) x 称为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的统计极限点 (statistically limit point)[11], 若存在 $\mathbb{N}$ 的子集 A, 使得 $\overline{\delta}(A)>0$ 且序列 $\{x_n\}_{n\in A}$ 收敛于 x. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体统计极限点的集合记为 $\Lambda(\{x_n\})$.

3) x 称为 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的统计收敛极限点 (statistically-convergent limit point), 若存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 x. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体统计收敛极限点的集合记为 $sL(\{x_n\})$.

4) 序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中的全体聚点的集合记为 $C(\{x_n\})$; 序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 X 中的全体收敛子序列的极限点的集合记为 $L(\{x_n\})$.

注 记号 $sL(\{x_n\})$ 和 $C(\{x_n\})$ 为本文所规定. 在一些文献中, $L(\{x_n\})$ 所表示的含义有所不同, 如文 [7] 用此表示 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体收敛子序列的极限点的集合 (本文沿用这一记号), 文 [11] 用此表示 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体聚点的集合. 显然, 在第一可数空间中这两种表示方式是一致的. 此外, 文 [11] 用 $\Theta(\{x_n\})$ 表示 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的全体统计聚点的集合.

定义 2.4 所定义的拓扑空间 X 的 5 个子集 $\Gamma(\{x_n\})$, $\Lambda(\{x_n\})$, $sL(\{x_n\})$, $C(\{x_n\})$ 和 $L(\{x_n\})$ 是否为空集各自反映了空间的某种紧性.

易验证:

1) $\Lambda(\{x_n\})\subset L(\{x_n\})\subset sL(\{x_n\})\subset C(\{x_n\})$.

2) $\Lambda(\{x_n\})\subset\Gamma(\{x_n\})\subset C(\{x_n\})$[11].

3) 空间 X 是序列紧空间当且仅当对 X 中的任意序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 有 $L(\{x_n\})\neq\varnothing$.

4) 空间 X 是统计序列紧空间当且仅当对 X 中的任意序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 有 $sL(\{x_n\})\neq\varnothing$.

5) 空间 X 是可数紧空间当且仅当对 X 中的任意序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 有 $C(\{x_n\})\neq\varnothing$.

无论以下述 6) 或 7) 哪种方式定义所谓的 "统计可数紧空间", 都导不出 "可数紧空间是统计可数紧空间", 只能导出其逆命题成立 "统计可数紧空间是可数紧空间":

6) 对空间 X 的任意序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 有 $\Lambda(\{x_n\})\neq\varnothing$.

7) 对空间 X 的任意序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 有 $\Gamma(\{x_n\})\neq\varnothing$.

至此, 如何合理定义 "统计可数紧空间" 还是一个尚未解决的问题. 我们认为如何在一般的拓扑空间中合理定义所谓的 "统计紧空间" 更是一个有意义的问题.

例 2.5 存在非统计序列紧的紧空间.

设 $I=[0,1]$ 是单位闭区间. 对每一 $\alpha\in I$, 记 $D_\alpha=\{0,1\}$, 赋予离散拓扑, 则 D_α 是紧空间. 作积空间 $X=\prod_{\alpha\in I}D_\alpha$. 由 Tychonoff 积定理, X 是紧空间. 下面证明 X 不是统计序列

紧空间. 对每一 $n\in\mathbb{N}$, 取定 $x_n\in X$ 满足 $p_\alpha(x_n)=\alpha$ 的 2 进制展开式中的第 n 位数字, 这里 $\alpha\in I$, $p_\alpha: X\to D_\alpha$ 是投影映射. 若 X 是统计序列紧空间, 则 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个统计收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 设序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $x\in X$. 对每一 $\alpha\in I$, 因为 p_α 是连续映射, 在 D_α 中序列 $\{p_\alpha(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $p_\alpha(x)$ (见文 [14] 定理 2.2). 取定 $\beta\in I$ 使当 k 是奇数时, $p_\beta(x_{n_k})=0$; 当 k 是偶数时, $p_\beta(x_{n_k})=1$. 那么在空间 $D_\beta=\{0,1\}$ 中序列 $\{p_\beta(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $0,1,0,1,\cdots$, 不统计收敛, 矛盾. 从而 X 不是统计序列紧空间.

问题 2.6 寻找非序列紧的统计序列紧空间.

3 统计序列紧空间的基本性质

本节讨论第 2 节中定义的统计序列紧空间的一些基本性质, 内容涉及遗传性质, 可和性质, 映射性质和可积性质等.

先说明怎样的可数紧空间是统计序列紧空间.

定理 3.1 若 X 是可数紧的统计序列空间, 则 X 是统计序列紧空间.

证明 任取 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 令 $A=\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$. 若 A 是有限集, 显然 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有收敛的子序列. 若 A 是无限集, 因为 X 是可数紧空间, 所以 A 至少有一个聚点 x. 令 $B=A\setminus\{x\}$, 则 B 不是闭集. 由 X 是统计序列空间知 B 不是统计序列闭集, 从而存在 B 中的序列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 使其在 X 中是统计收敛的, 于是 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 有统计收敛的子列. 故 X 是统计序列紧空间.

这表明例 2.5 给出的紧空间不是统计序列空间. 定理 3.1 可与 "可数紧的序列空间是序列紧空间" 相类比 [18]. 由于统计序列紧空间是可数紧空间, 所以统计序列紧的序列空间也是序列紧空间. 这一方面说明问题 2.6 中想找的统计序列紧空间不能是序列空间, 另一方面也说明有些文献在第一可数空间中讨论统计序列紧性只是给序列紧性或可数紧性多一些刻画而已.

问题 3.2 统计序列紧的统计序列空间是否是序列紧空间?

序列紧性是闭遗传性质和有限可和性. 下列统计序列紧空间的相应性质可直接验证.

定理 3.3 设 X 是统计序列紧空间. 若 F 是 X 的统计序列闭集, 则 F 是统计序列紧子集.

定理 3.4 设 $\{X_s\}_{s\in S}$ 是非空的拓扑空间族, 则 $\bigoplus_{s\in S}X_s$ 是统计序列紧空间当且仅当 S 是有限集且每一 X_s 是统计序列紧空间.

我们知道连续映射保持序列紧性 [15]. 为讨论更一般的保持统计序列紧性的映射, 引入如下定义.

定义 3.5 设 X,Y 是任意拓扑空间, 映射 $f:X\to Y$ 称为保持统计收敛映射, 若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中统计收敛于 x 的序列, 则序列 $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 Y 中统计收敛于 $f(x)$.

文 [14] 在讨论映射的连续性时使用了 "preserves limits of statistical sequences" 性质, 其本质和上述定义是一致的, 并且证明了: 拓扑空间上的连续映射是保持统计收敛映射 [14].

定理 3.6 设 X 是统计序列紧空间. 若 $f:X\to Y$ 是保持统计收敛的满映射, 则 Y 是统计序列紧空间.

证明 对 Y 中的任意序列 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 取定 X 中的序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

因为 X 是统计序列紧空间, 则存在 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于某 $x\in X$. 而 $f:X\to Y$ 是保持统计收敛映射, 所以 $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $f(x)\in Y$, 且 $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}\subset\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 从而 Y 是统计序列紧空间.

因为连续映射是保持统计收敛映射, 所以连续映射保持统计序列紧空间.

容易验证: 序列紧空间具有可数可积性 [15]. 例 2.5 表明统计序列紧空间不是任意可积性.

问题 3.7 统计序列紧空间是否具有可数可积性?

我们甚至不知两个统计序列紧空间的积空间是否是可数紧空间? 然而, 有下述结果成立.

定理 3.8 设 X 是序列紧空间, Y 是统计序列紧空间, 则 $X\times Y$ 是统计序列紧空间.

证明 任取 $X\times Y$ 中序列 $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 其中每一 $p_i=(x_i,y_i)$. 因为 X 是序列紧空间且 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset X$, 从而存在 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{x_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 收敛于某 $x\in X$. 由 Y 是统计序列紧空间且相应的子列 $\{y_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}\subset Y$, 于是存在 $\{y_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 的子列 $\{y_{i_{k_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{y_{i_{k_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于某 $y\in Y$. 这时, 序列 $\{(x_{i_{k_n}},y_{i_{k_n}})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $(x,y)\in X\times Y$. 事实上, 任取 (x,y) 在 $X\times Y$ 中的开邻域 $U\times V$. 由于 $\{x_{i_{k_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x\in X$, 存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得当 $n\geq n_0$ 时, $x_{i_{k_n}}\in U$. 这时

$$\{n\in\mathbb{N}:(x_{i_{k_n}},y_{i_{k_n}})\in U\times V\}\supset\{n\in\mathbb{N}:n\geq n_0\}\cap\{n\in\mathbb{N}:y_{i_{k_n}}\in V\}$$

又由于 $\{y_{i_{k_n}}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $y\in Y$, 则 $\delta(\{n\in\mathbb{N}:(x_{i_{k_n}},y_{i_{k_n}})\in U\times V\})=1$, 从而 $\{(x_{i_{k_n}},y_{i_{k_n}})\}_{n\in\mathbb{N}}$ 统计收敛于 $(x,y)\in X\times Y$. 故 $X\times Y$ 是统计序列紧空间.

参考文献

[1] Fast H. Sur la convergence statistique[J]. Colloquium Math, 1951, 2: 241-244.

[2] Steinhaus H. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique[J]. Colloquium Math, 1951, 2: 73-74.

[3] Connor J. The statistical and strong p-Cesáro convergence of sequences[J]. Analysis, 1988, 8: 47-63.

[4] Connor J. R-type summability methods, Cauchy criteria, P-sets and statistical convergence[J]. American Mathematical Society, 1992, 115: 319-327.

[5] Fridy J A. On statistical convergence[J]. Analysis, 1985, 5: 301-313.

[6] Fridy J A. Statistical limit points[J]. American Mathematical Society, 1993, 118: 1187-1192.

[7] Fridy J A, Khan M K. Tauberian theorems via statistical convergence[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1998, 228: 73-95.

[8] Miller H I. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1995, 347: 1811-1819.

[9] Çakalli H. A study on statistical convergence[J]. Functional Analysis, Approximation and Computation, 2009, 1(2): 19-24.

[10] Li K D, Lin S and Ge Y. On statistical convergence in cone metric spaces[J]. Topology and its Applications, 2015, 196: 641-651.

[11] Di Miao G, D R Kočinac Lj. Statistical convergence in topology[J]. Topology and its Applications, 2008, 156(1): 28-45.

[12] Niven I, Zuckerman H S, Montgomery H L. An Introduction to the Theory of Numbers, 4th ed[M]. New York: John Wiley, 1980.

[13] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice[J]. Fundamenta Mathematicae, 1965, 57: 107-115.

[14] Tang Z B, Lin F C. Statistical versions of sequential and Fréchet-Urysohn spaces[J]. Advances in Mathematics (China), 2015, 44: 945-954.

[15] Engelking R. General Topology (revised and completed edition)[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[16] 高国士. 拓扑空间论, 第二版 [M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[17] Çakalli H. Sequential definitions of compactness[J]. Applied Mathematics Letters, 2008, 21: 594-598.

[18] Vaughan J E. Countably compact and sequentially compact spaces[J]. Handbook of Set-theoretic Topology, 1984, 569-602.

On Statistically Sequentially Compact Spaces

LIU Li, TANG Zhong-bao, LIN Shou

(School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)

Abstract: In this paper, we introduce the statistical definition of sequential compact spaces in general topological spaces, discuss some topological properties on statistically sequential spaces and deepen some results on sequential compact spaces in topological groups and metrizable spaces.

Keywords: statistical convergence; sequentially compact spaces; statistically sequential spaces; statistically sequential compact spaces