数 学 年 刊
2009,30A(5):697–704

拓扑群中广义度量性质的一个注记***

沈荣鑫* 林 寿**

提要 主要讨论拓扑群中的一些广义度量性质. 证明了对于拓扑群 G 和 G 的局部紧度量子群 H, 如果商群 G/H 是层空间 (半层空间, k 半层空间, σ 空间), 则 G 也是层空间 (半层空间, k 半层空间, σ 空间), 这肯定回答了 Arhangel'skiĭ A. V. 和 Uspenskij V. V. 提出的一个问题. 同时还讨论了弱拟第一可数的, 不含 S_ω 的闭拷贝的仿拓扑群.

关键词 拓扑群, 仿拓扑群, 弱拟第一可数空间, 层空间
MR (2000) 主题分类 54D20, 54D60, 54E30, 54E40
中图法分类 O189.11
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)05-0697-08

1 引 言

在文 [1] 中, Arhangel'skiĭ A. V. 讨论了拓扑群关于其局部紧子群的商群, 发现在一定条件下商群的拓扑性质能反射出初始群的拓扑性质.

定理 1.1 (见 [1]) 设 $\mathcal{P}$ 是一个具有闭遗传性和关于完备映射逆保持的拓扑性质, G 是一个拓扑群, H 是 G 的一个局部紧的子群, 使得商空间 G/H 具有性质 $\mathcal{P}$, 则存在单位元 e 的开邻域 U, 使得 $\overline{U}$ 具有性质 $\mathcal{P}$.

作为应用, Arhangel'skiĭ A. V. 证明了下面的结论.

定理 1.2 (见 [1]) 设 G 是一个拓扑群, H 是 G 的一个局部紧的子群, 使得商空间 G/H 是一个 k 空间, 则空间 G 是一个 k 空间.

进一步地, Arhangel'skiĭ A. V. 和 Uspenskij V. V. 在 [2] 中证明了下面的结果.

定理 1.3 (见 [2]) 设 G 是一个拓扑群, H 是 G 的一个局部紧的子群, 使得 G/H 是仿紧的 (亚紧的, 次仿紧的, Dieudonné 完备的), 则空间 G 也是仿紧的 (亚紧的, 次仿紧的, Dieudonné 完备的).

自然地, 我们关心上述结论对层空间能否成立. 答案是否定的. 事实上, 我们取 G 为任意的局部紧的拓扑群以及子群 $H=G$, 则 G/H 是一个平凡的拓扑群. 然而, G 未必是层空间. 因此 Arhangel'skiĭ A. V. 和 Uspenskij V. V. 在 [2] 中提出下述问题:

问题 1.1 (见 [2, Question 2.6]) 设 G 是一个拓扑群, H 是 G 的一个局部紧的度量子群, 使得商空间 G/H 是层空间, 空间 G 是否一定是层空间?

本文 2009 年 1 月 20 日收到.
*泰州师范高等专科学校数学系, 江苏 泰州 225300. E-mail: srx20212021@163.com
**宁德师范高等专科学校数学研究所, 福建 宁德 352100. E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn
***国家自然科学基金 (No. 10571151) 和福建省自然科学基金 (No. 2009J01013) 资助的项目.

对此，我们将在本文的推论 2.1 中给予肯定的回答．我们还将类似的结果推广到半层空间，k 半层空间和 σ 空间中．

弱拟第一可数空间是由文 [3] 作为度量空间的商边界可数映像引入的．这类空间在拓扑群的理论中有着丰富而有趣的应用 (见 [4, 5])．在 2008 年漳州拓扑学学术会议上，刘川提出下面两个问题：

问题 1.2 对于弱拟第一可数的拓扑群 G, 如果 G 不含 S_ω 的闭拷贝，则 G 是否一定是可度量化的？

问题 1.3 对弱拟第一可数的仿拓扑群 G, 如果 G 不含 S_ω 的闭拷贝，则 G 是否一定是第一可数的的？

注意到如果问题 1.3 的回答是肯定的，则问题 1.2 的回答也是肯定的．我们将证明对于序列的，cs 第一可数的正则仿拓扑群 G, G 是第一可数的当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝，这回答 (部分回答) 了上述问题．

本文假设所有空间都是 T_2 的，所有映射都是连续满的．$\mathbb{N}$ 表示自然数集．对空间 X, 以 τ (τ^c) 表示 X 中所有开集 (闭集) 组成的集族．

2 关于 Arhangel'skiĭ A. V. 和 Uspenskij V. V. 的问题

定义 2.1 空间 X 称为是半层空间 (见 [6]), 如果存在函数 $G:\mathbb{N}\times\tau^c\to\tau$, 满足

(i) $H=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}G(n,H)$;

(ii) 如果 $H\subset K$, 则 $G(n,H)\subset G(n,K)$;

若更有

(iii) $H=\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{G(n,H)}$ (对每一组不交的紧集 C 和闭集 H, 有 $C\cap G(n,F)=\varnothing$ 对某个 $n\in\mathbb{N}$ 成立), 则 X 称为是层空间 (见 [7]) (k 半层空间见 [8]).

下面我们将肯定地回答问题 1.1. 首先回忆几个引理.

引理 2.1 (见 [1, Theorem 1.2]) 设 G 是一个拓扑群，H 是 G 的一个局部紧的子群，$\pi:G\to G/H$ 是自然商映射，则存在单位元 e 的一个开邻域 U, 使得 $\pi(\overline{U})$ 闭于 G/H 且 π 在 $\overline{U}$ 上的限制是一个完备映射.

空间 X 称为是局部 $\mathcal{P}$ 的，如果 X 中每一点都具有一个邻域作为子空间是 $\mathcal{P}$ 的 (见 [2]).

引理 2.2 (见 [2, Theorem 1.1]) 设 $\mathcal{P}$ 是一个关于闭子空间和局部有限闭和保持的拓扑性质，则每一局部 $\mathcal{P}$ 的拓扑群是 $\mathcal{P}$ 的.

对于空间 X, X 称为是具有点 G_δ 性质，如果 X 中每一点都是一个 G_δ 集．X 称为是具有 G_δ 对角线，如果对角线 $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$ 在 $X\times X$ 中是一个 G_δ 集．文 [9] 证明了，空间 X 具有 G_δ 对角线当且仅当存在 X 的开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$, 使得

$$\{x\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n),$$

这里

$$\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)=\cup\{U\in\mathcal{U}_n : x\in U\}.$$

众所周知，对于拓扑群 G, 如果 G 具有点 G_δ 性质，则 G 具有 G_δ 对角线.

定理 2.1　设 G 是一个拓扑群，H 是 G 的一个局部紧的度量子群, 使得商空间 G/H 是 $\mathcal{P}$ 的，这里 $\mathcal{P}$ 是一个拓扑性质．如果 $\mathcal{P}$ 满足以下条件，则空间 G 也是 $\mathcal{P}$ 的.

(i) $\mathcal{P}$ 关于闭子空间和局部有限闭和保持;

(ii) $\mathcal{P}$ 蕴涵点 G_δ 性质;

(iii) 设 $f:X\to Y$ 是一个完备映射，如果 X 具有 G_δ 对角线且 Y 是 $\mathcal{P}$ 的，则 X 也是 $\mathcal{P}$ 的.

证　设 $\pi:G\to G/H$ 是自然商映射．由于 G/H 是 $\mathcal{P}$ 的且 $\mathcal{P}$ 满足 (ii), $\{H\}$ 是 G/H 的一个 G_δ 子集．也即存在 G/H 的开集列 $\{U_n : n\in\mathbb{N}\}$, 使得

$$\{H\}=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}U_n.$$

于是

$$H=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}\pi^{-1}(U_n).$$

由于 H 是 G 的一个度量子群，单位元 e 在 H 中具有可数开邻域基 $\{V_n : n\in\mathbb{N}\}$. 每一 V_n 可以表示为 $W_n\cap H$, 这里每一 W_n 开于 G. 因此

$$\{e\}=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}V_n=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(W_n\cap H)=\bigcap_{n\in\mathbf{N}}(W_n\cap\pi^{-1}(U_n)).$$

从而 G 具有点 G_δ 性质，所以 G 具有 G_δ 对角线.

根据引理 2.1, 存在 e 的一个开邻域 U, 使得 $\pi(\overline{U})$ 闭于 G/H 且 π 在 $\overline{U}$ 上的限制是一个完备映射．因此，由 (i) 和 (iii), 子空间 $\overline{U}$ 是 $\mathcal{P}$ 的．从而 G 是局部 $\mathcal{P}$ 的．由引理 2.2, G 是 $\mathcal{P}$ 的.

具有 σ 局部有限网的空间称为是 σ 空间 (见 [10]).

注意到层空间，半层空间以及 σ 空间满足定理 2.1 中的条件 (见 [10, 11]), 有如下的推论:

推论 2.1　设 G 是一个拓扑群，H 是 G 的一个局部紧的度量子群, 使得商空间 G/H 是层空间 (半层空间，σ 空间), 则空间 G 也是层空间 (半层空间，σ 空间).

由于 k 半层空间是否满足定理 2.1 中的条件 (iii) 尚未可知 (见 [11, 问题 3.4.17]), 我们感兴趣于推论 2.1 的结论对 k 半层空间是否成立．下面的推论 2.2 说明这是成立的.

空间 X 称为具有 KG 序列 (见 [12]), 如果存在 X 的一个开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$, 满足如果 $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p$, $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=q$ 且 $p_n\in\mathrm{st}(q_n,\mathcal{U}_n)$, 则 $p=q$. 显然，如果 X 具有 KG 序列，则 X 具有 G_δ 对角线，并且 X 的每一子空间都具有 KG 序列．下面这个引理改进了 “每一具有点 G_δ 的拓扑群都具有 G_δ 对角线” 这个结论.

引理 2.3　设 G 是一个拓扑群．如果 G 具有点 G_δ 性质，则 G 具有 KG 序列.

证 设 $\{U_n\}$ 是单位元 e 的一个开邻域序列，使得 $\bigcap\limits_{n\in\omega} U_n=\{e\}$. 不失一般性，我们假设 $\overline{U_n^{-1}U_n}\subset U_{n-1}$. 令 $\mathcal{U}_n=\{xU_n \mid x\in G\}$, 则每一 $\mathcal{U}_n$ 是 G 的一个开覆盖. 下面证明 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是 G 的一个 KG 序列.

设 $p_n\in \mathrm{st}(q_n,\mathcal{U}_n)$, $\{p_n\}$ 以及 $\{q_n\}$ 分别是收敛于 p 和 q 的序列，对任意 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $x_n\in G$, 使得 $p_n,q_n\in x_nU_n$. 于是，可以取 $u_n,v_n\in U_n$, 使得 $p_n=x_nu_n$, $q_n=x_nv_n$. 注意到 $p_nu_n^{-1}=x_n=q_nv_n^{-1}$, 有 $q_n^{-1}p_n=v_n^{-1}u_n\in U_n^{-1}U_n$. 由于序列 $\{q_n^{-1}p_n\}$ 收敛于 $q^{-1}p$, 所以

$$q^{-1}p\in\bigcap_{n\in\omega}\overline{U_n^{-1}U_n}\subset\bigcap_{n\in\omega}U_n=\{e\},$$

因此 $p=q$. 这说明 G 具有 KG 序列.

引理 2.4 (见 [12]) 设 $f:X\to Y$ 是一个完备映射，如果 X 具有 KG 序列且 Y 是 k 半层空间，则 X 也是 k 半层空间.

类似于定理 2.1 的证明，根据引理 2.3 和引理 2.4, 我们有如下推论:

推论 2.2 设 G 是一个拓扑群，H 是 G 的一个局部紧的度量子群, 使得商空间 G/H 是 k 半层空间，则空间 G 也是 k 半层空间.

3 关于弱拟第一可数的仿拓扑群

定义 3.1 (见 [13]) 设 $\mathcal{B}$ 是空间 X 中的一个子集族. $\mathcal{B}$ 称为是 X 的一个 $\aleph_0$ 弱基，如果 $\mathcal{B}=\cup\{\mathcal{B}_x(n):x\in X,n\in\mathbb{N}\}$ 满足

(1) 对每一 $x\in X$, $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{B}_x(n)$ 关于有限交封闭且 $x\in\cap\mathcal{B}_x(n)$;

(2) X 的子集 U 是开集当且仅当对每一 $x\in U$ 和 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $B_x(n)\in\mathcal{B}_x(n)$, 使得 $B_x(n)\subset U$.

则 X 称为是弱拟第一可数空间，如果每一 $\mathcal{B}_x(n)$ 都是可数的 (见 [5]).

空间 X 的子集 P 称为是点 x 的序列邻域 (见 [14]), 如果 X 中任意收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 都终于 P (即存在某个 $n_0\in\mathbf{N}$, 使得 $\{x_n:n>n_0\}\subset P$). 子集 $U\subset X$ 称为是序列开集 (见 [14]), 如果 U 是其中每一个点的序列邻域. X 称为是序列空间 (见 [14]), 如果 X 中每一个序列开集是开的. 文 [3] 证明了每一弱拟第一可数空间都是序列空间.

定义 3.2 设 $\mathcal{P}$ 空间 X 的一个子集族，$x\in\cap\mathcal{P}$.

(1) $\mathcal{P}$ 称为是 x 点处的 sn 网，如果 $\mathcal{P}$ 中每一个元都是 x 的一个序列邻域，并且对 x 的任意邻域 U, 存在 $P\in\mathcal{P}$, 使得 $P\subset U$ (见 [15]);

(2) $\mathcal{P}$ 称为是 x 点处的 cs 网，如果对任意收敛于 x 的序列 L 以及 x 的开邻域 U, 存在 $P\in\mathcal{P}$, 使得 $P\subset U$ 且 L 终于 P (见 [10]);

(3) $\mathcal{P}$ 称为是 x 点处的 cs^* 网，如果对任意收敛于 x 的序列 L 以及 x 的开邻域 U, 存在子序列 $L'\subset L$ 和 $P\in\mathcal{P}$, 使得 $L'\subset P\subset U$ (见 [16]).

X 称为是 sn 第一可数的 (cs 第一可数的，cs^* 第一可数的), 如果对任意 $x\in X$, 存在可数的 x 点处的 sn 网 (cs 网，cs^* 网).

注 3.1　显然, sn 第一可数 $\Rightarrow$ cs 第一可数 $\Rightarrow$ cs^* 第一可数; 众所周知, 弱拟第一可数 $\Rightarrow$ cs^* 第一可数 $\Leftrightarrow$ cs 第一可数.

空间 X 称为是一个仿拓扑群, 如果它同时是一个群, 并且群上的乘积运算是连续的.

偏序集 $(T,\leqslant)$ 称为是一个树, 如果对任意 $t\in T$, 集合 $\downarrow t=\{\tau\in T:\tau\leqslant t\}$ 关于 $\leqslant$ 是良序集. 给定元素 $t\in T$, 记 $\uparrow t=\{\tau\in T:\tau\geqslant t\}$ 以及 $\mathrm{succ}(t)=\min(\uparrow t-\{t\})$ 为 t 在 T 中所有后续元组成的集合. T 的一个极大线性序子集称为是 T 的一个分支. 记 $\max T\,(\min T)$ 为 T 中所有极大元 (极小元) 组成的集合. 拓扑空间 X 中的一个序列树是指树 $(T,\leqslant)$ 满足 (i) $T\subset X$, (ii) T 没有无限分支, (iii) 任给 $t\notin\max T$, 集合 $\mathrm{succ}(t)$ 是可数的且收敛于 t.

引理 3.1 (见 [17])　对序列空间 X, 点 $a\in X$ 属于子集 $A\subset X$ 的闭包当且仅当存在一个序列树 $T\subset X$, 使得 $\min T=\{a\}$ 且 $\max T\subset A$.

引理 3.2　对仿拓扑群 G 及其序列子空间 $F\subset G$, 如果 $F^{-1}F$ 是 sn 第一可数的, 则 F 是第一可数的.

证　不失一般性, 可以假设单位元 $e\in F$. 设 $\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$ 是 $F^{-1}F$ 中点 e 处单调下降的 sn 网. 首先我们证明对每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 $m>n$, 使得 $A_m^2\cap F^{-1}F\subset A_n$. 假设不然, 对每一 $m>n$, 存在 $x_m,y_m\in A_m$, 使得 $x_my_m\in F^{-1}F-A_n$. 考虑到序列 $\{x_m\},\{y_m\}$ 收敛于 e, 我们知 $\{x_my_m\}$ 收敛于 e. 这与 A_n 是 e 在 $F^{-1}F$ 中的一个序列邻域矛盾.

下证对每一 $n\in\omega$, 集合 $A_n\cap F$ 是 e 在 F 中的序列邻域. 假设不然, $e\in\mathrm{cl}_F(F-A_{n_0})$ 对某个 $n_0\in\mathbb{N}$ 成立. 根据引理 3.1, 存在一个序列树 $T\subset F$, 使得 $\min T=\{e\}$ 且 $\max T\subset F-A_{n_0}$. 下面我们构造 T 的无限分支, 从而得到矛盾.

取 $x_0=e$ 以及 $m_0=\min\{m\in\mathbb{N}:A_m^2\cap F^{-1}F\subset A_{n_0}\}$. 假设已经构造了 $\{A_{m_i}:i\leqslant j\}$ 和 $\{x_i:i\leqslant j\}\subset T$, 使得对每一 $i\leqslant j$, $A_{m_i}^2\cap F^{-1}F\subset A_{m_{i-1}}$ 且 $x_i\in\mathrm{succ}(x_{i-1})\cap(x_{i-1}A_{m_i})$. 则 $x_j\in F\cap(A_{m_0}A_{m_1}\cdots A_{m_j})\subset F\cap A_{m_0}^2\subset A_{n_0}$, 从而 $x_j\notin\max(T)$. 这样我们得到一个收敛于 x_j 的序列 $\mathrm{succ}(x_j)$. 于是 $x_j^{-1}\mathrm{succ}(x_j)$ 收敛于 e 且 $x_j^{-1}\mathrm{succ}(x_j)\subset F^{-1}F$. 取 $m_{j+1}\in\mathbb{N}$, 使得 $A_{m_{j+1}}^2\cap F^{-1}F\subset A_{m_j}$. 由于 $A_{m_{j+1}}$ 是一个 e 在 $F^{-1}F$ 中的一个序列邻域, 我们可以取 $x_{j+1}\in\mathrm{succ}(x_j)\cap(x_jA_{m_{j+1}})$. 这样构造完成. T 具有一个无限分支 $\{x_i:i\in\mathbb{N}\}$. 矛盾. 因此 $e\in\mathrm{int}_F(A_n\cap F)$ 对任意 $n\in\mathbb{N}$ 成立. F 是第一可数的.

引理 3.3　对 cs 第一可数的正则仿拓扑群 G 及其序列子空间 $F\subset G$, 如果 F 不含 S_ω 的闭拷贝, 则 F 是 sn 第一可数的.

证　不妨设 $e\in F$. 设 $\mathcal{A}$ 是 G 在点 e 处的 cs 网. 不失一般性, 可以假设 $\mathcal{A}$ 关于 G 的积运算, 有限并和有限交封闭. 断言集族 $\mathcal{A}|_F=\{A\cap F:A\in\mathcal{A}\}$ 是 e 在 F 中的一个 sn 网.

假设不然, 我们可以找到 e 的一个开邻域 $U\subset G$, 使得对任意满足 $A\cap F\subset U$ 的 $A\in\mathcal{A}$, 集合 $A\cap F$ 不是 e 在 F 中的序列邻域. 令

$$\mathcal{A}'=\{A\in\mathcal{A}:A\cap F\subset U\}=\{A_n:n\in\mathbb{N}\},\quad B_n=\bigcup_{k\leqslant n}A_k.$$

由于 $B_0\cap F$ 不是 e 在 F 中的序列邻域, 存在 F 中序列 $L_0=\{x_{0i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 收敛于 e, 使得 $L_0\cap B_0=\varnothing$. 取 e 的闭邻域 $U_0\subset G$, 使得 $U_0^2\subset U$. 存在 $m_0\in\mathbb{N}$, 使得 L_0 终于

$A_{m_0}\cap F\subset U_0$. 不失一般性，假设 $L_0\subset A_{m_0}\cap F$. 由归纳法，我们可以构造出序列 L_k, 自然数 m_k 以及 e 的闭邻域 U_k, 使得对任意 $k\in\mathbb{N}$,

(i) $L_k=\{x_{ki}\}_{i\in\mathbf{N}}$ 收敛于 e 且 $L_k\subset U_k\cap F-B_{m_{k-1}}$;

(ii) $L_k\subset A_{m_k}\subset B_{m_k}$;

(iii) $U_k\cap\{x_{ji}:j,i<k\}=\varnothing$ 且 $U_k^2\subset U_{k-1}$.

令

$$X=\bigcup_{k\in\mathbf{N}}L_k,\quad Y=\mathrm{cl}_F(X)-X,$$

则 X 是 G 的一个离散子空间，从而 Y 闭于 F. 考虑以下两种情形.

情形 1 e 是 Y 的一个孤立点.

可以找到 e 在 G 中的闭邻域 $W\subset U$, 使得 $W\cap Y=\{e\}$. 对 $k\in\mathbb{N}$, 令

$$S_k=L_k\cap W,\quad X'=\bigcup_{k\in\mathbf{N}}S_k,$$

则

$$X'=X\cap W=(X\cup Y)\cap W=\mathrm{cl}_F(X)\cap W$$

闭于 F. 现证明 X' 是 F 中一个 S_ω 的拷贝. 由于 F 是序列空间，存在 F 中收敛序列 $S\subset X'$, 使得 S 至多与有限个 S_k 相交. 注意到 S 必需收敛于 e, 存在 $k_0\in\mathbb{N}$, 使得 S 终于 $A_{m_{k_0}}$, 这和 (i) 矛盾. 因此 F 含有一个 S_ω 的闭拷贝.

情形 2 存在 Y 中非平凡序列收敛于 e.

根据引理 3.1, 存在序列树 $T\subset\mathrm{cl}_F(X)$, 使得 $\min T=\{e\}$, $\max T\subset X$ 且 $\mathrm{succ}(e)\subset Y$. 令 $t_0=e$, 存在 $C_0\in\mathcal{A}$, 使得 $C_0\subset U_0$ 且 $\mathrm{succ}(e)$ 终于 C_0. 取 $t_1\in\mathrm{succ}(t_0)\cap C_0$. 由归纳法，可以构造一个有限分支 $\{t_i:i\leqslant n+1\}$ 以及 $\{C_i:i\leqslant n\}\subset\mathcal{A}$, 使得 $\mathrm{succ}(t_i)$ 终于 t_iC_i, $C_i\subset U_i$, $t_{i+1}\in\mathrm{succ}(t_i)\cap t_iC_i$ 对任意 $i\leqslant n$ 成立. 注意 $M=\mathrm{succ}(t_n)\cap t_nC_n$ 收敛于 $t_n\neq e$. 然而

$$M\subset t_nC_n\subset t_{n-1}C_{n-1}C_n\subset\cdots\subset t_0C_0C_1\cdots C_n\subset U_0U_1\cdots U_n\subset U.$$

由我们对 $\mathcal{A}$ 的假设， $C_0C_1\cdots C_n\subset\mathcal{A}$, 从而 $C_0C_1\cdots C_n\cap F\subset B_{m_{k_0}}$ 对某个 $k_0\in\mathbb{N}$ 成立. 由于 e 是 $\{x_{ji}:j\leqslant k_0,i\in\mathbb{N}\}$ 中唯一的聚点， M 不可能收敛于 $t_n\neq e$, 这是一个矛盾.

因此 F 是 sn 第一可数的.

根据引理 3.2, 引理 3.3 和注 3.1, 我们有下面的结论:

定理 3.1 对序列的， cs 第一可数的，正则仿拓扑群 G, G 是第一可数的当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝.

推论 3.1 对弱拟第一可数的正则仿拓扑群 G, G 是第一可数的当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝.

注意到每一个 T_2 的拓扑群都是正则的以及每一个第一可数的拓扑群都是可度量化的 (见 [18]), 有

推论 3.2 对弱拟第一可数的拓扑群 G, G 可度量化当且仅当 G 不含 S_ω 的闭拷贝.

参　考　文　献

[1] Arhangel'skiĭ A. V., Quotients with respect to locally compact subgroups [J], *Houston J. Math.*, 2005, 31(1):215–226.

[2] Arhangel'skiĭ A. V. and Uspenskij V. V., Topological groups: local versus global [J], *Applied General Topology*, 2006, 7(1):67–72.

[3] Sirois Dumais R., Quasi- and weakly-quasi-first countable spaces [J], *Topology Appl.*, 1980, 11(1):223–230.

[4] Liu Chuan, A note on paratopological groups [J], *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 2006, 47(4):633–640.

[5] Svetlichny S. A., Intersection of topologies and metrizability in topological groups [J], *Vestnik Moskov Univ. Mate.*, 1989, 44(1):79–81.

[6] Creede G. D., Concerning semi-stratifiable spaces [J], *Pacific J. Math.*, 1970, 32(1):47–54.

[7] Borges C. R., On stratifiable spaces [J], *Pacific J. Math.*, 1966, 17(1):1–16.

[8] Lutzer D. J., Semimetrizable and stratifiable spaces [J], *General Topology Appl., 1971*, 1(1):43–48.

[9] Ceder J. G., Some generalizations of metric spaces [J], *Pacific J. Math.*, 1961, 11(1):105–125.

[10] Gruenhage G., Generalized metric spaces [M]//Kunen K., Vaughan J. E., eds., Handbook of Set-theoretic Topology, Elsevier: Amsterdam, 1984:423–501.

[11] 林寿，广义度量空间与映射 [M], 第二版，北京：科学出版社， 2007.

[12] Lin Shou, Mapping theorems on k-semistratifiable spaces [J], *Tsukuba J. Math.*, 1997, 21(3):809–815.

[13] Liu Chuan and Lin Shou, On countable-to-one maps [J], *Topology Appl.*, 2007, 154(2):449–454.

[14] Franklin S. P., Spaces in which sequences suffice [J], *Fund. Math.*, 1965, 57(1):107–115.

[15] 林寿，关于序列覆盖 s 映射 [J], 数学进展, 1996, 25(6):548–551.

[16] Gao Zhiming, $\aleph$-space is invariant under perfect mappings [J], *Questions Answers in General Topology*, 1987, 5(2):271–279.

[17] Banakh T. and Zdomskyi L., The topological structure of (homogeneous) spaces and groups with countable cs^*-character [J], *Applied General Topology*, 2004, 5(1):25–48.

[18] Comfort W. W., Topological groups [M]//Kunen K., Vaughan J. E., eds., Handbook of Set-theoretic Topology, Elsevier: Amsterdam, 1984:1145–1263.

[19] 林寿，开紧映射和 Arhangel'skiĭ 的问题 [J], 数学年刊, 2006, 27A(5):719–722.

A Note on Generalized Metrizable Properties in Topological Groups

SHEN Rongxin* LIN Shou**

*Department of Mathematics, Taizhou Teachers' College, Taizhou 225300, Jiangsu, China. E-mail: srx20212021@163.com
**Institute of Mathematics, Ningde Teachers' College, Ningde 352100, Fujian, China. E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

Abstract This paper is concerned with some generalized metrizable properties in topological groups. It is proved that for a topological group G and a locally compact metrizable subgroup H of G, if the quotient space G/H is stratifiable (resp. semi-stratifiable, k-semi-stratifiable, a σ-space) then the space G is stratifiable (resp. semi-stratifiable, k-semi-stratifiable, a σ-space), which gives an affirmative answer to a question raised by Arhangel'skiĭ A. V. and Uspenskij V. V.. Also the authors discuss the $\aleph_0$-weakly first-countable paratopological groups which contain no closed copies of S_ω.

Keywords Topological groups, Paratopological groups, $\aleph_0$-weakly first-countable spaces, Stratifiable spaces
2000 MR Subject Classification 54D20, 54D60, 54E30, 54E40

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol. 30 No. 4, 2009
by ALLERTON PRESS, INC. NEW YORK, USA