第 22 卷第 2 期 宁德师专学报(自然科学版) Vol.22 No.2
2010 年 5 月 Journal of Ningde Teachers College (Natural Science) May 2010

一般拓扑学中的一些问题及解答*

郑春燕，林 寿

(宁德师范学院数学系，福建 宁德 352100)

摘要：列举林寿及其合作者于 1988 年至 2009 年在发表的论文或出版的著作中提出的 138 个拓扑学问题的解答情况，其中已解决的问题 48 个，未解决的问题 90 个.

关键词：度量空间；广义度量空间；遗传闭包保持集族；点可数集族；广义可数紧空间；映射

中图分类号：O189.11 文献标码：A 文章编号：1004-2911(2010)02-0113-10

1990 年，J. van Mill 和 G. M. Reed 主编的 Open Problems in Topology (North-Holland) 所产生的作用，足以说明拓扑学问题是推进学科发展的强大动力. 本文的目的是把林寿及其合作者于 1988 年至 2009 年间所提出的散见于所发表的论文或出版的著作中提出的若干拓扑学问题进行归类，提供其中一些问题的解答情况，以便进一步研究参考.

若未特别说明，本文所论的空间均满足 Hausdorff 分离性质，当然有的引用问题的原文未必有这样的假设.

1 $\aleph$ 空间，g 可度量空间

由 k 网或弱基定义的广义度量空间中，$\aleph$ 空间和 g 可度量空间最具代表性，所取得的成果也最能反映广义度量性质. 相关的空间还有 $\aleph_0$ 空间，具有 σ 遗传闭包保持 k 网的空间，具有 σ 遗传闭包保持伪基的空间，具有 σ 紧有限弱基的空间等.

本节列出已解决的问题 15 个，未解决的问题 10 个.

问题 1.1 [1, 问题 2.3] 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网的正则空间是否是 $\aleph$ 空间？

回答是肯定的，见文[2, 定理 1].

问题 1.2 [1, 问题 4.4] 开闭映射是否保持 $\aleph$ 空间？

回答是肯定的，见文[2, 定理 3].

问题 1.3 [3, 问题 3.4.5；4，p.26] 序列覆盖的闭映射是否保持 g 可度量空间？

设像空间是正则空间，回答是肯定的，见文[5, 定理 3.3].

问题 1.4 [6, 问题 3.8.14; 7, 问题 11; 4, p. 26] $\aleph_0$ 空间的正则的开紧映像是否是 $\aleph_0$ 空间？

回答是否定的，见文[8, 例 3.6].

问题 1.5 [1, 问题 2.4] 若正则空间 X^2 具有 σ 遗传闭包保持 k 网，空间 X 是否是 $\aleph$ 空间？

回答是肯定的，见文[9, 推论 3.4].

问题 1.6 [1, 问题 3.3] 设 X 是 k 空间和 $\aleph$ 空间. 若 X 没有闭子空间同胚于 S_ω，X 是否是 g 可度量空间？

回答是肯定的，见文[10, 推论 3].

问题 1.7 [1, 问题 3.6] 是否存在正规 CCC 的 $\aleph$ 空间，它不是 $\aleph_0$ 空间？

收稿日期：2010-03-23
作者简介：郑春燕(1983-)，女，馆员，福建莆田人，现从事一般拓扑学研究.
E-mail：zhengchunyan211@163.com
*基金项目：国家自然科学基金资助项目(No. 10971185)；福建省自然科学基金资助项目(No. 2009 J01013)；福建省教育厅科技资助项目(No. JA09166)；宁德师范高等专科学校资助项目(2007Y008)

在假设($2^{\omega}=2^{\omega_1}$)下, Kemoto[11] 证明了存在正规可分(从而 CCC)的 $\aleph$ 空间, 不是 $\aleph_0$ 空间.

问题 1.8 [1, 问题 3.7] 是否存在具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则的可分空间, 它不是 $\aleph$ 空间?

在假设(CH)下回答是肯定的, 见文[12, 定理 3]. 在假设(MA+┐ CH)下, 恽自求构造了具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正规可分空间, 它不是 $\aleph$ 空间, 所以回答是否定的, 见文[13, 例].

问题 1.9 [1, 问题 3.11] $\aleph$ 空间是否具有正则 G_δ 对角线?

回答是否定的, 见文[14, 例 2].

问题 1.10 [15, p. 290] 具有 σ-HCP 伪基的正则空间是否有 σ-HCP 闭伪基?

回答是肯定的, 见文[16, 定理 2].

问题 1.11 [17, 问题 5.2] 具有 σ 遗传闭包保持弱基的正则空间是否是 g 可度量空间?

回答是肯定的, 见文[18, 定理 2.1].

问题 1.12 [7, 问题 12] 若 X 是具有 σ-CF* 伪基的正则空间, 则 X 是 $\aleph_0$ 空间或者 X 的所有紧子集是有限集?

回答是肯定的, 见文[8, 定理 2.6].

问题 1.13 [7, 问题 13] 设 X 是正则空间. 若 X 是具有 σ-CF 拟基的 k 空间, 则 X 是否可度量化?

回答是肯定的, 见文[8, 定理 2.10].

问题 1.14 [1, 问题 4.6] $\aleph$ 空间的开紧映像是否是 σ 空间?

回答是肯定的, 见文[19, 定理 3.2].

问题 1.15 [20, p. 165] 可数双商闭映射是否保持 $\aleph$ 空间性质?

回答是肯定的, 见文[20, 推论 2.5].

下列问题尚未解决:

问题 1.16 [1, 问题 4.6] $\aleph$ 空间的伪开紧映像是否是 σ 空间?

问题 1.17 [3, 问题 4.1.10] 具有 σ 紧有限弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

问题 1.18 [6, 问题 3.4.5] 具有点可数弱基, 或 σ 局部可数弱基的 k 半层空间是否是 g 可度量空间?

问题 1.19 [6, 问题 3.8.24; 17, 问题 4.7; 1, 问题 4.5; 21, 问题 3.7.24] 具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则空间是否是 $\aleph$ 空间的闭映像?

问题 1.20 [6, 问题 3.9.12; 4, p. 26] 具有闭包保持弱展开的正则空间是否是 g 可度量空间?

问题 1.21 [6, 问题 3.9.14] g 可度量空间是可度量空间的商有限到一映像吗?

问题 1.22 [22, 问题 7.5] 开闭映射是否保持具有 σ 紧有限弱基的正则空间?

问题 1.23 [23, 问题 4.1] 每一连通的局部 $\aleph$ 空间是否是某一仿紧连通的 $\aleph$ 空间的商空间?

问题 1.24 [17, 问题 5.5] 具有 σ 遗传闭包保持 k 网的正则 k 空间是否可表为 g 可度量空间在闭映射下的像空间?

问题 1.25 [24, 问题 2.10] g 可度量空间且是 g 可展空间是否具有由局部有限 cs 覆盖组成的弱展开?

2 弱遗传闭包保持集族

由弱遗传闭包保持集族所确定的空间与遗传闭包保持集族有较大的区别. 弱遗传闭包保持集族也称点离散集族.

本节列出已解决的问题 2 个, 未解决的问题 8 个.

猜测 2.1 [25, 猜测 3.12] σ-$CHCP$ k 网 $\not\Rightarrow$ 点 G_δ 性质.

回答是肯定的, 例子见文[6, 例 2.5.19].

问题 2.2 [22, 问题 7.3] 若正则空间 X 具有 σ 点离散(弱)基, 则 X 是否是 meta-Lindelöf 空间?

回答是否定的，见文[26, 例 1.1].

下列问题尚未解决：

问题 2.3　[22, 问题 7.3] 若正则空间 X 具有 σ 点离散(弱)基，则 X 是否是正规空间？

问题 2.4　[17, 问题 7.3] 具有 σ 弱遗传闭包保持基的正则空间是否具有点 G_δ 性质？

问题 2.5　[17, 问题 7.4] 具有 σ 弱遗传闭包保持伪基的正则空间是否具有 σ 遗传闭包保持伪基？

问题 2.6　[22, 问题 7.1] 若正则空间 X 具有 σ 点离散(弱)基，则 X 是否具有点 G_δ 性质？

问题 2.7　[22, 问题 7.2] 若正则空间 X 是具有 σ 点离散(弱)基的伪紧(或 CCC)空间，则 X 是否可度量化？

问题 2.8　[22, 问题 7.4] 若 G 是具有 σ 点离散(弱)基的正则的拓扑(仿拓扑)群，则 G 是否可度量化？

问题 2.9　[27, 问题 5.2] 遗传闭包保持集族的闭包是否仍是遗传闭包保持集族？

在正则空间中，结论成立.

猜测 2.10　[25, 猜测 3.11] σ-$WHCP$ 闭 k 网$\nRightarrow$点 G_δ 性质.

3　k 半层空间，σ 闭包保持 k 网空间，半层空间及 σ 空间

若附加正则性，则 σ 闭包保持 k 网空间$\Rightarrow k$ 半层空间$\Rightarrow\sigma$ 空间$\Rightarrow$半层空间.　许多性质表明 k 半层空间是介于 $\aleph$ 空间，M_1 空间与 σ 空间中性质较特殊的空间类.

本节列出已解决的问题 2 个，未解决的问题 11 个.

问题 3.1　[28, 问题 6] 是否存在局部可数的 CF 空间使它不是 σ 闭离散空间？

回答是肯定的，例子见文[29, 例 2].

问题 3.2　[3, 问题 4.1.11] 具有 σ 闭包保持弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间？

回答是肯定的，见文[30, 定理 3].

下列问题尚未解决：

问题 3.3　[3, 问题 4.1.11] 具有 σ 局部有限 k 网的正则的 k 空间是否具有 σ 闭包保持弱基？

问题 3.4　[6, 问题 3.3.19; 21, 问题 3.3.12] 正则半层空间是否满足紧型分解定理？

问题 3.5　[31, 问题 2.1] 正则的 k 半层空间是否是次 meso 紧空间？

问题 3.6　[6, 问题 3.4.17; 21, 问题 3.3.28] k 半层空间是否满足完备逆像 G_δ 对角线定理？

问题 3.7　[4, p. 26] M_1 空间是否满足完备逆像 G_δ 对角线定理？

问题 3.8　[6, 问题 3.4.20] 正规的 k,σ 空间是否是仿紧空间？

问题 3.9　[6, 问题 3.4.21] 具有星可数 k 网的正则的 k 空间是否是 k 半层空间？

问题 3.10　[6, 问题 3.4.22] k 半层空间的正则的伪开紧映像是否是 σ 空间？

问题 3.11　[1, 问题 3.9; 4, p. 25] 具有 σ 局部可数 k 网的正则的 k 半层空间是否是 $\aleph$ 空间？

问题 3.12　[7, 问题 7] 正规半层空间的完备逆像是否满足紧型分解定理?

问题 3.13　[21, 问题 3.3.12; 6, 问题 3.3.19] 可数仿紧半层空间的拟完备逆像是否满足可数紧型分解定理?

4　具有点可数覆盖的空间

在 σ 局部有限集族之后，具有点可数覆盖的空间被广泛讨论. 其内容涉及基，k 网，cs^* 网，弱基等.

本节列出已解决的问题 11 个，未解决的问题 8 个.

问题 4.1　[3, 问题 2.1.8] 设 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 的正则空间.若 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}，那么 X 是否具有点可数的 cs^* 网？

回答是否定的，见文[32, 定理 2.4].

问题 4.2 [3, 问题 2.3.18] 设空间 X 具有点可数弱基, 是否存在度量空间 M 和商 s 映射 $f: M\to X$, 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\leqslant 1$?

回答是肯定的, 见文[33, 定理 2.2].

问题 4.3 [3, 问题 5.1.20] 设正则空间 X 是具有点可数 cs^* 网的 Fréchet 空间. 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的, 那么 X 是否是局部可分空间?

回答是否定的, 见文[34, 例 2.3].

问题 4.4 [3, 问题 5.2.10] 设正则空间 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间. 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的, 那么 X 是否具有星可数 k 网?

回答是否定的, 见文[34, 例 2.3].

猜测 4.5 [3, 猜测 5.3.4] 设 X 和 Y 都是具有点可数 k 网的 k 空间, 则 $X\times Y$ 是 k 空间当且仅当空间对 (X,Y)满足 Tanaka 条件.

在假设(CH)或(MA+┐ CH)下均有例子表明猜测不成立, 见[3, 例 5.3.20, 例 5.3.21].

问题 4.6 [35, 问题 2.3]设 X 是正则空间且 X 具有点可数闭 k 网. 若 X 的每一第一可数的闭子空间都是局部紧的, X 是否具有点可数的紧 k 网?

回答是否定的, 见文[36, 例 3.3], 也见文[37, 例 2.3].

问题 4.7 [38, 问题 2.3] 具有点可数的闭 k 网的 $K(\aleph_o)$空间是否具有点可数的紧 k 网?

$K(\aleph_o)$空间指每一仿紧 M 的闭子空间是局部紧的空间, 而具有点可数 k 网的仿紧 M 空间是可度量空间, 从而是第一可数的. 由问题 4.6 所提供的回答, 这问题的回答是否定的.

问题 4.8 [39, 问题 2.6] 正则空间的遗传可分、具有点可数 cs^* 网的序列空间是否是$\aleph_o$空间?

回答是否定的, 见文[40].

问题 4.9 [41, 问题 3.4] 设正则空间 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间. 若 X 的第一可数闭子空间是局部可分的, X 是否是局部可分度量空间的闭映像?

回答是否定的, 见文[40, 定理 2.2].

问题 4.10 [42, 问题 6] 设 X 是具有点可数 k 网的正则的 Fréchet 空间. 若 X 的每一第一可数闭子空间是局部可分的, X 是否具有由可分子集组成的点可数 k 网?

回答是否定的, 见文[40, 定理 2.2].

问题 4.11 [21, 问题 1.6.20] 若 P 是正则空间 X 的弱基, 那么 P 是否是 X 的 k 网?

回答是否定的, 见文[18, 例 2.1].

下列问题尚未解决:

问题 4.12 [4, p. 25] 具有 σ 局部可数 k 网的空间是否也具有 σ 局部可数 cs 网?

问题 4.13 [43, 问题 2] 具有局部可数 k 网的正则空间是否具有 G_δ 对角线?

猜测 4.14 [3, 猜测 2.2.7] 设 $f: X\to Y$ 是紧覆盖的闭映射. 若空间 X 具有点可数 k 网, 那么空间 Y 具有点可数 k 网当且仅当 Y 的每一紧子集是可度量的.

问题 4.15 [3, 问题 2.5.12] 具有紧可数 cs^* 网的序列空间是否具有点可数的 cfp 网?

问题 4.16 [3, 问题 2.5.12] 是否存在具有点可数 cs^* 网的正则空间 X, 使得 X 不具有点可数的 cfp 网?

问题 4.17 [6, 问题 3.1.5; 21, 问题 3.1.17] 具有点可数 p 亚基的 β 空间是否是半层空间?

问题 4.18 [6, 问题 3.1.5] 具有点可数基的 β 空间是否是半层空间?

问题 4.19 [43, 问题 1] 具有星可数 cs 网的正则空间是否具有点可数闭 cs 网?

5 度量空间的映像

在广义度量空间理论中, 讨论度量空间映像的内容是极其丰富的. 本节内容主要涉及局部可分度

量空间的商映射类, 度量空间上的序列覆盖映射类.

本节列出已解决的问题 10 个, 未解决的问题 22 个.

问题 5.1 [3, 问题 3.4.3; 44, 问题 2] 度量空间上的序列覆盖 π 映射是否是 1 序列覆盖映射?

回答是否定的, 见文[45, 例 2].

问题 5.2 [3, 问题 3.4.8; 46, 问题 3.2.12] 设 X 是度量空间, $f: X\to Y$ 是序列商的紧映射, 那么 f 是否是伪序列覆盖映射?

回答是肯定的, 见文[47].

猜测 5.3 [3, 猜测 5.1.3; 39, 问题 2.6; 4, p. 26] 空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映像当且仅当 X 是度量空间的商 s 映像且 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.

回答是否定的, 见文[40, 定理 2.2].

问题 5.4 [3, 问题 5.1.19; 4, p. 26] 局部可分度量空间的序列覆盖的紧映像是否等价于具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点正则 cs 网的空间?

回答是肯定的, 见文[48].

问题 5.5 [49, 问题 14] 开 s 映射是否保持度量空间的商 s 映像?

回答是否定的, 见文[6, p. 110, 例 3.1.22].

问题 5.6 [50, 问题 5.1] 设 X 具有点可数基. 若 X 在非孤立点上有一致基, X 是否是某一度量空间的开、边缘紧的 s 映像?

回答是肯定的, 见文[51, 定理 4.10].

问题 5.7 [52, 问题 5.9] Fréchet 的 $\aleph$ 空间是否是度量空间的序列覆盖闭映像?

回答是否定的, 见文[53, 定理 1].

问题 5.8 [54, 问题 4.10] 具有可数 cs 网的正则的 Fréchet 空间是否是某一可分度量空间的序列覆盖闭映像?

回答是否定的, 见文[53, 定理 1], 也见文[55, p. 70].

问题 5.9 [56, 问题 3.6] 假设正则空间 X 是度量空间的商 s 映像. 若 X 的每一第一可数闭子空间是局部紧的, X 是否是某一局部紧度量空间的商 s 映像?

在假设(CH)下, 回答是否定的, 见文[40].

问题 5.10 [54, 问题 3.11] X 是正则的可分空间, 且是度量空间的序列覆盖商 s 映像, X 是否是局部 $\aleph_0$ 空间?

回答是否定的, 见文[55, 例 3.1].

下列问题尚未解决:

问题 5.11 [3, 问题 3.1.4; 44, 问题 1] 具有 cs^* 覆盖点星网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖的 π 映像?

问题 5.12 [3, 问题 3.2.12; 6, 问题 2.10.10; 27, 问题 5.3] 可分度量空间的商 π 映像是否是可分度量空间的商紧映像?

对正则的映像, 结论成立.

问题 5.13 [3, 问题 3.3.20] 度量空间的伪序列覆盖的 s,π 映像是否具有点正则的 cs^* 网?

问题 5.14 [3, 问题 3.3.20; 7, 问题 4] 具有点正则 cs^* 网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖紧映像?

问题 5.15 [3, 问题 4.3.8] 设 $f: Z\to X$ 是闭映射, X 是度量空间. 刻画分别满足下列条件的空间 X:

(a)每一 $\partial f^{-1}(x)$ 是 Z 的局部紧子集.

(b)$\{x \in X : \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的闭离散子集.

问题 5.16 [6, 问题 2.6.5] 用度量空间的映像刻画性质: 每一紧集是可度量的第一可数空间.

问题 5.17 [6, 问题 2.9.17] 半度量空间是否是某一度量空间的序列覆盖的 π 映像?

问题 5.18 [6, 问题 2.9.17] 半度量空间是否是某一度量空间的紧覆盖的 π 映像?

问题 5.19 [57, 问题 19] 设$\{X_i\}$是一族局部紧度量空间, X 是 $\Pi_{i\in N}X_i$ 的一子空间. 若 $f: X\rightarrow Y$ 是 σ 映射, f 是否是 $mssc$ 映射?

问题 5.20 [49, 问题 10] 如何给出度量空间的闭、可数到一映像的内在刻画?

问题 5.21 [50, 问题 5.2] 度量空间的开、边缘紧的 s 映像是否是某一度量空间的开、边缘紧的可数到一映像?

问题 5.22 [50, 问题 5.3] 如何用度量空间的某映像来刻画具有一致基的离散化空间? 例如: 具有一致基的空间的开紧、至多是边缘一的映像是否是具有一致基的离散化空间?

问题 5.23 [50, 问题 5.4] 怎样刻画度量空间的开、至多是边缘一的 s 映像?

问题 5.24 [7, 问题 1] 度量空间的商 π 映像是否也是某度量空间的伪序列覆盖 π 映像?

问题 5.25 [7, 问题 2] 若 X 是正则空间且是某度量空间的商紧映像, 则 X 是否是某度量空间的紧覆盖的紧映像?

问题 5.26 [7, 问题 2] 若 X 是正则空间且是某度量空间的伪序列覆盖的商紧映像, 则 X 是否是某度量空间的紧覆盖的 s 映像?

问题 5.27 [48, p. 1154] 如果正则的序列空间 X 具有由点有限 cs^* 覆盖序列构成的点星网, 其中覆盖由 cosmic 子空间组成, X 是否是局部可分度量空间的商紧映像?

问题 5.28 [4, p. 26] 开完备映射是否保持度量空间的商紧映像?

问题 5.29 [58, 问题 5] 具有 σ 局部有限(mod l)基的空间是否是某一度量空间的闭 Lindelöf 逆像?

问题 5.30 [59, 问题 2.10] 如果正则空间 X 具有由点有限 cs^* 覆盖序列构成的点星网, 其中覆盖由 cosmic 子空间组成, X 是否是局部可分度量空间的伪序列覆盖紧映像?

问题 5.31 [59, 问题 3.7] 若正则空间 X 是一个局部可分度量空间的商 s 映像, 是否 X 的每一Lindelöf 闭子空间是可分的?

问题 5.32 [59, 问题 3.8] 设正则空间 X 是一个度量空间的商 s 映像. 若 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的, 且 X 的每一个 Lindelöf 闭子空间是可分的, 那么 X 是否是局部可分度量空间的商 s 映像?

6 $\sum$空间类及一些广义可数紧空间类

广义可数紧空间是产生广义度量空间的重要途径, 如 M 空间, $\sum$空间和 β 空间等都是很有特点的广义度量空间类. 本节列出已解决的问题 4 个, 未解决的问题 18 个.

问题 6.1 [6, 问题 3.2.4] 具有下述性质的空间 X 是否是$\sum^{\#}$空间? X 有闭包保持的闭覆盖列$\{P_n\}$满足: 对 X 的点 x 及序列$\{x_n\}$, 若 $x_n\in C(P_n,x)$, 则$\{x_n\}$有聚点.

回答是肯定的, 见文[60, 定理 2.2].

问题 6.2 [17, 问题 6.5; 21, 问题 3.2.29] 具有点 G_δ 性质的强$\sum^*$空间是否是强$\sum$空间?

回答是肯定的, 见文[61, 定理 2.2].

问题 6.3 [17, 问题 2.4] 对正则空间 X, 下面条件是否等价:

(1) X 是一个 M 空间;

(2) X 具有 σ 局部有限拟(mod k)基;

(3) X 具有 σ 遗传闭包保持拟(mod k)基.

回答, 其中(2)$\nRightarrow$(1), 见文[62, 例 1]; (2)$\Leftrightarrow$(3), 见文[63, 定理 1].

问题 6.4　[64, 问题 3.3] β 空间性质是否满足可数闭和定理?

由彭良雪肯定回答,论文将发表于数学物理学报.

下列问题尚未解决:

问题 6.5　[64, 问题 3.3] 下述性质是否满足可数闭和定理: p, $\omega\sigma$?

问题 6.6　[6, 问题 3.2.7] 具有 σ 垫状(mod k)网的空间是否是次亚紧空间?

问题 6.7　[6, 问题 3.2.32] 强 $\sum^*$ 空间是否满足 Lindelöf 型分解定理?

问题 6.8　[6, 问题 3.2.34; 7, 问题 10; 21, 问题 3.2.31] 若 $X\times I$ 是强 $\sum^*$ 空间, 那么 X 是否是强 $\sum$ 空间?

问题 6.9　[17, 问题 6.2; 64, 问题 3.1; 21, 问题 3.2.30; 6, 问题 3.2.34] $\sum$ 空间性质是否是有限可积性?

问题 6.10　[17, 问题 6.2; 21, 问题 3.2.32] 强 $\sum^*$ 空间是否能表为强 $\sum$ 空间在闭映射下的像空间?

问题 6.11　[17, 问题 6.6] 若强 $\sum^*$ 空间 X 的所有紧子集都是有限集, 那么 X 是否是 σ 闭离散空间?

问题 6.12　[60, 问题 2.3] 若 X 有一族遗传闭包保持闭覆盖 $\{P_n: n\in N\}$ 满足: 任意序列 $\{x_n: n\in N\}$ 都有聚点, 其中 $x_n\in C(x,P_n)$, $x\in X$, 则 X 是否是 $\sum^*$ 空间?

问题 6.13　[7, 问题 8] $\sum^*$ 空间是否满足 $\aleph_1$ 紧型分解定理?

问题 6.14　[7, 问题 9] $\sum$ 空间是否具有由闭子集组成的 σ 离散拟(mod k)网?

问题 6.15　[6, 问题 3.7.8] wM 空间是否是 $M^\#$ 空间?

问题 6.16　[31, 问题 3.1]设 X 是正则空间且是仿紧 M 空间的伪开映像. 若 X 具有 σ 遗传闭包保持(mod k) k 网, X 能否表为某一仿紧 M 空间的闭映像?

问题 6.17　[64, 问题 3.1] 下述性质是否具有有限可积性: β, $\sum^*$, $\sum^\#$?

文[64, 问题 3.1] 还涉及 p 空间的有限可积性, 事实上, p 空间性质是可数可积性[6, p. 51]

问题 6.18　[65, p. 6] $\omega\triangle$ 空间是否满足可数紧型分解定理?

问题 6.19　[66, 问题 2.5] 具有 G_δ 对角线的 sym–wg 空间是否可度量化?

问题 6.20　[27, 问题 5.4] 具有可数(mod k)网的空间是否可表为可分度量空间的完备逆映像的连续像?

问题 6.21　[27, 问题 5.5] 具有点可数 p–k 网的次亚紧的 $\omega\triangle$ 空间是否是可展空间?

问题 6.22　[27, 问题 5.6] 强 $\sum^\#$(或次亚紧)、$\omega\triangle$ 空间是否具有严格 p 序列?

7　杂题

本节问题涉及 k 系, 一些覆盖性质, 函数空间性质, 连通性, 局部有限闭和定理, 局部性质, 映射间的关系等. 本节列出已解决的问题 4 个, 未解决的问题 13 个.

问题 7.1　[67, p. 11] 若正则空间 X 是具有由紧子集组成的局部可数 k 网的 k_R 空间, 那么 X 是否是 k 空间?

回答是肯定的, 见文[68, 定理 2.4], 也见文[69, 定理 1].

问题 7.2　[70, 问题 1] 具有点可数的紧 k 网的 k_R 空间是否是 k 空间?

回答是否定的, 见文[62, 例 2].

问题 7.3　[71, 问题 4.30] Čech 完备空间上的三商映射是否是紧覆盖映射?

回答是肯定的, 见文[72].

问题 7.4　[7, 问题 3] 如何刻画空间 Y 满足每一到 Y 上的伪序列覆盖映射是双商映射?

一个回答见文[8, 性质 3.4].

下列问题尚未解决:

问题 7.5 [73, p. 285] 具有 σ 遗传闭包保持 k 系的空间是否是某一仿紧局部 K_ω 空间在闭映射下的像?

问题 7.6 [70, 问题 2; 74, p. 300] 具有 σ 闭包保持的紧 k 网的 k_R 空间是否是 k 空间?

问题 7.7 [31, 问题 1.1]设 X 是正则空间. 若 X 的每一离散开覆盖都有一 σ 垫状加细(被 X 的全体非空紧子集加细), 则 X 是否是次 meso 紧空间?

问题 7.8 [75, 问题 4] 对于 Tychonoff 空间 X, $knw(C_e(X))=knw(X)$?

问题 7.9 [64, 问题 3.2] 下述性质是否满足局部有限闭和定理: Barie, 完全正则, $\delta\theta$ 可加细, 亚 Lindelöf, ortho 基, p, 拟完备, σ 互不相交基, σ 亚紧, Θ, θ, 弱 $\delta\theta$ 可加细, $\omega\triangle$?

问题 7.10 [64, 问题 3.4] 下述性质 τ 是否满足"θ 可加细局部 τ 空间是 τ 空间": G_δ 对角线, p, 拟可展, Θ ,θ, $\omega\sigma$?

问题 7.11 [76, 问题 4.3] 序列连通性是否是任意可积的?

问题 7.12 [23, 问题 4.2] 每一局部连通空间是否是某一仿紧局部连通空间的商空间?

问题 7.13 [7, 问题 5] 连通的 k 空间是否是连通仿紧局部紧空间的商映像?

问题 7.14 [7, 问题 6] 连通的第一可数空间是否是连通度量空间的开映像?

问题 7.15 [77, 问题 11] 半商映射是否保持序列空间?

问题 7.16 [71, 问题 4.16] 设 $f:X\to Y$ 是紧的三商映射. 若 Y 是可数空间, f 是否是诱导完备映射?

问题 7.17 [27, 问题 5.1] 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 具有点 G_δ 性质, f 是否是序列商映射?

参考文献:

[1] Shou Lin. A survey of the theory of ℵ-spaces[J]. Q. & A. in General Topology, 1990, 8: 405-419.

[2] Ziqiu Yun. A new characterization of ℵ-spaces[J]. Topology Proc., 1991, 16: 253-256.

[3] 林 寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[4] 林 寿. 广义度量空间理论的若干新进展[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2000, 16(4): 22-26.

[5] Chuan Liu. Note on closed mappings[J]. Houston J. Math., 2007, 33: 249-259.

[6] 林 寿. 广义度量空间与映射[M]. 第 2 版.北京: 科学出版社, 2007.

[7] Shou Lin. Some problems on generalized metrizable spaces, in: Elliott Pearl(Ed.), Open Problems in Topology II[M]. Elsevier B. V., 2007, 731-736.

[8] M. Sakai. Mizokami and Lin's conjecture on σ-CF* pseudo-bases[J]. Topology Appl., 2010, 157: 152-156.

[9] H. Junnila, Ziqiu Yun. ℵ -spaces and spaces with a σ - hereditarily closure-preserving k-network[J]. Topology Appl., 1992, 44: 209-215.

[10] Chuan Liu, Mumin Dai. g-metrizability and S_ω [J]. Topology Appl., 1994, 60: 185-189.

[11] N. Kemoto. A note on separable normal ℵ - spaces[J]. Q. & A. in General Topology, 1988, 6: 149-155.

[12] 刘 川. σ-遗传闭包保持 k-网的几个注记[J]. 数学进展, 1995, 24: 558-560.

[13] Ziqiu Yun. Separability and ℵ-spaces[J]. Q. & A. in General Topology, 1993, 11: 109-111.

[14] Chen Huanran, Lin Shou. A note on spaces with regular G_δ-diagonals[J]. J. Math. Res. Exposition, 1999, 19(3): 546-548.

[15] Shou Lin. Spaces with σ-hereditarily closure-preserving pseudobases[J]. Northeastern Math. J, 1990, 6(3): 287-290.

[16] Shou Lin. A study of pseudobases[J]. Q. & A. in General Topology, 1988, 6(1): 81-97.

[17] 林 寿. 遗传闭包保持集族的若干研究方向[J]. 山西师范大学学报(自然科学版), 1992, 6(2): 17-23.

[18] Chuan Liu. On weak bases[J]. Topology Appl., 2005, 150: 91–99.

[19] Shou Lin. Mapping theorems on k–semistratifiable spaces[J]. Tsukuba J. Math., 1997, 21(3): 809–815.

[20] M. Sakai. Mapping theorems on $\aleph$ – spaces[J] . Comment. Math. Univ. Carolin., 2008, 49(1): 163–167.

[21] 林 寿. 广义度量空间与映射[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[22] Chuan Liu, Shou Lin, Lewis D. Ludwig. Spaces with a σ–point–discrete weak base[J]. Tsukuba J. Math., 2008, 32(1): 165–177.

[23] 林 寿, 郑春燕. 一类仿紧连通空间的几乎开映像[J] . 数学年刊, 2009, 30A(1): 107–114.

[24] Yan Pengfei, Lin Shou. CWC mappings and metrization theorems[J] . 数学进展, 2007, 36(2): 153–158.

[25] 林 寿. 关于遗传闭包保持集族[J] . 山西师范大学学报(自然科学版), 1990, 4(1): 5–9.

[26] D. K. Burke, S. W. Davis. Spaces with a σ–weakly hereditaryily closure preserving base[J]. Topology Proc., 2010, 35: 9–18.

[27] 林 寿.《广义度量空间与映射》的正则性[J] . 宁德师专学报(自然科学版), 1999, 11(4): 241–247.

[28] 林 寿. 关于紧子集是有限集的空间[J] . 长春师院学报(自然科学版), 1991, 2: 25–27.

[29] M. Sakai. Remarks on spaces with special type of k–networks [J] . Tsukuba J. Math., 1997, 21: 443–448.

[30] 林 寿. 弱基与覆盖性质[J]. 数学进展, 2003, 32: 118–120.

[31] Shou Lin. Perfect preimages of some spaces[J] . Northeast. Math. J., 1995, 11(3): 343–348.

[32] M. Sakai. On k–networks and weak bases for spaces, (to appear).

[33] Chuan Liu. A note on point–countable weak bases [J] . Q. & A. in General Topology, 2007, 25: 57–61.

[34] M. Sakai, Counterexamples on generalized metric spaces [J] . Sci. Math. Japon., 2006, 64: 73–76.

[35] Shou Lin. On spaces with a k–network consisting of compact subsets [J] . Topology Proc., 1995, 20: 185–190.

[36] Huaipeng Chen. On s–images of metric spaces[J] . Topology Proc., 1999, 24: 95–103.

[37] M. Sakai. On spaces with a point–countable compact k–network[J] . Yokohama Math. J., 2000, 48: 13–16.

[38] 林 寿. 具有紧 k 网的空间[A]. 见：中国青年科学技术论文精选[C]. 北京：中国科学技术出版社, 1994, 222–226.

[39] Shou Lin. Images on locally separable metric spaces[J]. Acta. Math. Sinica, 1997, 13(1): 1–8.

[40] Shou Lin, M. Sakai. Counterexamples on the images of locally separable metric spaces[J] . Topology Proc., 2007, 31: 181–187.

[41] 林　寿, 刘　川. $S_\omega \times X$ 的 k 空间性质及相关结果[J] . 数学学报, 2006, 49(1): 29–38.

[42] Jinjin Li, Shou Lin. k–systems, k–networks and k–covers[J] . Czechoslovak Math. J., 2006, 56(131): 239–245.

[43] Shou Lin. A note on spaces with a locally countable k–network[J] . 吉首大学学报(自然科学版), 1997, 18(3): 10–12.

[44] 林 寿, 周友成, 燕鹏飞. 关于序列覆盖 π 映射[J]. 数学学报, 2002, 45(6): 1157–1164.

[45] 林 寿. 1 序列覆盖映射的注记[J]. 数学进展, 2005, 34: 473–476.

[46] 林 寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射[J]. 宁德师专学报(自然科学版), 2000, 12(2): 85–147.

[47] Shou Lin. A note on sequence–covering mappings[J]. Acta Math. Hungar., 2005, 107: 187–191.

[48] 葛 英, 林 寿. 一致覆盖和度量空间的紧映像[J]. 数学学报, 2004, 47: 1149–1154.

[49] Chuan Liu, Shou Lin. On countable–to–one maps[J] . Topology Appl., 2007, 154: 449–454.

[50] Fucai Lin, Shou Lin. Uniform covers at non–isolated points[J] . Topology Proc., 2008, 32: 259–275.

[51] Fucai Lin, Shou Lin, Heikki J. K. Junnila. Regular bases at non–isolated points and metrization theorems,(待发表)

[52] 林 寿, 燕鹏飞. 关于点可数覆盖[J] . 宁德师专学报(自然科学版), 1998, 10(4): 247–255.

[53] 燕鹏飞, 林 寿, 江守礼. 序列覆盖的闭映射保持可度量性[J] . 数学学报, 2004, 47(1): 87–90.

[54] Shou Lin, Pengfei Yan. Sequence–covering maps of metric spaces[J]. Topology Appl., 2001, 109: 301–314.

[55] M. Sakai. Weak–open maps and sequence–covering maps[J] . Sci. Math. Japon., 2007, 66(1): 67–71.

[56] Shou Lin. A note on closed images of locally compact metric spaces[J] . Acta Math. Hungar., 2005, 109(1–2): 157–162.

[57] Shou Lin, Pengfei Yan. Notes on cfp–covers[J]. Comment. Math. Univ. Carolinae, 2003, 44(2): 295–306.

[58] 林 寿, 度量空间中的闭 Lindelöf 逆像[J]. 黄淮学刊, 1993, 9(1): 1–3.

[59] 林 寿, 蔡长勇, 李进金. 局部可分度量空间映像的新进展[J] . 数学进展, 2009, 38(6): 657–663.

[60] Shou Lin, Rongxin Shen. A note on $\sum^{\#}$ – spaces[J]. Topology Proc., 2008, 32: 253–257.

[61] Liang–Xue Peng. On $\sum^*$–spaces and strong $\sum^*$–spaces of countable pseudocharacter[J] . Topology Appl., 2005, 148: 233–238.

[62] 李进金. 广义度量空间的几个反例[J]. 数学研究, 1995, 28(4): 105–107.

[63] 林 寿. 关于(mod k)可度量空间[J]. 数学杂志, 1993, 13(4): 456–460.

[64] 林 寿. 拓扑空间及其运算[J]. 黄淮学刊, 1996, 12(2): 19–22.

[65] 严 力, 林 寿. ωM 空间的分解定理[J]. 福建师范大学学报(自然科学版), 2002, 18(1): 5–7.

[66] K. Li, S. Lin. Notes on symmetric g–functions[J]. Acta. Math. Hungar., 2007, 116(1–2): 73–77.

[67] 林 寿. 关于 R 商、ss 映射[J]. 数学学报, 1991, 34(1): 7–11.

[68] Shou Lin. Note on k_R–spaces[J]. Q. & A. in General Topology, 1991, 9: 227–236.

[69] Ziqiu Yun. On k_R–spaces and k–spaces[J]. 数学进展, 2000, 29: 223–226.

[70] 林 寿, 李进金. k 网与 k 系[J]. 漳州师院学报(自然科学版), 1993, 7(2): 8–14.

[71] 林 寿. 关于三商映射[J]. 数学进展, 1998, 27(2): 97–102.

[72] M. Pillot. Tri–quotient maps become inductively perfect with the aid of consonance and continuous selections[J]. Topology Appl., 2000, 104: 237–253.

[73] 林 寿. 仿紧局部紧空间的映像[J]. 数学杂志, 1992, 12(3): 281–286.

[74] P. Nyikos. Problem section[J]. Topology Proc., 1995, 20: 299–304.

[75] Shou Lin. Cardinal functions on C(X) with the epi–topology[J]. Kobe J. Math., 1994, 11: 221–224.

[76] Qin Huang, Shou Lin. Notes on sequentially connected spaces[J]. Acta Math. Hungar., 2006, 110(1–2): 159–164.

[77] Shou Lin, Jinjin Li. Semi–quotient mappings and spaces with compact–countable k–networks[J]. 数学进展, 2009, 38(4): 417–426.

Some questions and answers in General Topology

ZHENG Chun–yan, LIN Shou

(Department of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde Fujian 352100, China)

Abstract: In this paper 138 topologies problems posed by Lin Shou within the years of 1998–2009 are numerated, in which 48 problems are answered and 90 problems are still open.

Key words: metrizable spaces; generalized metrizable spaces; hereditarily closure–preserving families; point–countable families; generalized countably compact spaces; mappings.