Frink-Tukey 度量化引理

张可秀 [1], 林 寿 [1,2,*]

(1. 闽南师范大学 数学与统计学院, 福建 漳州 363000)
(2. 宁德师范学院 数学研究所, 福建 宁德 352100)

摘 要: 一致空间的度量化问题是一致空间的基本问题之一, 其主要工具是 Tukey 度量化引理. 证明在拓扑空间的度量化问题中起主要工具之一的 Frink 引理与 Tukey 度量化引理如出一辙, 可将它们称之为 Frink-Tukey 度量化引理.

关键词: 度量空间; 一致空间; Frink 引理; Tukey 度量化引理

1 引言

作为一种独立的结构, 一致空间理论在一般拓扑学的发展中起重要的作用 [1-2]. 近年来, 拟一致空间理论在拓扑代数、泛函分析等方向获得了新的应用 [3-4]. 无论是拓扑空间还是一致空间, 都极度关注空间的度量化问题. 如, 著名的 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理在一般拓扑学的发展进程中产生过至关重要的作用 [5]. 从覆盖列的观点, 最经典、最著名的度量化定理是如下的 Tukey 度量化定理.

定理 1.1 (Tukey 度量化定理 [1-6]) 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_0 的且存在开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ 满足:

i) 每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathcal{U}_n$, $\forall n\in\omega$;

ii) $\{\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)\}_{n\in\omega}$ 形成点 $x\in X$ 的邻域基.

1923 年, Alexandroff 和 Urysohn[1] 曾给出过比定理 1.1 稍弱些的度量化定理 (见 [1]), 所以有文献把上述定理称为 Alexandroff-Urysohn 度量化定理 [1]. 在一般拓扑空间上建立度量化定理的困难主要在于合适度量的构造和度量性的恰当分解. Frink 引理或 Tukey 度量化引理提供了构造度量的有效方法.

映射 $d: X\times X\to[0,+\infty)$ 称为对称的, 如果对于每一 $x,y\in X$ 有 $d(x,y)=d(y,x)$. 在本文中, 记 $\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$.

定理 1.2 (Frink 引理 [7-8]) 设 (对称的) 映射 $d: X\times X\to[0,+\infty)$ 满足: $\forall\varepsilon>0$, 如果 $d(x,y)<\varepsilon$, $d(y,z)<\varepsilon$, 则 $d(x,z)<2\varepsilon$. 那么存在 (对称的) 映射 $\rho: X\times X\to[0,+\infty)$ 满足: 对所有 $x,y,z\in X$, 有

i) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

ii) $d(x,y)/4\leqslant\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.

收稿日期: 2014-05-04
资助项目: 国家自然科学基金 (11171162,11471153)
* 通信作者

对于集合 X, 集合 $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ 称为 $X\times X$ 的对角线. 设 $D\subset X\times X$. D 称为对称的, 如果 $(x,y)\in D$, 则 $(y,x)\in D$. D 称为 Δ 的对称域, 如果 $\Delta\subset D$ 且 D 是对称的. 记

$$D\circ D=\{(x,y):\text{存在 } z\in X \text{ 使得 } (x,z),(z,y)\in D\},$$

称为 D 的复合关系.

定理 1.3 (Tukey 度量化引理 [1-6]) 设 $\{D_i\}_{i\in\omega}$ 是积集 $X\times X$ 的对角线 Δ 的对称域且满足

$$D_0=X\times X;\ D_{i+1}\circ D_{i+1}\circ D_{i+1}\subset D_i,\ i\in\omega$$

则存在集 X 上的伪度量 $\rho:X\times X\to[0,1]$ 使得

$$D_{i+1}\subset\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant 1/2^{i+1}\}\subset D_i,\ i\in\omega$$

Frink 引理是证明拓扑空间度量化定理的关键, Tukey 度量化引理是证明一致空间度量化定理的关键 [9]. 本文首先给出两种 Tukey 型的度量化引理 (见定理 2.1 和定理 2.2), 主要目的在于说明 Frink 引理和 Tukey 型的度量化引理本质上是等价的 (见定理 2.2 和定理 3.1), 因而这两条引理可统一称之为 Frink-Tukey 度量化引理. 在实际的应用过程中, 可依据具体条件分别选用. 由此, 我们不仅可以按统一的观点来考量拓扑空间或一致空间的度量化定理, 同时为挖掘更具有一般性的广义度量性质提供了一条可供探索的途径.

2 关于 Tukey 度量化引理

Tukey 度量化引理的证明大都建立在较复杂的归纳论证上 [1-9]. 尽管 Frink 引理的证明也是构造性的, 但其证明相对较简单 [8-9]. 由 Frink 引理, 不仅可简化 Tukey 度量化引理的证明, 而且可导出下述更一般的 Tukey 型度量化引理.

定理 2.1 设 $\{D_i\}_{i\in\omega}$ 是积集 $X\times X$ 的 (对称的) 子集列且满足

$$D_0=X\times X;\quad D_{i+2}\circ D_{i+2}\subset D_{i+1}\subset D_i,\forall i\in\omega.$$

则存在 (对称的) 映射 $\rho:X\times X\to[0,1]$ 使对所有 $x,y,z\in X$, 有

i) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

ii) $D_{i+2}\subset\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant 1/2^{i+2}\}\subset D_i$, $\forall i\in\omega$.

证明 按下述方式定义 (对称的) 映射 $d:X\times X\to[0,1]$: 对于每一 $x,y\in X$,

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\bigcap_{i=0}^{\infty}D_i\\ 1/2^i, & (x,y)\in D_i-D_{i+1}, i\in\omega\end{cases}$$

则 d 的值型如 0 或 $1/2^i$ 且 $d(x,y)\leqslant 1/2^i\Leftrightarrow(x,y)\in D_i, i\in\omega$.

下面验证 $d(x,y)$ 满足定理 1.2 (Frink 引理) 的条件, 即 $\forall\varepsilon>0,\forall x,y,z\in X$,

$$d(x,y)<\varepsilon,\ d(y,z)<\varepsilon\Rightarrow d(x,z)<\varepsilon$$

取最小自然数 n 使得 $1/2^n<\varepsilon$, 则 $d(x,y)\leqslant 1/2^n, d(y,z)\leqslant 1/2^n$, 于是 $(x,y),(y,z)\in D_n$, 从而 $(x,z)\in D_n\circ D_n\subset D_{n-1}$, 因此 $d(x,z)\leqslant 1/2^{n-1}<2\varepsilon$.

由定理 1.2, 存在 (对称的) 映射 $\rho:X\times X\to[0,+\infty)$, 使得对 $\forall x,y,z\in X$, 有

1) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

2) $d(x,y)/4\leqslant\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.

对于每一 $i\in\omega$, 设 $E_i=\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant 1/2^{i+2}\}$. 我们要证明 $D_{i+2}\subset E_i\subset D_i$.

若 $(x,y)\in D_{i+2}$, 则 $d(x,y)\leqslant 1/2^{i+2}$, 由 (2) 式的第二个不等式得 $\rho(x,y)\leqslant d(x,y)\leqslant 1/2^{i+2}$, 所以 $(x,y)\in E_i$. 另一方面, 若 $(x,y)\in E_i$, 即 $\rho(x,y)\leqslant 1/2^{i+2}$, 由 (2) 式的第一个不等式得 $d(x,y)\leqslant 4\rho(x,y)\leqslant 1/2^i$, 所以 $(x,y)\in D_i$.

上述定理条件中的集列 $\{D_i\}$ 的复合关系较 Tukey 度量化引理简单且不要求为对角线 Δ 的对称域. 映射 $\rho: X\times X\to[0,+\infty)$ 称为集 X 上的拟伪度量 (quasi-pseudo-metric), 如果对于 $\forall x,y,z\in X$, 有 $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$. 拟伪度量生成集上的拟一致结构 (quasi-uniform structure)[4]. 仿拓扑群 (paratopological topological group) 具有拟一致结构 [4].

由于可数性的限制, Tukey 度量化引理本质上只适用于可度量的一致空间. 对于未必可度量化的一致空间, 本文提出下一形式的 Tukey 度量化引理.

定理 2.2 设 $\{D_\varepsilon\}_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}$ 是积集 $X\times X$ 的 (对称的) 子集族且满足

$$\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+} D_\varepsilon = X\times X,\quad D_{\varepsilon/2}\circ D_{\varepsilon/2}\subset D_\varepsilon\subset D_\delta, \forall\delta>\varepsilon\in\mathbb{R}^+$$

则存在 (对称的) 映射 $\rho: X\times X\to[0,+\infty)$ 使对所有 $x,y,z\in X$, 有

i) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

ii) $D_{\varepsilon/4}\subset\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant\varepsilon/4\}\subset D_\delta$, $\delta>\varepsilon\in\mathbb{R}^+$.

证明 定义 (对称的) 映射 $d: X\times X\to[0,+\infty)$ 如下:

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}D_\varepsilon,\\ \sup\{\varepsilon\in\mathbb{R}^+:(x,y)\notin D_\varepsilon\}, & (x,y)\notin\bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{R}^+}D_\varepsilon\end{cases}$$

则对于每一 $x,y\in X$ 及 $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, 由 sup 的性质知, $d(x,y)<\varepsilon\Rightarrow(x,y)\in D_\varepsilon\Rightarrow d(x,y)\leqslant\varepsilon$.

下面验证 $d(x,y)$ 满足 Frink 引理 (定理 1.2) 的条件. $\forall\varepsilon>0$, 设 $d(x,y)<\varepsilon$, $d(y,z)<\varepsilon$. 取 δ 使其满足 $\max\{d(x,y),d(y,z)\}<\delta<\varepsilon$, 则 $d(x,y)<\delta, d(y,z)<\delta$, 于是 $(x,y)\in D_\delta$, $(y,z)\in D_\delta$, 所以 $(x,z)\in D_\delta\circ D_\delta\subset D_{2\delta}$, 于是 $d(x,y)\leqslant 2\delta<2\varepsilon$.

由 Frink 引理, 存在 (对称的) 映射 $\rho: X\times X\to[0,+\infty)$, 使得对 $\forall x,y,z\in X$, 有

1) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

2) $d(x,y)/4\leqslant\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.

为了完成此定理的证明, 还要证明 $D_{\varepsilon/4}\subset\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant\varepsilon/4\}\subset D_\delta$, $\delta>\varepsilon\in\mathbb{R}^+$.

令 $E=\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant\varepsilon/4\}$. 若 $(x,y)\in E$, 即 $\rho(x,y)\leqslant\varepsilon/4$, 由 (2) 式的第一个不等式得 $d(x,y)\leqslant 4\rho(x,y)\leqslant\varepsilon<\delta$, 所以 $(x,y)\in D_\delta$. 另一方面, 若 $(x,y)\in D_{\varepsilon/4}$, 则 $d(x,y)\leqslant\varepsilon/4$, 由 (2) 式的第二个不等式得 $\rho(x,y)\leqslant\varepsilon/4$, 所以 $(x,y)\in E$. 因而, $D_{\varepsilon/4}\subset E\subset D_\delta$.

3 关于 Frink 引理

Frink 引理的论证, 一般通过 d 之求和的下确界来构造 ρ, 验证过程使用归纳法 [5]. 利用定理 2.2, 也可导出 Frink 引理, 过程较直接, 同时亦说明了这两个引理的等价性.

定理 3.1 (Frink 引理 [7–8]) 设 (对称的) 映射 $d: X\times X\to[0,+\infty)$ 满足: $\forall\varepsilon>0$, 若 $d(x,y)<\varepsilon$, $d(y,z)<\varepsilon$, 则 $d(x,z)<2\varepsilon$, 那么存在 (对称的) 映射 $\rho: X\times X\to[0,+\infty)$ 满足: 对所有 $x,y,z\in X$, 有

i) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

ii) $d(x,y)/4\leqslant\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.

证明 对于每一 $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, 定义

$$D_\varepsilon = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leqslant \varepsilon\}$$

即 $(x,y) \in D_\varepsilon \Leftrightarrow d(x,y) \leqslant \varepsilon$.

下面验证 (对称的) 子集族 $\{D_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+}$ 满足定理 2.2 的条件. 显然, $\bigcup_{\varepsilon \in \mathbb{R}^+} D_\varepsilon = X \times X$, 且对于 $\delta > \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, 有 $D_\varepsilon \subset D_\delta$. 下面说明: $D_{\varepsilon/2} \circ D_{\varepsilon/2} \subset D_\varepsilon$. $\forall (x,z) \in D_{\varepsilon/2} \circ D_{\varepsilon/2}$, 则存在 $y \in X$, 使得 $(x,y) \in D_{\varepsilon/2}$, $(y,z) \in D_{\varepsilon/2}$. 由 D_ε 的定义可以知道 $d(x,y) \leqslant \varepsilon/2$, $d(x,y) \leqslant \varepsilon/2$. 注意到, 文 [10] 证明了: 映射 $d : X \times X \to [0,+\infty)$ 满足的条件:

$$\forall \varepsilon > 0,\ d(x,y) < \varepsilon, d(y,z) < \varepsilon \Rightarrow d(x,z) < 2\varepsilon$$

等价于

$$\forall \varepsilon > 0,\ d(x,y) \leqslant \varepsilon, d(y,z) \leqslant \varepsilon \Rightarrow d(x,z) \leqslant 2\varepsilon$$

故 $d(x,z) \leqslant \varepsilon$, 所以 $(x,z) \in D_\varepsilon$.

由定理 2.2, 存在 (对称的) 映射 $\rho : X \times X \to [0,+\infty)$ 使对所有 $x,y,z \in X$, 有

1) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$;

2) $D_{\varepsilon/4} \subset \{(x,y) : \rho(x,y) \leqslant \varepsilon/4\} \subset D_\delta$, $\delta > \varepsilon \in \mathbb{R}^+$.

最后, 要证明不等式 $d(x,y)/4 \leqslant \rho(x,y) \leqslant d(x,y)$ 成立. 设 $(x,y) \in X \times X$. 不妨设 $d(x,y) > 0$. 先令 $\varepsilon = 4d(x,y)$, 则 $(x,y) \in D_{\varepsilon/4}$, 由 ρ 满足的条件 (2), $\rho(x,y) \leqslant \varepsilon/4 = d(x,y)$. 另一方面, 如果 $4\rho(x,y) < d(x,y)$, 取 $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$ 满足:

$$4\rho(x,y) < \varepsilon < \delta < d(x,y)$$

则 $\rho(x,y) \leqslant \varepsilon/4$, 由 ρ 满足的条件 (2), $(x,y) \in D_\delta$, 从而 $d(x,y) \leqslant \delta < d(x,y)$, 矛盾. 故, $d(x,y)/4 \leqslant \rho(x,y)$.

参考文献

[1] Engelking R. General Topology (revised and completed edition)[M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[2] Isbell J R. Uniform Spaces[M]. Providence, 1964.

[3] Arhangel'skiĭ A V, Tkachenko M G. Topological Groups and Related Structures[M]. Atlantis Press, Paris; World Scientific, Hackensack, N J, 2008.

[4] Künzi H P A. An introduction to quasi-uniform spaces[J]. Contemp Math, 2009, 486: 239-304.

[5] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2007.

[6] Tukey J M. Convergence and Uniformity in Topology[M]. Ann Math Studies 2. Princeton, 1940.

[7] Frink A H. Distance functions and the metrization problem[J]. Bull Amer Math Soc, 1937, 43: 133-142.

[8] Gruenhage G. Generalized metric spaces. In: Kunen K, Vaughan J E. eds Handbook of Set-theoretic Topology[M]. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1984, 423-501.

[9] 高国士. 拓扑空间论 [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2008.

[10] 张静. Frink 引理的注记 [J]. 数学研究, 2010, 43: 167–170.

[11] Alexandroff P S, Urysohn P. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D)[J]. C R Acad Paris, 1923, 177: 1274-1276.

Frink-Tukey Metrization Lemma

ZHANG Ke-xiu[1], LIN Shou[1,2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, China)
(2. Institute of Mathmatics, Ningde Normal University, Ningde 352100, China)

Abstract: Metrization of uniform spaces is one of basic problems of the theory of uniform spaces, its main tool is the Tukey's metrization lemma. This paper proves that the Tukey's metrization lemma and the Frink's lemma, which is one of the main tool in metrization of the theory of topological spaces, are equivalent, thus they can be called Frink-Tukey metrization lemma.

Keywords: metric space; uniform space; frink's lemma; tukey's metrization lemma.