数 学 年 刊
2009,30A(1):107–114

一类仿紧连通空间的几乎开映像***

林 寿* 郑春燕**

提要 讨论了包含仿紧连通空间的一些广义度量空间类的映射性质，证明了 T_1 的连通第一可数空间是连通 Lašnev 空间的几乎开映像，部分回答了 1998 年 Tkachuk 关于连通空间逆像的一个问题；证明了 T_1 的连通的具有点 G_δ 性质的空间是连通 M_1 空间的几乎开映像，其中建立了 M_1 空间的一个映射定理，回答了 1976 年 Nyikos 提出的一个问题.

关键词 连通空间，仿紧空间，Lašnev 空间，M_1 空间，几乎开映射，闭映射
MR (2000) 主题分类 54D05, 54C10, 54D20, 54E35, 54E20
中图法分类 O189.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2009)01-0107-08

1 引 言

连通空间中广义度量性质研究的强有力结果是 Reed-Zenor 定理 (见 [1])：正规，局部紧，局部连通的 Moore 空间是可度量化空间. 在连通广义度量空间的映射性质方面，Tkachuk [2] 讨论了怎样的连通空间有好的连通的逆象问题. 已知任一连通空间未必是某一连通度量空间的连续映像 (见 [3])，把一般的连通空间表示为连通的度量空间的映像要有一定的限制 (见 [2]). 基于 Franklin [4] 关于度量空间商映像和 Ponomarev [5] 关于度量空间开映像的经典结果， Tkachuk [2] 提出下列问题：

问题 1.1 设 X 是完全正则的连通序列 (或 Fréchet) 空间， X 是否是某一连通度量空间的连续映像或商映像 (在 Fréchet 情况下，或遗传商映像)?

问题 1.2 设 X 是完全正则的连通的第一可数空间， X 是否是某一连通度量空间的开连续映像？

问题 1.1 已得到肯定回答 (见 [3, 6]). 由于 Ponomarev 方法所构造的度量空间是零维空间，所以试图用 Ponomarev 方法来解决问题 1.2 是有困难的. Fedeli 和 Le Donne [3] 创造一种新方法，证明了 "每一 T_2 的连通空间是某一仿紧连通空间的商映像". 本文在分析了 Fedeli 和 Le Donne 的构造技巧之基础上，初步讨论了仿紧连通空间中的一些广义度量性质，获得了连通广义度量空间中的一些映射定理，如证明了每一 T_1 的连通的第一可数空间是连通 Lašnev 空间的几乎开映像. 该方法对于进一步探索连通空间中的广义度量性质将会有所帮助.

本文所论空间均是 T_1 空间，映射都是连续满函数. 文中未定义的术语与记号见文 [7] 或文 [8].

本文 2008 年 1 月 27 日收到.
*漳州师范学院数学与信息科学系，福建 漳州 363000；宁德师范高等专科学校数学研究所，福建 宁德 352100. E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn
**宁德师范高等专科学校数学研究所，福建 宁德 352100. E-mail: zhengchunyan211@163.com
***国家自然科学基金 (No. 10571151) 和宁德师范高等专科学校 (No. 2007Y008) 资助的项目.

2 仿紧连通空间的构造

本节介绍仿紧连通空间的构造，并讨论一些相关性质.

定义 2.1 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为几乎开映射 (见 [9]), 若对于每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$, 使得如果 U 是 x 在 X 中的邻域，则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

(2) f 称为不可约映射 (见 [7]), 若对 X 的每一真闭子集 F, $f(F) \neq Y$.

(3) f 称为拟开映射 (见 [10]), 若对 X 的每一非空开集 U, int $f(U) \neq \varnothing$.

显然，开映射是拟开映射，而且开映射 $\Rightarrow$ 几乎开映射 $\Rightarrow$ 商映射.

引理 2.1 (Fedeli-Le Donne 构造见文 [3]) 设 X 是任一空间，则存在 T_2 仿紧空间 Y 和 Z, 商映射 $\pi: Y \to Z$ 和 $g: Z \to X$, 满足 X 是连通空间当且仅当 Z 是连通空间.

Fedeli 和 Le Donne 的构造如下. 对于空间 X, 置 $K = X \times X$, 赋予集合 K 下述拓扑：

(1) 每一 $(x', x) \in K$ 是孤立点， $x' \neq x$.

(2) 对于每一 $x \in X$, 点 (x, x) 在 K 中的邻域基为 $\{B \times \{x\}: B$ 是 x 在 X 的邻域$\}$.

设 $Y = K \times [0,1]$, 在集合 Y 上赋予拓扑 τ: τ 有基元形如， Y 关于空间 K 和具有通常拓扑的单位闭区间 $[0,1]$ 的积拓扑中的元或 $\{\kappa\} \times (0,1]$, $\kappa \in K$.

让 Z 是把空间 Y 中每一集 $\{x\} \times X \times \{1\}$ 粘成一点所成的商空间, 记商映射 $\pi: Y \to Z$, 定义函数 $g: Z \to X$, 使得对每一 $(x, x', t) \in Z$, 有 $g(x, x', t) = x$, 则 g 是商映射.

Fedeli 和 Le Donne [3] 证明了空间 X 是连通的当且仅当空间 Z 是连通的，文 [3] 已证：若 X 是 T_2 空间，则 Y 是 T_2 空间. 易验证，若 X 是 T_1 空间，则 Y 也是 T_2 空间. 为了完备起见，下面证明 Y 是仿紧空间. 对于每一 $x \in X$, 设 $F_x = X \times \{x\} \times [0,1]$, 则 $Y = \oplus\{F_x : x \in X\}$. 从而只须证明每一 F_x 是仿紧空间. 设 $\mathcal{U}$ 是 F_x 的任一开覆盖，选取 $U_x \in \mathcal{U}$, 使得 $(x, x, 0) \in U_x$, 则存在 x 在 X 中的开邻域 B 和 $\varepsilon > 0$, 使得 $B \times \{x\} \times [0, \varepsilon] \subset U_x$. 对于任意的 $x' \in X$, 由 $\{x'\} \times \{x\} \times [0,1]$ 的紧性， $\{U \cap (\{x'\} \times \{x\} \times [0,1]) : U \in \mathcal{U}\}$ 存在有限子集 $\mathcal{U}_{x'}$ 覆盖 $\{x'\} \times \{x\} \times [0,1]$. 令

$$\mathcal{V}_{x'} = \begin{cases} \mathcal{U}_{x'}, & x' \in X - B, \\ \{U \cap (\{x'\} \times \{x\} \times (\varepsilon, 1]) : U \in \mathcal{U}_{x'}\}, & x' \in B. \end{cases}$$

由于当 $x' \neq x$ 时， $\{x'\} \times \{x\} \times [0,1]$ 是 F_x 中既开且闭的子集，易验证 $\bigcup\limits_{x' \in X} \mathcal{V}_{x'} \cup \{U_x\}$ 是 F_x 中 $\mathcal{U}$ 的局部有限开加细覆盖. 故 F_x 是仿紧的.

对于给定空间 X, 下文中沿用引理 2.1 的记号，生成空间 K, Y 与 Z 及映射 π 与 g.

引理 2.2 $\pi: Y \to Z$ 是不可约的闭映射， $g: Z \to X$ 是几乎开映射且存在几乎开映射 $f: Y \to X$, 使得 $g \circ \pi = f$.

证 对任意的 $z \in Z$, 设 Y 中的开集 $U \supset \pi^{-1}(z)$, 不妨设 $\pi^{-1}(z) = \{x'\} \times X \times \{1\}$. 对于每一 $x \in X$, 存在 $\varepsilon_x > 0$, 使得 $\{x'\} \times \{x\} \times (\varepsilon_x, 1] \subset U$. 令

$$V = \{z\} \cup (\cup\{\{x'\} \times \{x\} \times (\varepsilon_x, 1) : x \in X\}),$$

则 V 是 z 在 Z 中的开邻域且 $\pi^{-1}(V) \subset U$, 故 π 是闭映射.

设 F 是 Y 的真闭子集, 则存在 $\kappa \in K$ 和 $0 < a < b < 1$, 使得 $F \cap (\{\kappa\} \times (a, b)) = \varnothing$, 于是 $\pi(F) \neq Z$, 所以 π 是不可约映射.

对任意 $x \in X$, 则 $(x, x, 0) \in g^{-1}(x)$. 如果 W 是 $(x, x, 0)$ 在 Z 中的任一邻域, 那么 $x \in \operatorname{int} g(W)$, 故 g 是几乎开映射.

定义函数 $f: Y \to X$, 使得对每一 $(x, x', t) \in Y$ 有 $f(x, x', t) = x$. 显然 $g \circ \pi = f$. 下证 f 是几乎开映射. 对任意的

$$O \subset X, \quad f^{-1}(O) = O \times X \times [0, 1].$$

显然, 若 O 是 X 的开集, 则 $f^{-1}(O)$ 是 Y 的开集. 所以 f 是连续函数. 对任意 $x \in X$, 则 $(x, x, 0) \in f^{-1}(x)$, 如果 G 是 $(x, x, 0)$ 在 Y 中的任一邻域, 那么 $x \in \operatorname{int} f(G)$, 故 f 是几乎开映射.

3 连通 M_1 空间的映像

下面分析空间 Y 的一些局部的广义度量性质, 设 Φ 是一拓扑性质, 称空间 X 是局部 Φ 空间, 若 X 中的每一点都存在具有性质 Φ 的邻域. 回忆几个具有基结构的广义度量空间 (见 [8]). 度量空间的闭映像称为 Lašnev 空间, 具有 σ 闭包保持基的正则空间称为 M_1 空间, 具有 σ 闭包保持拟基的正则空间称为 M_2 空间, M_2 空间等价于层空间 (见 [8, 定理 5.27]).

度量空间 $\Rightarrow$ Lašnev 空间 $\Rightarrow$ M_1 空间 $\Rightarrow$ M_2 空间 $=$ 层空间 $\Rightarrow$ 仿紧空间.

本节中的空间 X, Y, Z 与第 2 节中的一致.

引理 3.1　空间 X 是第一可数空间当且仅当空间 Y 是可度量空间.

证　由于几乎开映射保持第一可数性, 若 Y 是可度量空间, 由引理 2.2, X 是第一可数空间.

反之, 因为 Y 是仿紧空间, 由 Smirnov 度量化定理 (见 [7, 5.4.F]), 只须证 Y 是局部可度量的. 注意到, 对于每一 $(x', x, t) \in Y$, 若 $x' \neq x$, 则 $\{x'\} \times \{x\} \times [0, 1]$ 是点 (x', x, t) 在 Y 中的可度量的邻域; 若 $x' = x$ 且 $t > 0$, 则 $\{x\} \times \{x\} \times (0, 1]$ 是点 (x', x, t) 在 Y 中的可度量的邻域. 因而, 讨论空间 Y 的局部可度量性质, 只须考察 $(x, x, 0)$ 在 Y 中的局部可度量性. 对于每一 $x \in X$, 因为 X 是第一可数空间, 让 $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是点 x 在 X 中的局部基. 置

$$\mathcal{B}_n = \{U_n \times \{x\}\} \cup \{\{(x', x)\} : x' \in X - U_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

显然 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ 是 K 的正则子空间 $X \times \{x\}$ 的 σ 离散基. 于是 $X \times \{x\}$ 是点 (x, x) 在 K 中可度量的邻域, 从而 $X \times \{x\} \times [0, 1]$ 是点 $(x, x, 0)$ 在 Y 中可度量的邻域. 故 Y 是局部可度量空间, 因此 Y 是可度量空间.

由上述引理, 我们得到了 Tkachuk 问题 (见 [2]) 的部分回答.

定理 3.1　每一连通的第一可数空间是连通 Lašnev 空间的几乎开映像.

称空间 X 是点 G_δ 空间或具有点 G_δ 性质, 若 X 的每一单点集是 X 的 G_δ 集.

引理 3.2　空间 X 具有点 G_δ 性质当且仅当 Y 是 M_1 空间.

证 设 Y 是 M_1 空间. 对任意的 $x \in X$, $(x,x,0) \in Y$. 显然 M_1 空间具有点 G_δ 性质. 故 Y 中存在基元列 $\{U_n \times \{x\} \times [0,\varepsilon_n)\}$, 使得

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (U_n \times \{x\} \times [0,\varepsilon_n)) = \{(x,x,0)\}.$$

则 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{x\}$, 所以 X 具有点 G_δ 性质.

反之, 设空间 X 具有点 G_δ 性质. 对于每一 $x \in X$, 设 $\mathcal{B}_x$ 是 x 在 X 中的局部基, 于是存在集列 $\{U_n\} \subset \mathcal{B}_x$, 使得 $\{x\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 置

$$\mathcal{B}_n = \{B \times \{x\} : B \in \mathcal{B}_x\} \cup \{\{(x',x)\} : x' \in X - U_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

在 K 的子空间 $X \times \{x\}$ 中, 由于 (x,x) 是唯一的聚点, 所以 $\{B \times \{x\} : B \in \mathcal{B}_x\}$ 是闭包保持的, 且 $\{\{(x',x)\} : x' \in X - U_n\}$ 是离散的, 于是 $\mathcal{B}_n$ 是闭包保持的. 注意到, 对于每一 $x' \in X - \{x\}$, 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $x' \notin U_n$. 这表明 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$ 是 $X \times \{x\}$ 的基. 故 $X \times \{x\}$ 是 M_1 空间, 从而 Y 的子空间 $F_x = X \times \{x\} \times [0,1]$ 是 M_1 空间. 因此 $Y = \oplus\{F_x : x \in X\}$ 是 M_1 空间.

为了利用引理 3.2 说明 Z 是 M_1 空间, 有必要回答不可约的闭映射是否保持 M_1 空间性质. 我们在此利用 Mizokami 的结果, 获得了它的一个肯定的回答. 至于闭映射是否保持 M_1 空间性质, 还是一个尚未解决的问题 (见 [11, 12]).

引理 3.3 (见 [10]) 设 $h : X \to H$ 是拟开的闭映射, 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的闭包保持的开集族, 则 $\{\operatorname{int} h(B) : B \in \mathcal{B}\}$ 是 H 的闭包保持集族.

引理 3.4 (见 [13, 14]) 设 X 是层空间, 下述条件相互等价:

(1) X 是 M_1 空间.

(2) X 的每一点具有闭包保持开邻域基.

(3) X 的每一闭集在 X 中具有 (σ) 闭包保持的开邻域基.

定理 3.2 拟开的闭映射保持 M_1 空间.

证 设 $h : X \to H$ 是拟开的闭映射, 其中 X 是 M_1 空间. 由于闭映射保持层空间 (见 [8, 定理 5.17]), 所以 H 是层空间. 对于每一 $y \in H$, 由引理 3.4, $f^{-1}(y)$ 在 X 中具有闭包保持的开邻域基 $\mathcal{B}$, 又由引理 3.3, $\{\operatorname{int} h(B) : B \in \mathcal{B}\}$ 是 y 在 H 中的闭包保持开邻域基. 再由引理 3.4, H 是 M_1 空间.

定理 3.2 推广了文 [10] 的结果: 拟开的可数双商闭映射保持 M_1 空间. 易验证, 不可约的闭映射是拟开映射 (见 [10]), 所以有下述推论, 它回答了文 [12, 15] 中经典问题 IV 的相关问题 (3).

推论 3.1 不可约的闭映射保持 M_1 空间.

定理 3.3 设 X 是连通空间, 如果 X 具有点 G_δ 性质, 则 X 是某一连通的 M_1 空间的几乎开映像.

证 设 X 是具有点 G_δ 性质的连通空间. 由引理 3.2, Y 是 M_1 空间. 又由引理 2.2 和推论 3.1, Z 是 M_1 空间. 再由引理 2.1 和引理 2.2, Z 是连通空间且 $g : Z \to X$ 是几乎开映射.

4 连通 $\aleph$ 空间的映像

本节讨论具有网结构的广义度量性质. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族, $\mathcal{P}$ 称为 X 的网 (见 [8, 定义 4.1]), 如果 U 是 X 的开集且 $x \in U$, 则存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得 $x \in P \subset U$. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网 (见 [8, 定义 11.1]), 如果 C 和 U 分别是 X 的紧集和开集且 $C \subset U$, 则存在有限的 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, 使得 $C \subset \cup\mathcal{P}' \subset U$. 具有 σ 局部有限网的正则空间称为 σ 空间 (见 [8, 定义 4.3]). 具有 σ 局部有限 k 网的正则空间称为 $\aleph$ 空间 (见 [8, 定义 11.1]).

显然, 度量空间 $\Rightarrow$ $\aleph$ 空间 $\Rightarrow$ σ 空间 $\Rightarrow$ 具有点 G_δ 性质的空间. 因为 M_1 空间是 σ 空间 (见 [8, 定理 5.9]), 所以引理 3.2 中的空间 Y 可换为 σ 空间. 但是 Y 未必是 $\aleph$ 空间. 让 X 是扇空间 S_{ω_1}(见 [16, p. 33]), 即对 ω_1 个非平凡的收敛序列的拓扑和, 将其所有极限点粘成一点得到的商空间. 则 X 是 Lašnev 空间, 从而是 σ 空间, 但不是 $\aleph$ 空间 (见 [16, 例 1.8.7]). 若记 X 的唯一聚点为 s, 那么如第 2 节定义的空间 K 的子空间 $X \times \{s\}$ 仍同胚于 S_{ω_1}, 于是 $X \times \{s\}$ 不是 $\aleph$ 空间, 从而 Y 也不是 $\aleph$ 空间. 这表明, 为使 Y 是 $\aleph$ 空间, 必须加强网的结构.

引理 4.1　若 T_2 空间 X 具有 σ 局部可数网, 则 X 是点 G_δ 空间.

证　设 $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ 是空间 X 的 σ 局部可数网, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是局部可数的. 对于每一 $x \in X, n \in \mathbb{N}$, 由 $\mathcal{P}_n$ 的局部可数性, 存在 x 在 X 中的开邻域 G_n, 使得 G_n 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的可数个元相交, 记

$$\{P \in \mathcal{P}_n : P \cap G_n \neq \varnothing\} = \{P_{nm} : m \in \mathbb{N}\},$$
$$U_n = G_n - \cup\{\overline{P}_{nm} : x \notin \overline{P}_{nm},\ m \in \mathbb{N}\}.$$

则 U_n 是 X 中包含点 x 的 G_δ 集. 往证 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 若存在 $x' \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n - \{x\}$, 则存在 X 中不相交的开集 V 和 V', 使得 $x \in V$, $x' \in V'$. 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的网, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $P \in \mathcal{P}_n$, 使得 $x' \in P \subset V'$. 这时 $x' \in P \cap G_n$ 且 $x \notin \overline{P}$, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $P = P_{nm}$, 从而 $x' \in U_n \subset G_n - \overline{P}_{nm}$, 矛盾.

引理 4.2　设 $x \in X$, 若 $\{x\}$ 是 X 的 G_δ 集, 则 K 的子空间 $X \times \{x\}$ 的任一紧集或者是有限集或者是含点 (x,x) 的收敛序列.

证　设 F 是 $X \times \{x\}$ 的无限紧子集. 由于 (x,x) 是 $X \times \{x\}$ 的唯一聚点, 且 F 有聚点, 所以 $(x,x) \in F$. 先证明 F 是可数集. 设 $\{G_n\}$ 是 X 的开集列, 且 $\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 紧集 $F - (G_n \times \{x\})$ 是离散的, 所以 $F - (G_n \times \{x\})$ 是有限集. 从而

$$F - \{(x,x)\} = F - \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (G_n \times \{x\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (F - (G_n \times \{x\}))$$

是可数集, 因此 F 是可数集. 记

$$F = \{(x,x)\} \cup \{(x_n, x) : n \in \mathbb{N}\},$$

由于 F 的任一无限子集以 (x,x) 为唯一聚点, 所以在 $X \times \{x\}$ 中, $(x_n,x) \to (x,x)$, 即 F 是一收敛序列.

引理 4.3　若 X 是局部具有 σ 局部可数 k 网的 T_2 空间, 则 Y 是 $\aleph$ 空间.

证 分 3 步完成引理的证明.

(1) Y 是局部具有 σ 局部可数 k 网的空间.

由引理 3.1 的证明可见，只须验证对每一 $x\in X$, 在 K 中 (x,x) 的某邻域具有 σ 局部可数 k 网. 因 X 是局部具有 σ 局部可数 k 网，存在点 x 在 X 中的开邻域 B, 使得 B 具有 σ 局部可数 k 网，下证点 (x,x) 在 K 中的邻域 $B\times\{x\}$ 具有 σ 局部可数 k 网. 设 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ 是子空间 B 的 σ 局部可数 k 网，其中每一 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$ 且 $\mathcal{P}_n$ 在 B 中是局部可数的. 于是存在 x 在 B 中的开邻域 B_n, 使得 B_n 仅与 $\mathcal{P}_n$ 中的至多可数个元相交. 由引理 4.1, 不妨设 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n=\{x\}$. 对 $n\in\mathbb{N}$, 置

$$\mathcal{L}_n=\{P\times\{x\}:P\in\mathcal{P}_n\}\cup\{\{(x',x)\}:x'\in B-B_n\}.$$

由 B_n 的选取及 $\mathcal{P}_n$ 的点可数性，则 $\mathcal{L}_n$ 是 $B\times\{x\}$ 的局部可数集族. 令 $\mathcal{L}=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{L}_n$.

$\mathcal{L}$ 是 $B\times\{x\}$ 的网. 事实上，设 $(x',x)\in U\subset B\times\{x\}$, 其中 U 是 $B\times\{x\}$ 的开集. 若 $x'\neq x$, 则存在 $n\in\mathbb{N}$, 使得 $x'\in B-B_n$, 于是 $\{(x',x)\}\in\mathcal{L}_n$ 且 $(x',x)\in\{(x',x)\}\subset U$. 若 $x'=x$, 则存在 x 在 B 中的开邻域 V, 使得 $V\times\{x\}\subset U$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathcal{P}_m$, 使得 $x\in P\subset V$, 那么

$$P\times\{x\}\in\mathcal{L}_m,\quad (x,x)\in P\times\{x\}\subset V\times\{x\}\subset U.$$

$\mathcal{L}$ 是 $B\times\{x\}$ 的 k 网. 事实上，设 $F\subset U$, 其中 F, U 分别是 $B\times\{x\}$ 的紧集和开集. 不妨设 F 是无限集，则由引理 4.1 和引理 4.2, 记 $F=\{(x,x)\}\cup\{(x_n,x):n\in\mathbb{N}\}$, 其中在 $X\times\{x\}$ 中 $(x_n,x)\to(x,x)$. 存在 x 在 B 中的开邻域 V, 使得 $V\times\{x\}\subset U$, 所以存在 $n_0\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>n_0$ 时，有 $x_n\in V$, 从而存在 $m\in\mathbb{N}$ 和有限的 $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}_m$, 使得 $\{x\}\cup\{x_n:n>n_0\}\subset\cup\mathcal{P}'\subset V$. 这时 $F-\cup\{P\times\{x\}:P\in\mathcal{P}'\}$ 是有限集，从而存在有限的 $\mathcal{L}'\subset\mathcal{L}$, 使得 $F\subset\cup\mathcal{L}'\subset U$.

(2) Y 具有 σ 局部可数 k 网.

利用 Y 的仿紧性，由 (1), 存在 Y 的局部有限闭覆盖 $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使得每一 Y_α 具有 σ 局部可数 k 网. 设 $Y'=\oplus\{Y_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, $q:Y'\to Y$ 是自然映射. 则空间 Y' 具有 σ 局部可数 k 网，且 q 是逆紧映射 (即每一点的逆象是紧的闭映射). 易验证 (见 [16]), 逆紧映射保持 k 网，保持局部可数集族，所以空间 Y 具有 σ 局部可数 k 网.

(3) Y 是 $\aleph$ 空间.

设 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{Q}_n$ 是空间 Y 的 σ 局部可数 k 网，其中每一 $\mathcal{Q}_n\subset\mathcal{Q}_{n+1}$ 且 $\mathcal{Q}_n$ 是局部可数的. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 存在 Y 的开覆盖 $\mathcal{U}_n$, 使得 $\mathcal{U}_n$ 的每一元仅与 $\mathcal{Q}_n$ 中的至多可数个元相交. 由 Y 的仿紧性，不妨设 $\mathcal{U}_n$ 是局部有限的，那么

$$\mathcal{U}_n\wedge\mathcal{Q}_n=\{U\cap Q:U\in\mathcal{U}_n,Q\in\mathcal{Q}_n\}$$

是 Y 的 σ 局部有限集族. 对于每一 $C\subset W$, 其中 C, W 分别是 Y 的紧集和开集，则存在 $n\in\mathbb{N}$ 和有限的 $\mathcal{Q}'\subset\mathcal{Q}_n$, 使得 $C\subset\cup\mathcal{Q}'\subset W$, 同时存在有限的 $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}_n$, 使得 $C\subset\cup\mathcal{U}'$, 于是 $C\subset\cup(\mathcal{Q}'\wedge\mathcal{U}')\subset W$. 故 $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{U}_n\wedge\mathcal{Q}_n)$ 是 Y 的 σ 局部有限 k 网，所以 Y 是 $\aleph$ 空间.

由引理 3.2 和引理 4.3, 有

推论 4.1 若空间 X 是局部 $\aleph$ 空间，则 Y 是 M_1 的 $\aleph$ 空间.

由于 Lašnev 空间未必是 ℵ 空间 (如扇空间 S_{ω_1}), 所以当 X 是局部 ℵ 空间时, Z 未必是 ℵ 空间. 仿紧 ℵ 空间的闭象具有 σ 遗传闭包保持 k 网 (见 [16, 命题 3.8.15]), 所以

定理 4.1 每一连通的局部 ℵ 空间是具有 σ 遗传闭包保持 k 网的连通 M_1 空间的几乎开映像.

问题 4.1 每一连通的局部 ℵ 空间是否是某一仿紧连通的 ℵ 空间的商空间?

问题 4.2 每一局部连通空间是否是某一仿紧局部连通空间的商空间?

参 考 文 献

[1] Reed G. M. and Zenor P. L., Metrization of Moore spaces and generalized manifolds [J], *Fund. Math.*, 1976, 91:203–210.

[2] Tkachuk V. V., When do connected spaces have nice connected preimages? [J], *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, 126:3437–3446.

[3] Fedeli A. and Le Donne A., On good connected preimages [J], *Topology Appl.*, 2002, 125:489–496.

[4] Franklin S. P., Spaces in which sequences suffice [J], *Fund. Math.*, 1965, 57:107–115.

[5] Ponomarev V. I., Axioms of countability and continuous mappings [J], *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, 1960, 8:127–134 (in Russian).

[6] 林寿, 连通度量空间的映像 [J], 数学年刊, 2005, 26A(3):345–350.

[7] Engelking R., General Topology [M], revised and completed edition, Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[8] Gruenhage G., Generalized metric spaces [C]// K. Kunen, J. E. Vaughan eds., Handbook of Set-Theoretic Topology, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1984:423–501.

[9] Arhangel'skiĭ A., On open and almost open mappings of topological spaces [J], *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.*, 1962, 147:999–1002 (in Russian).

[10] Kao Kuo-shih, A note on M_1-spaces [J], *Pacific J. Math.*, 1983, 108:121–128.

[11] Ceder J. G., Some generalizations of metric spaces [J], *Pacific J. Math.*, 1961, 11:105–125.

[12] Nyikos P. J., Classic problems [C]// E. Pearl ed., Problems from Topology Proceedings, Toronta: Topology Atlas, 2003:69–89.

[13] Itō M., M_3-spaces whose every point has a closure preserving outer base are M_1 [J], *Topology Appl.*, 1985, 19:65–69.

[14] Mizokami T., On closed subsets of M_1-spaces [J], *Topology Appl.*, 2004, 141:197–206.

[15] Nyikos P. J., Problem section, classic problem IV [J], *Topology Proc.*, 1976, 1:365.

[16] 林寿, 广义度量空间与映射 [M] (第二版), 北京: 科学出版社, 2007.

The Almost-Open Images of a Class of Connected Paracompact Spaces

LIN Shou* ZHENG Chunyan**

*Department of Mathematics, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, Fujian, China. Institute of Mathematics, Ningde Teachers' College, Ningde 352100, Fujian, China. E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

**Institute of Mathematics, Ningde Teachers' College, Ningde 352100, Fujian, China. E-mail: zhengchunyan211@163.com

Abstract In this paper the mapping properties about generalized metric spaces which are connected paracompact are discussed. It is shown that a T_1 connected space with first countability is an almost-open image of a Lašnev connected space, which gives partial answers to a Tkachuk's question on the preimages of connected spaces in 1998. It is also shown that a T_1 connected space with point-G_δ property is an almost-open image of a connected M_1-space, where a mapping theorem on M_1-spaces is established and then answers the question posed by Nyikos P. J. in 1976.

Keywords Connected spaces, Paracompact spaces, Lašnev spaces, M_1-spaces, Almost-open mappings, Closed mappings

2000 MR Subject Classification 54D05, 54C10, 54D20, 54E35, 54E20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol.30 No.1, 2009
by ALLERTON PRESS, INC. NEW YORK, USA