数 学 年 刊
2006,27A(5):719–722

关于开紧映射与 Arhangel'skiĭ 的问题 **

林　寿*

提要 首先构造一 T_2 的亚紧空间使其不是任一仿紧 T_2 空间的开紧映象，否定了 A. Arhangel'skiĭ 1962 年提出的一个问题；其次利用构造开紧映射的方法指出存在具有 G_δ 对角线的 T_2 的次亚紧空间使其不具有 G_δ^* 对角线，肯定地回答了 1999 年 R. Hodel 提出的一个猜测.

关键词 亚紧空间，次亚紧空间，开映射，紧映射，G_δ 对角线
MR (2000) 主题分类 54C10, 54D20, 54E18
中图法分类 O189.1
文献标识码 A
文章编号 1000-8314(2006)05-0719-04

本文的目的是构造例子对于两个与开紧映射相关的问题给出回答.

A. Arhangel'skiĭ [1] 证明了仿紧空间的开紧连续映象是亚紧空间，并问每一亚紧空间是否是某一仿紧空间的开紧连续映象？ H. Junnila [7] 在著名的论文 "三个覆盖性质" 中又重提这一问题. 本文的第一个例子否定地回答这一问题，同时利用构造开紧映射的方法给出第二个例子，肯定地回答 R. Hodel 提出的猜测：具有 G_δ 对角线的 T_2 的次亚紧空间未必具有 G_δ^* 对角线.

先回忆几个相关概念 (见 [2]). 设 X 是拓扑空间， X 称为仿紧空间，若 X 的每一开覆盖具有局部有限的开加细； X 称为亚紧空间，若 X 的每一开覆盖具有点有限的开加细； X 称为亚 Lindelöf 空间，若 X 的每一开覆盖具有点可数的开加细. 设 X 和 Y 是拓扑空间且函数 $f: X \to Y$, f 称为开映射，若 X 的开集在 f 下的象是 Y 的开集； f 称为紧映射，若对于每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集； f 称为 Lindelöf 映射，若对于每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子集.

例 1 存在 T_2 的亚紧空间 Z, 使得 Z 不是任一仿紧 T_2 空间的开 Lindelöf 连续映象.

设 ω_1 是第一个不可数序数，序数之集合 $S = [0, \omega_1)$ 和 $\overline{S} = [0, \omega_1]$ 均赋予序拓扑，则 S 不是亚 Lindelöf 空间 (见 [2]). 令 $Z = \{p\} \cup (\overline{S} \times \mathbb{N})$, 其中 $p \notin \overline{S} \times \mathbb{N}$. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$U_n = \{p\} \cup (S \times \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}).$$

赋予集合 Z 的拓扑是由积空间 $\overline{S} \times \mathbb{N}$ 的开集和所有的 $U_n (n \in \mathbb{N})$ 所组成的集族为基生成的拓扑. 易验证， Z 是 T_2 空间.

(1) Z 是亚紧空间. 对于空间 Z 的任一开覆盖 $\mathcal{U}$, 存在 $U \in \mathcal{U}$ 和 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $p \in U_m \subset U$. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, 由于 $\overline{S} \times \{n\}$ 是 Z 的开的紧子空间，存在由 $\overline{S} \times \{n\}$ 的有限开覆盖 $\mathcal{U}_n$ 加细 $\mathcal{U}$, 那么 Z 的点有限的开覆盖 $\{U_m\} \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n\right)$ 是 $\mathcal{U}$ 加细，故 Z 是亚紧空间.

本文 2005 年 2 月 1 日收到.
*漳州师范学院数学系，福建　漳州 363000; 宁德师范高等专科学校数学研究所，福建　宁德 352100.
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn
**国家自然科学基金 (No.10571151) 资助的项目.

(2) Z 不是任一仿紧 T_2 空间的开 Lindelöf 连续映象. 若存在仿紧的 T_2 空间 Y 和开 Lindelöf 的连续满映射 $f: Y \to Z$. 置 $V = U_1$, 取定 $y \in f^{-1}(p)$. 由于 Y 是仿紧的 T_2 空间, 所以 Y 是正则空间, 存在 Y 的开集 W, 使得 $y \in W \subset \overline{W} \subset f^{-1}(V)$. 因为 f 是开映射, 所以 $f(W)$ 是 p 的开邻域, 于是存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $U_m \subset f(W)$, 从而 $S \times \{m\} \subset f(W)$. 让 $H = W \cap f^{-1}(S \times \{m\})$, 则 H 是 Y 的开集且

$$f(H) = f(W) \cap (S \times \{m\}) = S \times \{m\}.$$

再令 $F = \overline{H}$, 则 F 是 Y 的不空闭集且 $F \subset f^{-1}(V)$, 于是 $f(F) \subset V$. 下面证明: $f(F) = S \times \{m\}$. 事实上, 对于每个 $z \in V \setminus S \times \{m\}$, 存在 z 在 Z 中的邻域 G, 使得 $G \cap (S \times \{m\}) = \emptyset$, 于是, $f^{-1}(G) \cap H = \emptyset$, 从而 $f^{-1}(G) \cap F = \emptyset$, 因此 $z \notin f(F)$, 故 $f(H) = f(F) = S \times \{m\}$.

对于 Z 的子空间 $S \times \{m\}$ 的每一开覆盖 $\mathcal{U}$, 则 $f^{-1}(\mathcal{U})$ 是 Y 的开子集族且覆盖 Y 的仿紧子空间 F, 存在 F 的局部有限开覆盖 $\mathcal{V}$ 加细 $f^{-1}(\mathcal{U})$. 因为 f 是 Lindelöf 映射, 对于每一 $z \in S \times \{m\}$, $f^{-1}(z)$ 是 Y 的 Lindelöf 子集, 因为 $\mathcal{V}$ 也在 Y 内局部有限, $f^{-1}(z)$ 至多与 $\mathcal{V}$ 中的可数个元相交. $\mathcal{V}_{|H}$ 是 H 的开覆盖且 $f^{-1}(z)$ 至多与 $\mathcal{V}_{|H}$ 中的可数个元相交, 又因为 f 是开映射, $f(\mathcal{V}_{|H})$ 是 $S \times \{m\}$ 的点可数开覆盖且加细 $\mathcal{U}$, 故 $S \times \{m\}$ 是亚 Lindelöf 空间, 从而 S 是亚 Lindelöf 空间, 矛盾.

上面构造的空间 Z 不是正则空间. 让 $K = \{\omega_1\} \times \mathbb{N}$, 则 K 是 Z 的闭集且 $p \notin K$, 然而 p 与 K 在 Z 中不存在不相交的邻域, 于是 Z 不是正则空间.

本文的第二个例子讨论两个与次亚紧空间相关的命题. 1978 年 J. Chaber [3] 证明了正则 σ 空间的开紧连续映象是 σ 空间当且仅当它是次亚紧空间, 这是广义度量空间理论中为数不多的开紧映射定理之一, 但是 Chaber 并没有给出例子说明原象空间中的正则性是必不可少的. 另一方面, 1971 年 R. Hodel [6] 证明了具有 G_δ 对角线的正则的次亚紧空间具有 G_δ^* 对角线, 这是揭示可展空间, p 空间和 $w\Delta$ 空间之间关系的一个基础性的结果 (见 [5]). 在 Hodel 的结果中正则性是否可减弱为 T_2 空间性质? 这是一个自然而有趣的问题. 1999 年 8 月 8 日 R. Hodel 在给作者的信中猜测: 具有 G_δ 对角线的 T_2 的次亚紧空间未必具有 G_δ^* 对角线. 下面通过修改例 1 中空间 Z 的构造说明 Chable 的定理中正则性是重要的, 同时也肯定地回答了 Hodel 的上述猜测.

再回忆几个相关概念 (见 [5]). 设 X 是拓扑空间, X 称为次亚紧空间, 若 X 的每一开覆盖具有 θ 开加细序列; X 称为具有 G_δ 对角线, 若存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 使得对于每一 $x \in X$, 有

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} st(x, \mathcal{G}_n);$$

X 称为具有 G_δ^* 对角线, 若存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, 使得对于每一 $x \in X$, 有

$$\{x\} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{st(x, \mathcal{G}_n)};$$

X 称为 σ 空间, 若 X 具有 σ 局部有限的闭网.

例 2 存在 T_2 的 σ 空间 X, 仿紧的 T_2 空间 Y 和开紧连续映射 $f: X \to Y$, 使得 Y 不是 σ 空间.

对于序数的集合 $Y = [0, \omega_1]$ 赋予下述拓扑: 点 ω_1 在 Y 中的邻域取为序拓扑下的邻

域，Y 的其余点是孤立点，则 ω_1 在 Y 中的邻域基元形如 $U_\alpha=(\alpha,\omega_1]$, 其中 α 是可数序数. 显然，Y 是 T_2 空间. 由于 Y 的每一开覆盖存在互不相交的开加细，所以 Y 是仿紧空间. 又由于 Y 的单点集 $\{\omega_1\}$ 不是 Y 的 G_δ 集，于是 Y 不是 σ 空间.

记 $S=[0,\omega_1)$, 令 $X=Y\cup(S\times\mathbb{N})$, 并且赋予集合 X 下述拓扑：$S\times\mathbb{N}$ 是 X 的开离散子空间；对于每一 $\beta\in S$, β 在 X 中的邻域基元形如

$$K(n,\beta)=\{\beta\}\cup\{(\beta,k):n\le k\in\mathbb{N}\},\quad n\in\mathbb{N};$$

ω_1 在 X 中的邻域基元形如

$$W(n,\alpha)=\{\omega_1\}\cup((\alpha,\omega_1)\times\{k\in\mathbb{N}:k\ge n\}),\quad n\in\mathbb{N}$$

且 α 是可数序数，则 X 是 T_2 空间. 因为在 X 中 $\overline{W(n,\alpha)}=(\alpha,\omega_1]\cup W(n,\alpha)$, 所以 X 不是正则空间. 由于 $[0,\omega_1]$ 及每一 $S\times\{n\}$ 都是 X 的闭离散子空间，于是 X 是可数个闭离散子空间之并，从而 X 是 σ 空间.

依下述方式定义函数 $f:X\to Y$, 对于每一 $x\in X$, 如果 $x\in Y$, 则 $f(x)=x$; 如果 $x=(\beta,n)\in S\times\mathbb{N}$, 则 $f(x)=\beta$, 那么 f 是开紧的连续满映射.

这说明，T_2 的 σ 空间的开紧连续映象即使是仿紧的 T_2 空间也未必仍是 σ 空间，所以上面提到的 Chaber 关于 σ 空间开紧映射的结果中原象空间中的正则性不可减弱为 T_2 空间性质.

现在，通过例 2 中的空间 X 肯定回答 Hodel 提出的猜测，即 X 是具有 G_δ 对角线的 T_2 的次亚紧空间，但是 X 不具有 G_δ^* 对角线. 因为 X 是 σ 空间，所以 X 是具有 G_δ 对角线的次亚紧空间 (见 [5]). 如果 X 具有 G_δ^* 对角线，则 X 有开覆盖序列 $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{\omega_1\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{st(\omega_1,\mathcal{G}_n)}$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 因为 $\mathcal{G}_n$ 是 X 的开覆盖，存在 $k_n\in\mathbb{N}$ 和可数序数 α_n, 使得 $\omega_1\in W(k_n,\alpha_n)\in\mathcal{G}_n$. 从而在空间 X 中,

$$\begin{aligned}\{\omega_1\}\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n,\omega_1]&\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}((\alpha_n,\omega_1]\cup W(k_n,\alpha_n))\\&=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{W(k_n,\alpha_n)}\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\overline{st(\omega_1,\mathcal{G}_n)}=\{\omega_1\},\end{aligned}$$

因此 $\{\omega_1\}=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n,\omega_1]$, 矛盾，故空间 X 不具有 G_δ^* 对角线.

参 考 文 献

[1] Arhangel'skiĭ A., On mappings of metric spaces [J], *Soviet Math. Dokl.*, 1962, 3:953–956.

[2] Burke D. K., Covering properties [M] // Kunen K., Vaughan J. E. (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1984:347–422.

[3] Chaber J., Primitive generalizations of σ-spaces [M] // Császár Á. (ed.), Topology, Colloquia Math. Soc. János Bolyai, 23, Budapest (Hungary), 1978, Amsterdam: North-Holland, 1980:259–268.

[4] Engelking R., General Topology (Revised and completed edition) [M], Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[5] Gruenhage G., Generalized Metric Spaces [M] // Kunen K., Vaughan J. E. (eds.), Handbook of Set-Theoretic Topology, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V., 1984:423–501.

[6] Hodel R., Moore spaces and $w\Delta$-spaces [J], *Pacific J. Math.*, 1971, 38(3):641–652.

[7] Junnila H., Three covering properties [M] // Reed G. M. (ed.), Surveys in General Topology, New York: Academic Press, 1980:195–245.

On Open Compact Maps and an Arhangel'skiĭ's Problem

LIN Shou*

*Department of Mathematics, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, Fujian, China; Institute of Mathematics, Ningde Teachers College, Ninige 352100, Fujian, China. E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

Abstract In this paper, a question posed by A. Arhangel'skiĭ in 1962 is negatively answered by giving a T_2 metacompact space which is not any open and compact image of a T_2 paracompact space; and a conjecture posed by R. Hodel in 1999 is affirmatively answered by showing a T_2 submetacompact space with G_δ-diagonal which is not of G_δ^*-diagonal.

Keywords Metacompact spaces, Submetacompact spaces, Open maps, Compact maps, G_δ-diagonals

2000 MR Subject Classification 54C10, 54D20, 54E18