第42卷第2期
2013年4月

数学进展
ADVANCES IN MATHEMATICS

Vol.42, No.2
April, 2013

几类度量空间映像的研究

林 寿[1,2,*], 朱忠景[1,**]

(1. 漳州师范学院数学与信息科学系, 漳州, 福建, 363000; 2. 宁德师范学院数学研究所, 宁德, 福建, 352100)

摘要: 本文以 1961 年 Alexandroff 提出的映射与空间相互关系的思想为线索, 有选择地介绍一些关于度量空间映像研究的新老问题及其结果, 主要围绕序列覆盖映射的引入及其作用展开讨论, 介绍某些弱第一可数空间类, 如序列空间、Fréchet 空间、强 Fréchet 空间、严格 Fréchet 及其双序列空间等与度量空间的映射联系, 阐述用映射刻画空间的精髓, 彰显布拉格拓扑学会议的持久魅力.

关键词: Alexandroff 设想; 序列覆盖映射; 可数双商映射; 强 Fréchet 空间; 第一可数空间

MR(2000) 主题分类: 54B15; 54C10; 54D55; 54E40 / **中图分类号:** O189.1

文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2013)02-0129-09

0 引言

捷克斯洛伐克科学院 (CAS) 与国际数学联盟 (IMU) 于 1961 年在布拉格召开了第 1 届 "一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系" 的学术会议 (Topological Symposium, International Conference on General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra), 简称布拉格拓扑学会议 [1]. 自 1961 年起, 布拉格拓扑学会议每五年召开一次. 第 11 届布拉格拓扑学会议于 2011 年 8 月 7 日–13 日在布拉格召开, 主题是纪念布拉格拓扑学会议 50 周年 (见 http://www.toposym.cz/index.html). 在 1961 年的会议上, 苏联科学院院士 Alexandroff(苏, 1896–1982) 作了关于拓扑空间及其连续映射的著名演讲 [2], 提出了用映射研究空间的设想, 即将各式各样的空间类通过映射作为纽带把它们联系在一起, 然后按空间类与映射类之间的不同而分门别类地进行研究. 在过去的 50 年间, 探讨度量空间映像理论的论文或综述报告已大量发表. 该课题已成为一般拓扑学发展的经典研究方向, 为学科的进步与繁荣做出了突出的贡献 [3–5].

Alexandroff 设想是一个庞大和影响深远的研究方向. 在 1961 年布拉格国际拓扑学会议 30 周年之际, 本文第一作者曾撰文 "关于 Arhangel'skiĭ 的 '映射与空间'" [6] 综述了该方向对于一般拓扑学及集论拓扑学产生的持续推动作用. 在 Alexandroff 的论文 [2] 发表 50 周年之际, 本文仅以 "序列覆盖映射" 的一篇论文为切入点, 试图从一个侧面说明关于映射与空间相互分类思想的来龙去脉以及它对激发新的研究工作的重要性.

在为数众多的论文中, Frank Siwiec(美, 1941–) 的论文 "Sequence-covering and countably bi-quotient mappings, *General Topology Appl.*, 1971, 1: 143-154" 应被列入 "空间与映射专题" 必读的经典文献. 在 Siwiec 的论文发表后的 40 年间, 关于度量空间映像理论的研究已表明序列覆盖映射的思想成为联接分析与拓扑之间的重要桥梁, 可数双商映射编织了介于伪开映射与开映射或完备映射之间的美丽纽带. 1999 年, 燕鹏飞 [7, 定理 3.4.4] 证明了 "闭的序列覆盖映射保持可度量性". 2008 年, Sakai[8] 证明了 "闭的可数双商映射保持 $\aleph$ 空间". 这仅是众多成就中一些突出的例子. 据谷歌学术搜索查寻, 引用过上述 Siwiec 的论文的国外知名作者有 Arhangel'skiĭ, Boone,

收稿日期: 2011-10-10. 修改稿收到日期: 2011-12-05.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 10971185, No. 11171162).
E-mail: * shoulin60@163.com; ** jin860514@163.com

Dolecki, Foged, Gruenhage, Mancuso, Michael, Nagami, Nogura, Olson, Sakai, Shakhmatov, Simon, Suzuki, Tamano, Tanaka 等. 国内也有为数不少同行的论著引用了 Siwiec 的论文, 我们就是其中最大的受益者 [7, 9].

作为一个插曲, 在此简要介绍 Siwiec. Frank Siwiec 的第一篇论文是 1968 年与 Nagata(日, 1925–2007) 合作发表的关于 σ 空间的优秀论文, 证明了在正则空间中具有 σ 离散网络、具有 σ 局部有限网络与具有 σ 闭包保持网络的空间是相互等价的, 这结果毫无疑问堪称广义度量空间理论中最亮丽的明珠之一. 1972 年, Siwiec 于美国匹兹堡大学获得数学博士学位 (导师 Nagata 教授). 1968 年至 1976 年, Siwiec 共发表 12 篇论文. 1977 年起他转行从事程序设计工作, 拓扑生涯至此落幕. 1979 年, Siwiec 进入美国电话电报公司 (AT & T), 至 2003 年退休.

20 世纪 90 年代前后, 在国际上关于序列覆盖映射的研究已较少见于文献报道. 此时, 国内关于广义度量空间的研究正如火如荼. 1987 年, 高智民 [10] 引入 "cs^* 网络"(cs^*-network) 研究广义度量空间, 为充分展示序列覆盖映射等映射类的作用提供了不可多得的平台. 此后, 几类序列覆盖映射的引入为步履维艰的 "空间与映射理论" 拓展了研究的广度、注入了新鲜的活力. 正是因为国内学者的一系列工作, 致使 "序列覆盖映射类" 更深入的作用为人所知、形成了推进课题发展的核心问题, 并使 "序列覆盖映射" 在沉寂多年后重回乐园. 至今, 关于序列覆盖映射类的研究已形成了空前繁荣的局面, 国内学者用这些映射类探索广义度量性质的论文不断涌现, 同时也有部分国外学者在我们的基础上获得了更进一步的工作, 再现了广义度量空间理论的昌盛情景 [5].

尽管人们对于序列覆盖映射及可数双商映射已有相当深入的了解, 其各种性质亦广为人知, 作为本文论述的主线索有必要重提 Siwiec 文 [11] 中给出的三个问题.

Siwiec[11] 证明了第一可数空间上的几乎开映射是序列覆盖映射.

问题 0.1[11, 问题 2.8(a)] Fréchet 空间上的几乎开映射是否为序列覆盖映射?

问题 0.2[11, 问题 2.8(b)] 给出空间 X 的内在刻画, 使其满足: 定义于 X 上的每一几乎开映射是序列覆盖映射.

Siwiec[11, P. 153] 指出下述猜测是不正确的: 空间 Y 是双序列空间当且仅当到 Y 上的每一序列覆盖映射是双商映射. Siwiec 同时提出了下述问题.

问题 0.3[11, 问题 4.5] 修正上述叙述以刻画双序列空间 1.

对于度量空间的映像, 我们曾在著作《广义度量空间与映射》[5] 中给予了专门的论述, 主要阐明了度量空间关于商映射、开映射、闭映射、紧覆盖映射、ss 映射、紧映射等的研究结果. 本文的目的是围绕上述问题以及序列覆盖映射, 介绍关于度量空间映像研究的一些进展, 同时提出一些问题供有兴趣的读者研究. 特别声明的是, 问题 0.1 和问题 0.3 已由 Yanagimoto[12] 给予回答. 伴随着问题 0.3 的解决, "集列覆盖映射" 的概念及相关工作被引出, 这或许是当前映射与空间理论中最值得进一步探讨的课题之一.

如未事先说明, 本文所论映射都是连续的满射. 未定义的术语及简单的学科历史概述请参考 Engelking 的著作 [13].

1 强 Fréchet 空间

本节介绍几个熟知的弱第一可数空间类 2. 关于弱第一可数空间类的详细介绍推荐读者阅读文献 [15], 其中包含有弱第一可数空间类的形成、关系、72 个例子与 414 篇文献.

1 Siwiec [11, 问题 4.5] 还涉及一个第一可数空间的子问题, 由于不在本文讨论的范围内, 没有引用.

2 本文中的 "弱第一可数空间类" 意指第一可数空间类的推广. 在文献中有一类空间就称为 "弱第一可数空间"(weakly first countable space), 也称 "gf 可数空间"(gf-countable space[14]), 本文不予涉及. 这空间类是由弱基 (见定义 3.1) 定义的, 第一可数空间 ⇒ 弱第一可数空间 ⇒ 序列空间.

在分析学中收敛序列是最基本的论述对象. 对于拓扑空间中收敛序列的研究导出了序列空间和 Fréchet 空间的概念. 空间 X 称为*Fréchet*空间(Fréchet space[16]), 若 $x \in \overline{A} \subset X$, 则存在由 A 中元组成的序列收敛于 x. 空间 X 称为*序列空间*(sequential space[16]), 若 X 的子集 A 关于收敛序列是封闭的 (称 A 为序列闭集), 则 A 是 X 的闭集. 显然, 第一可数空间是 Fréchet 空间, Fréchet 空间是序列空间. 由度量空间及其特定的映像揭示了这些空间类的本质联系.

设映射 $f: X \to Y$. f 称为*几乎开映射*(almost open map), 若对于每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$, 使得 x 在 X 中的每一邻域关于 f 的像是 y 在 Y 中的邻域. f 称为*伪开映射*(pseudo-open map), 若对于每一 $y \in Y$, 如果 X 中的开集 U 包含 $f^{-1}(y)$, 则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

闭映射与几乎开映射都是伪开映射. 伪开映射是商映射. 而连结从序列空间到度量空间、Fréchet 空间到度量空间的 "桥梁" 分别是商映射与伪开映射.

定理 1.1[16] (1) 空间 X 是序列空间当且仅当 X 是度量空间的商映像.

(2) 空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 是度量空间的伪开映像.

从映射的角度, 序列空间与 Fréchet 空间的区别在于商映射与伪开映射的区别. 如何确保映入一空间上的商映射是伪开映射? Whyburn(美, 1904–1969) 解决了这一问题. 空间 X 称为*可达空间*(accessibility space[17]), 若 x 是 X 的子集 A 的聚点, 则存在 X 的闭集 C 使得 x 是 C 的聚点, 但 x 不是 $C \setminus A$ 的聚点.

T_2 的 Fréchet 空间是可达空间. 但 T_1 的第一可数空间未必是可达空间. 如令 X 是自然数集 $\mathbb{N}$ 赋予有限余拓扑, 则 X 是第一可数的 T_1 空间. 让 $A = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}$, 则 0 是 A 的聚点, 若 C 是 X 的闭集且 0 是 C 的聚点, 则 $C = X$, 于是 0 仍是 $C \setminus A$ 的聚点. 从而, X 不是可达空间.

定理 1.2[17] T_1 空间 Y 是可达空间当且仅当到 Y 上的每一商映射是伪开映射.

定理 1.1 表明了商映射和伪开映射的重要性. 但是即使两个闭映射的乘积映射也未必是商映射. 有不少条件可保证两个商映射之积是商映射, 典型的是映射的 "极限提升" 性质. 映射 $f: X \to Y$ 称为*极限提升映射*(limit lifting map[18]), 若 Y 中的网 $\{y_d\}$ 收敛于点 y, 则存在 X 中的网 $\{x_\delta\}$ 收敛于某点 $x \in f^{-1}(y)$ 使得 $\{f(x_\delta)\}$ 是 $\{y_d\}$ 的一个子网. 极限提升性质引出了双商性质的概念, 即寻求的积映射的商映射性质.

定理 1.3[18] 对于 T_2 空间 Y 及映射 $f: X \to Y$, 下述条件等价:

(1) f 是极限提升映射;

(2) 对于每一空间 Z, $f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ 是极限提升映射;

(3) (bi-quotient) 对于每一空间 Z(可设为 T_2 的仿紧空间), $f \times \mathrm{id}_Z : X \times Z \to Y \times Z$ 是商映射.

在 Hájek[18] 的论文发表后, Michael[19] 用单一映射刻画了双商性质, 即映射 $f: X \to Y$ 满足: 对于每一 $y \in Y$, 若 X 的开子集族 $\mathcal{U}$ 覆盖 $f^{-1}(y)$, 则存在有限的 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ 使得 $f(\bigcup \mathcal{U}')$ 是 y 在 Y 中的邻域. 由此, Michael 引入了*双商映射*(bi-quotient map[19]) 的概念. 也许, 正是由于双商映射与极限提升映射的关系, 启发 Siwiec 定义了 "可数双商映射" 与 "序列覆盖映射".

设映射 $f: X \to Y$. f 称为*可数双商映射*(countably bi-quotient map[11]), 若 $y \in Y$ 且 X 的可数的开集族 $\mathcal{U}$ 覆盖 $f^{-1}(y)$, 则存在有限的 $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ 使得 $f(\bigcup \mathcal{U}')$ 是 y 的邻域. f 称为*序列覆盖映射*(sequence-covering map[11]), 若 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 则存在 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in f^{-1}(y)$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

显然, 可数双商映射是伪开映射. 对照定理 1.1 和定理 1.2, 如何刻画度量空间的可数双商映像? 如何刻画 "每一商映射是可数双商映射" 的空间? 这就是所谓的 "强 Fréchet 空间" 和 "强可

达空间".

空间 X 称为强 *Fréchet* 空间(strongly Fréchet space[11]), 若 $\{A_n\}$ 是 X 中递减的集列且点 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, 则存在 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 且每一 $x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$. 空间 X 称为强可达空间(strong accessibility space[11]), 如果 $\{A_n\}$ 是空间 X 的递减的集列且点 x 是每一 A_n 的聚点, 则存在 X 的闭子集 C 使得 x 是 C 的聚点, 但是对于每一 $n \in \mathbb{N}$, x 不是 $C\backslash A_n$ 的聚点.

定理 1.4[11] (1) 空间 X 是强 Fréchet 空间当且仅当 X 是度量空间的可数双商映像.

(2) T_1 空间 Y 是强可达空间当且仅当每一到 Y 上的商映射是可数双商映射.

在 T_2 空间中有下述关系, 但都不可逆 [11]:

$$\begin{array}{ccc} \text{强 Fréchet 空间} & \Longrightarrow & \text{强可达空间} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{Fréchet 空间} & \Longrightarrow & \text{可达空间.} \end{array}$$

对每一 $p \in \beta\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$, 让 $X = \mathbb{N}\cup\{p\}$, 赋 X 予 $\beta\mathbb{N}$ 的子空间拓扑, 则 X 是强可达空间 [11, 例 1.9], 但 X 不是 k 空间 3.

提醒读者关注下述问题.

1978 年, Yanagimoto[12] 构造例子给予问题 0.1 以否定回答.

问题 1.5 强 Fréchet 空间上的几乎开映射是否序列覆盖映射?

问题 1.6[20] 闭的序列覆盖映射是否保持强 Fréchet 空间性质?

问题 1.7[21] 刻画空间 Y 使得到 Y 上的每一闭映射是可数双商映射.

由上述问题可想到如何 "刻画空间 Y 使得到 Y 上的每一伪开映射是可数双商映射". Michael (美, 1925–) 等定义了严格弱于强可达空间的 "严格 A 空间"(strict A-space[21]), 刻画了这一性质.

至此, 我们以商映射与序列空间、伪开映射与 Fréchet 空间及可数双商映射与强 Fréchet 空间中的研究花絮窥视了映射与空间相互分类的大致轮廓及基本思路. 套用 1623 年伽利略 (意, 1564–1642) 在《试金者》(The Assayer) 中的一段名言 4: *一般拓扑学*(哲学) 被写在宇宙这部永远在我们眼前打开着的大书上, 我们只有学会并熟悉它的语言和符号以后才能读懂这部书. 它是用*空间与映射*(数学) 语言写成的, 字母是*开集、闭集、同胚、连续以及其它概念*(三角形、圆以及其它几何图形).

20 世纪 60 年代, 正当一般拓扑学的百花园繁花似锦之时, Alexandroff 既向我们吹响了通向 "珠峰" 的气势磅礴之嘹亮号角, 同时为我们提供了辟山跨堑的美妙绝伦之精良装备. 如何在具体的空间上实现 Alexandroff 设想还有很长和艰巨的路要走, 其前景充满希望又扑朔迷离. Arhangel'skiĭ[14](俄, 1938–) 的著名综述报告既描绘了 "映射" 帝国的壮丽景象, 又开启了 "空间" 时代的漫漫征程.

2 严格 Fréchet 空间、双序列空间

从本节起, 我们将朝着 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 指明的方向, 介绍国内外学者关于弱第一可数空间类及序列覆盖映射的相互关系, 包含关于度量空间映像研究的相关问题.

首先, 我们把意图放在强 Fréchet 空间的加强上, 即不要求空间集列递减的条件. 空间 X 称为*严格 Fréchet 空间*(strictly Fréchet space[22]), 若 $\{A_n\}$ 是空间 X 的集列且 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, 则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in A_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

---

3 拓扑空间 X 称为 k 空间(k-space[13]), 若 X 的子集 A 与 X 的每一紧子集 K 的交是 K 的闭集, 则 A 是 X 的闭集. 序列空间是 k 空间.

4 楷书为替换语, 括号内为伽利略原话.

下面是严格 Fréchet 空间的重要刻画.

定理 2.1[23] 设 X 是严格 Fréchet 空间. 若 $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$, 则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{b_m\}$ 满足: 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, $\{m \in \mathbb{N} : b_m \in A_n\}$ 是无限集.

在较早的一些文献中, 严格 Fréchet 空间也称为 w 空间(w-space[24–25]). 显然, 有下述关系, 但均不可逆 [26]:

第一可数空间 $\Longrightarrow$ 严格 Fréchet 空间 $\Longrightarrow$ 强 Fréchet 空间 $\Longrightarrow$ Fréchet 空间.

在映射性质方面, 朱建平 [27] 定义了 w 映射 (w-map) 以研究 w 空间. 如给出了 w 映射的刻画, 证明了 w 映射保持 w 空间等. 在此, 把 w 映射重新命名为 “严格可数双商映射”.

映射 $f: X \to Y$ 称为*严格可数双商映射*(strictly countably bi-quotient map), 如果 $y \in Y$ 且 X 的开子集的可数族 $\mathcal{U}$ 覆盖 $f^{-1}(y)$, 则存在 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

简单的关系如下, 其逆均不成立:

$$\begin{array}{ccccc} \text{几乎开映射} & \Longrightarrow & \text{严格可数双商映射 } (= w \text{ 映射}) & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \\ \text{双商映射} & \Longrightarrow & \text{可数双商映射} & \Longrightarrow & \text{伪开映射}. \end{array}$$

由定理 2.1 作为过渡, 依照空间与映射相互分类的思想, 利用严格可数双商映射可获得严格 Fréchet 空间与度量空间的映射联系, 序列覆盖映射的作用由此得以充分显现.

定理 2.2[27] 下述条件相互等价:

(1) X 是严格 Fréchet 空间;

(2) X 是某一度量空间的严格可数双商映像.

在定理 2.2 的证明中, 起关键作用的是序列覆盖映射及度量空间的构造. 就本文的主题而言, 与问题 0.2 和问题 1.5 相关, 提出下述问题.

问题 2.3 度量空间上的严格可数双商映射是否序列覆盖映射?

问题 2.4 严格 Fréchet 空间上的几乎开映射是否序列覆盖映射?

关于 Fréchet 空间, 强 Fréchet 空间, 严格 Fréchet 空间中最引人迷恋的课题之一是这些空间的乘积性问题 [28].

本节的第二部分内容是介绍问题 0.3 的解答. 引言部分介绍了双商映射的来源. 为刻画度量空间的双商映像, Michael[29] 引入了 “双序列空间”. 空间 X 称为*双序列空间*(bi-sequential space[29]), 若 X 中的滤基 $\mathcal{F}$ 具有接触点 $x \in X$, 则存在 X 的递减的集列 $\{A_n\}$ 使得 $\{A_n\}$ 网状交于 $\mathcal{F}$ 且收敛于 x, 其中, (1) X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为*滤基*, 若对于每一 $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, 存在 $F_3 \in \mathcal{F}$ 使得 $\emptyset \neq F_3 \subset F_1 \cap F_2$; (2) $x \in X$ 称为 $\mathcal{F}$ 的*接触点*, 若 $x \in \bigcap\{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$; (3) 称集列 $\{A_n\}$ *收敛*于 x, 若 U 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得当 $n \geq m$ 时有 $A_n \subset U$; (4) 称集族 $\mathcal{A}$ *网状交于*集族 $\mathcal{F}$, 若 $\mathcal{A}$ 中的每一元与 $\mathcal{F}$ 中的每一元相交.

解决 1971 年 Siwiec[11] 提出的问题 0.3 之关键技术是同年 Michael[30] 给出的.

引理 2.5[30, 定理 4.4] 对于任一空间 Y, 存在度量空间 X 及映射 $f: X \to Y$ 具有下述性质: 如果 $\{A_n\}$ 是某点 $y \in Y$ 的递减的网络, 则存在 $x \in f^{-1}(y)$ 及 x 在 X 中递减的邻域基 $\{C_n\}$ 使得每一 $f(C_n) = A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

空间 Y 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为 $y \in Y$ 的*网络*(network), 如果 $y \in \bigcap \mathcal{F}$, 并且若 U 是 y 的邻域, 则存在 $F \in \mathcal{F}$ 使得 $F \subset U$.

1978 年, Yanagimoto[12] 注意到了 Michael 的上述引理, 引入了 “集列覆盖映射” 的概念. 映射 $f: X \to Y$ 称为*集列覆盖映射*(set-sequence-covering map[12]), 若 $\{A_n\}$ 是 Y 中收敛于 y 的递减集列, 则存在 $x \in f^{-1}(y)$ 及 X 中收敛于 x 的递减集列 $\{B_n\}$ 使得每一 $f(B_n) = A_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

为了方便起见，若空间 X 中递减的集列 $\{A_n\}$ 收敛于 x，记为 $A_n \downarrow x$. 引理 2.5 中的映射就是集列覆盖映射. 事实上，设映射 $f: X \to Y$ 具有引理 2.5 所述的性质，如果在 Y 中集列 $A_n \downarrow y$，那么 $\{A_n \cup \{y\}\}$ 是 y 的网络，于是存在 $x \in f^{-1}(y)$ 及 x 在 X 中递减的邻域基 $\{C_n\}$ 使得每一 $f(C_n) = A_n \cup \{y\}$. 不妨设每一 $A_n \not\ni y$，让 $B_n = C_n \setminus f^{-1}(y)$，则 X 中集列 $B_n \downarrow x$ 且 $f(B_n) = A_n$.

引理 2.5'[12] 每一空间都是度量空间的集列覆盖映像.

下述定理回答了问题 0.3，其中 (2) ⇒ (3) 部分证明的关键是应用引理 2.5'.

定理 2.6 下述条件相互等价:

(1) X 是双序列空间;

(2) 到空间 X 上的每一集列覆盖映射是双商映射 [12];

(3) X 是某一度量空间的双商映像 [29].

易验证，集列覆盖映射是序列覆盖映射，其逆不真 [12].

问题 2.7 刻画空间 X 使得到 X 上的每一序列覆盖映射是集列覆盖映射.

下列是 Siwiec[15, 表 22, P. 32] 在综述空间的映射刻画的表格中未能给出回答的几个问题.

问题 2.8 刻画空间 Y 使得到 Y 上的每一商映射是双商映射.

问题 2.9 刻画空间 Y 使得到 Y 上的每一伪开映射是双商映射.

3 序列覆盖的紧映像

Alexandroff-Arhangel'skiĭ 设想，既是自从一般拓扑学诞生以来数学家们丰富智慧提练的产物之一，又是一般拓扑学继续向前发展的珍贵思想源泉. 序列覆盖映射类的研究虽然仅是镶嵌在 Alexandroff-Arhangel'skiĭ 所设想的金色沙滩上的一只贝壳，面对辽阔无垠的海洋更是沧海一粟，但它可绘制出五彩斑斓的优美画卷. 在此，我们介绍度量空间的序列覆盖的紧映像的最新成果作为本文的结束 (以下所述空间均指满足 Hausdorff 分离性质的拓扑空间).

1960 年，Alexandroff[31] 引入*正则基* (regular base) 和*点正则基*(point-regular base) 以刻画拓扑空间的可度量性. 空间 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 称为点正则的，若 U 是 X 的开集且 $x \in U$，则 $\{B \in \mathcal{B} : x \in B \not\subset U\}$ 是有限的. 1962 年，Arhangel'skiĭ[32] 建立了具有点正则基的空间与度量空间的映射联系，即证明了一个空间是度量空间的开紧映像当且仅当它是具有点正则基的空间. Arhangel'skiĭ 的这一结果开创了 40 年来寻求点正则结构与度量空间映像研究之先河.

首先，作为开紧映射的一般化，Arhangel'skiĭ 在其著名论文 "Mappings and spaces"[14] 中提出了刻画度量空间的商紧映像的问题. 从开映射到商映射，在空间的映像理论中涉及到拓扑空间中基概念的推广.

定义 3.1 空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的*弱基*(weak base[14])，如果 $\mathcal{P} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x$ 满足: (1) $x \in \bigcap \mathcal{P}_x, \forall x \in X$; (2) 如果 $U, V \in \mathcal{P}_x$，则存在 $W \in \mathcal{P}_x$ 使得 $W \subset U \cap V, \forall x \in X$; (3) X 的子集 G 是开集当且仅当对于每一 $x \in G$，存在 $P \in \mathcal{P}_x$ 使得 $P \subset G$.

1992 年，我们利用 Ponomarev[33] 的思想为弱基发现了一个实实在在的应用，给出了 1966 年 Arhangel'skiĭ 问题的一个解.

定理 3.2[34] 空间 X 是度量空间的商紧映像当且仅当 X 是具有点有限弱展开的空间，即存在 X 的点有限覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得 $\{\mathrm{st}(x, \mathcal{U}_n) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ 是 X 的弱基.

其次，度量空间上的开映射是序列覆盖映射 [11]. 2002 年，Ikeda, Liu 和 Tanaka 再次利用弱基及点正则结构，证明了下述结果.

定理 3.3[35] 空间 X 是度量空间的序列覆盖的商紧映像当且仅当它是具有点正则弱基的空间.

这结果简洁、对称, 但从商紧映射的角度来看, 它附加了序列覆盖映射. 这一方面体现了序列覆盖映射在刻画度量空间映像中的价值, 另一方面也为寻求更理想的度量空间的商紧映像的刻画提供了合理的依据. 在拓扑空间基或弱基的推广方向上已有一系列成功的实践 [5]. 如, 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. (1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网络(cs-network[36]), 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in U$, 其中 U 是 X 中的开集, 则存在 $m \in \mathbb{N}$ 和 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $\{x_n : n \geq m\} \cup \{x\} \subset P \subset U$; (2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs^* 网络 (cs^*-network[10]), 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in U$, 其中 U 是 X 中的开集, 则存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $\{x_{n_i} : i \in \mathbb{N}\} \cup \{x\} \subset P \subset U$. 在拓扑空间中,

$$\text{基} \implies \text{弱基} \implies cs\ \text{网络} \implies cs^*\ \text{网络} \implies \text{网络}.$$

Ikeda, Liu 和 Tanaka 进一步提出问题 [35]: 借助度量空间的好的映像分别刻画具有点正则 cs 网络的序列空间, 具有点正则 cs^* 网络的序列空间.

对于点正则 cs 网络的序列空间, 本文第一作者与燕鹏飞获得了下述结果.

定理 3.4[37] 空间 X 是度量空间的序列覆盖的紧映像当且仅当它是具有点正则 cs 网络的空间.

由此, 具有点正则 cs 网络的序列空间可刻画为度量空间的序列覆盖的商紧映像 [37], 即具有点正则弱基的空间 (定理 3.3), 该结果推广了定理 3.3, 回答了 Ikeda, Liu 和 Tanaka[35] 提出的一个问题. 但这结果偏离了拟寻求度量空间的商紧映像的轨道.

序列覆盖映射的一个自然的推广是伪序列覆盖映射. 映射 $f : X \to Y$ 称为*伪序列覆盖映射*(pseudo-sequence-covering map[35, 38] 5), 如果 Y 中每一含极限点的收敛序列是 X 中某一紧子集关于 f 的像. 度量空间上的商紧映射必定是伪序列覆盖映射 [39]. 1997 年, 燕鹏飞 [40] 给出了度量空间的伪序列覆盖的紧映像的一个内在刻画, 即具有点有限的点星 sn 网络的空间. 2002 年, Ikeda, Liu 和 Tanaka[35] 本质上证明了度量空间的伪序列覆盖的紧映像等价于具有点有限 cs^* 覆盖的点星网络. 这些工作为阐述 "优美的" 度量空间的伪序列覆盖的紧映像提供了良好的借鉴. 易验证, 度量空间的伪序列覆盖的紧映像是具有点正则 cs^* 网络的空间 [7]. 在 Ikeda, Liu 和 Tanaka 的 "关于用度量空间的好的映像刻画具有点正则 cs^* 网络的序列空间" 问题 [35] 的基础上, 2002 年, 我们进一步提出问题 [7, 问题 3.3.20(2)]: 具有点正则 cs^* 网络的空间是否为度量空间的伪序列覆盖的紧映像?

2011 年, An 和 Tuyen 最终给出这问题肯定的回答.

定理 3.5[41] 空间 X 是度量空间的伪序列覆盖的紧映像当且仅当它是具有点正则 cs^* 网络的空间.

从而, 利用 "点正则 cs^* 网络的序列空间" 获得了度量空间的商紧映像一个精美的刻画 [41], 该结果既简化了定理 3.2, 又给出了 1966 年 Arhangel'skiĭ 问题的一个完美的解, 同时也把燕鹏飞 [40], Ikeda, Liu 和 Tanaka[35] 的相应刻画统一于点正则的结构之中. 至此, 自从 Arhangel'skiĭ 以来, 关于度量空间的序列覆盖 (或伪序列覆盖) 的 (商) 紧映像的刻画圆满完成.

拓扑空间中 k 网络的概念也是基的重要推广. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网络(k-network[42]), 如果 K, U 分别是 X 的紧集和开集并且 $K \subset U$, 则存在有限的 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ 使得 $K \subset \bigcup \mathcal{P}' \subset U$.

问题 3.6 如何用度量空间的适当映像刻画具有点正则 k 网络的空间?

致谢 作者真诚地感谢本文的两位评审专家给出的修改意见.

5 1984 年, Gruenhage, Michael 和 Tanaka[38] 称这映射为 "sequence-covering map", 这名称已于 1971 年被 Siwiec[11] 使用过. 为避免混淆, 2002 年, Ikeda, Liu 和 Tanaka[35] 称这映射为 "pseudo-sequence-covering map".

参考文献

[1] General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra I(Proc. 1st Topological Symp., Prague, 1961), New York: Academic Press, 1962, pp. 5.

[2] Alexandroff, P.S., On some results concerning topological spaces and their continuous mappings, In: General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra I, New York: Academic Press, 1962, 41-54.

[3] Alexandroff, P.S., Fedorchuk, V.V. and Zaĭcev, V.I., The main aspects in the development of set-theoretic topology, *Uspechi Mat. Nauk.*, 1978, 33(3): 3-48 (in Russian) (江守礼, 刘畅畅译, 点集拓扑学发展的几个奠基性时刻, 数学译林, 1984, 3(3): 223-233; 1984, 3(4): 313-326, 366).

[4] Arhangel'skiĭ, A.V., Notes on the history of general topology in Russia, *Topology Proc.*, 2000, 25: 353-395.

[5] 林寿, 广义度量空间与映射 (第 2 版), 北京: 科学出版社, 2007.

[6] 林寿, 关于 Arhangel'skiĭ 的 "映射与空间", 苏州大学学报 (自然科学版), 1992, 8(4): 393-400; 1993, 9(1): 11-19.

[7] 林寿, 点可数覆盖与序列覆盖映射, 北京: 科学出版社, 2002.

[8] Sakai, M., Mapping theorems on ℵ-spaces, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 2008, 49(1): 163-167.

[9] 林寿, 关于序列覆盖 s 映射, 数学进展, 1996, 25(6): 548-551.

[10] Gao Z.M., ℵ-spaces is invariant under perfect mappings, *Questions Answers in General Topology*, 1987, 5(2): 271-279.

[11] Siwiec, F., Sequence-covering and countably bi-quotient mappings, *General Topology Appl.*, 1971, 1(2): 143-154.

[12] Yanagimoto, A., On set-sequence-covering maps and bi-sequential spaces, *Math. Japon.*, 1978, 23(2): 393-399.

[13] Engelking, R., General Topology(Revised and Completed Edition), Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[14] Arhangel'skiĭ, A.V., Mappings and spaces, *Uspechi Mat. Nauk.*, 1966, 21(4): 133-184 (in Russian) (吴利生, 陈必胜译, 映射与空间, 数学译林, 1981, 试刊 (2): 12-26; 1981, 试刊 (3): 50-59; 1982, 1(2): 151-168).

[15] Siwiec, F., Generalizations of the first axiom of countability, *Rocky Mountain J. Math.*, 1975, 5(1): 1-60.

[16] Franklin, S.P., Spaces in which sequences suffice, *Fund. Math.*, 1965, 57(1): 107-115.

[17] Whyburn, G.T., Accessibility spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1970, 24(1): 181-185.

[18] Hájek, O., Notes on quotient maps, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 1966, 7(3): 319-323.

[19] Michael, E.A., Biquotient maps and Cartesian products of quotient maps, *Ann. Inst. Fourier(Grenoble)*, 1968, 18(2): 287-302.

[20] Sakai, M., Weak-open maps and sequence-covering maps, *Sci. Math. Japon.*, 2007, 66(1): 67-71.

[21] Micheal, E.A., Olson, R.C. and Siwiec, F., A-spaces and countably bi-quotient maps, *Dissertationes Math.*, 1976, 33: 1-43.

[22] Gerlits, J. and Nagy, Zs., Some properties of $C(X)$, I, *Topology Appl.*, 1982, 14(2): 151-161.

[23] Nogura, T., Fréchetness of inverse limits and products, *Topology Appl.*, 1985, 20(1): 59-66.

[24] Gruenhage, G., Infinite games and generalizations of first countables, *General Topology Appl.*, 1976, 6(3): 339-352.

[25] Sharma, P.L., Some characterizations of W-spaces and w-spaces, *General Topology Appl.*, 1978, 9(3): 289-293.

[26] Nyikos, P.J., The Cantor tree and the Fréchet-Urysohn property, In: Papers on General Topology and Related Category Theory and Topological Algebra (New York, 1985/1987), Ann. New York Acad. Sci., Vol. 552, New York: New York Acad. Sci., 1989, 109-123.

[27] 朱建平, w- 空间和 w- 映射, 长春师范学院学报 (自然科学版), 1985, (2): 7-12 (科学通报, 1986, 31(7): 555).

[28] Nyikos, P.J., Workshop lecture on products of Fréchet spaces, *Topology Appl.*, 2010, 157(8): 1485-1490.

[29] Michale, E.A., A quintuple quotient quest, *General Topology Appl.*, 1972, 2(2): 91-138.

[30] Michael, E.A., On representing spaces as images of metrizable and related spaces, *General Topology Appl.*, 1971, 1(4): 329-343.

[31] Alexandroff, P.S., On the metrization of topological spaces, *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, 1960, 8(1): 135-140 (in Russian).

[32] Arhangel'skiĭ, A.V., On mappings of metric spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1962, 145(2): 245-247 (in Russian).

[33] Ponomarev, V.I., Axioms of countability and continuous mappings, *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, 1960, 8(1): 127-134 (in Russian).

[34] Lin S., On the quotient compact images of metric spaces, *Advances in Mathematics(China)*, 1992, 21(1): 93-96.

[35] Ikeda, Y., Liu C. and Tanaka, Y., Quotient compact images of metric spaces, and related matters, *Topology Appl.*, 2002, 122(3): 237-252.

[36] Guthrie, J.A., A characterization of $\aleph_0$-spaces, *General Topology Appl.*, 1971, 1(2): 105-110.

[37] Lin S. and Yan P.F., Sequence-covering maps of metric spaces, *Topology Appl.*, 2001, 109(3): 301-314.

[38] Gruenhage, G., Michael, E.A. and Tanaka, Y., Spaces determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, 1984, 113(2): 303-332.

[39] Lin S., A note on sequence-covering mappings, *Acta Math. Hungar.*, 2005, 107(3): 187-191.

[40] 燕鹏飞, 度量空间的紧映象, 数学研究, 1997, 30(2): 185-187, 198.

[41] An, T.V. and Tuyen, L.Q., On an affirmative answer to S. Lin's problem, *Topology Appl.*, 2011, 158(13): 1567-1570.

[42] O'Meara, P., On paracompactness in function spaces with the compact-open topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, 29(1): 183-189.

Workshop Lecture on the Images of Some Metric Spaces

LIN Shou[1,2], ZHU Zhongjing[1]

(*1. Department of Mathematics and Information Science, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou, Fujian, 363000, P. R. China; 2. Institute of Mathematics, Ningde Teachers College, Ningde, Fujian, 352100, P. R. China*)

Abstract: In this paper, some old and new problems and results are stated on the images of metric spaces according to the idea with respect to mutual relation of mappings and spaces which was posed by Alexandroff in 1961. It introduces and develops the theory of sequence-covering maps, discusses the relations between the class of weakly first countable spaces(for example, sequential spaces, Fréchet spaces, strongly Fréchet spaces, strictly Fréchet spaces and bi-sequential spaces) and metric spaces by mappings, and describes the essence of characterizing spaces through mappings, which highlights the enduring charm of the Prague Topological Symposium.

Key words: Alexandroff's idea; sequence-covering map; countably bi-quotient map; strongly Fréchet space; first countable space