山西师大学报(自然科学版)
第4卷 第1期 1990年

Journal of ShanXi Teacher's University
Natural Science Edition VoL. 4 No. 1 1990

关于遗传闭包保持集族*

林寿
(宁德师专数学系)

摘要 本文首先讨论各种弱形式的遗传闭包保待集族的性质，然后研究各种具有 σ—弱形式遗传闭包保持 K—网的空间之间的关系。

关键词 遗传闭包保持集族 弱遗传闭包保持集族 K^-空间 K^-网

1 引言

遗传闭包保持集族引起人们的兴趣是从 1972 年 A · O kuyama [1]利用它引入$\sum^*$一空间开始的。1975 年，D · Burke，R. Engelking 和 D · Lutzer[2]证明了具有 δ—遗传闭包保持基空间的可度量化定理，尤其是 1978 年 L · Foged[3]利用遗传闭包保持集族给出 Lašner 空间的一个内在特征更使人们认识到对于遗传闭包保持集族的细致探讨对进一步发展广义度量空间理论将起积极的作用。

本文所讨论空间至少是满足 T_1 分离性公理的拓扑空间。N 表示自然数集。

定义 1.1 设 P 是空间 X 的子集族，P 称为 X 的闭包保持(记为 CP)集族，如果对于 P 的任意子族 P' 有 $\bigcup\{\overline{P}:P\in P'\}=\overline{\bigcup\{P:P\in P'\}}$.

定义 1.2 设 P 是空间 X 的子集族. P 称为 X 的遗传闭包保持(记为 HCP)集族，如果对于 $H(P)\subset P\in P$，$\{H(P):P\in P\}$是 X 的闭包保持集族，P 称为 X 的可数遗传闭包保持(记为 $CHCP$)集族，如果 P 的任何可数子族是 X 的遗传闭包保持集族。P 称为 X 的弱遗传闭包保持(记为 $WHCP$)集族，如果对于任意 $x(p)\in p\in P$，集族 $\{\{x(p)\}:p\in P\}$是 X 的闭包保持集族(等价于$\{x(P):P\in P\}$是 X 的离散子集)。P 称为 X 的可数弱遗传闭包保持(记为 $CWHCP$)集族，如果 P 的任何可数子族是 X 的弱遗传闭包保持集族。

显然，下列关系成立

$$\begin{tikzcd}
 & & CHCP \arrow[dr] & \\
HCP \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[drr] & CP & & CWHCP \\
 & & WHCP \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

定义 1.3 空间 X 称为 Fréchet 空间，如果对于 $x\in\overline{A}\subset X$，存在 A 中的序列收敛于点

福建省教委科学基金资助课题

X。空间 X 称为 K-空间，如果对于 $A\subset X$，A 是 X 的闭子集当且仅当对于 X 的任意紧子集 K，$A\cap K$ 是 K 的闭子集。

Fréhet 空间是 K—空间。

2 遗传闭包保持集族的一些性质

性质 2.1[4]若 X 是一个正则空间。如果 P 是 X 的 HCP 集族，那么 $\{\overline{P}:P\in P\}$ 也是 X 的 HCP 集族。

引理 2.2 设 P 是 X 的 $CWHCP$ 集族，置 $F=\{x\in X:P$ 在点 x 不是点有限的$\}$，那么 F 的可数子集是 X 的离散子集。

证 让 $A=\{x_n:n\in N\}$ 是 F 的可数无限子集。由于 P 在点 x_n 不是点有限的。由归纳法可选取 P 的可数子集族 $\{P_n:n\in N\}$ 使 $x_n\in P_n$。因为 P 是 X 的 $CWHCP$ 集族，所以 A 是 X 的离散子集。

性质 2.3 K—空间中的 $CWHCP$ 闭子集族是 HCP 集族。

证 设 X 是一个 k—空间，P 是 X 的 $CWHCP$ 闭子集族。置

$F=\{x\in X:P$ 在点 x 不是点有限的$\}$。由引理 2.2，F 的可数子集是 X 的离散子集，因而对于 X 的紧子集 K，$K\cap F$ 是有限集。

记 $P=\{P_\alpha:\alpha\in A\}$。如果 P 不是 X 的 HCP 集族，那么存在 $A^*\subset A$ 和 P_α 的非空闭子集 $Q_\alpha(\alpha\in A^*)$ 使 $U\{Q_\alpha:\alpha\in A^*\}$ 不是 X 的闭子集。因为 X 是一个 K-空间，存在 X 的紧子集 K 使 $K\cap(U\{Q_\alpha:\alpha\in A^*\})$ 不是 K 的闭子集。对于 $B\subset A^*$，置

$R(B)=K\cap(U\{Q_\alpha:\alpha\in A^*\setminus B\})$，那么 $K\cap(U\{Q_\alpha:\alpha\in A^*\})=R(\varphi)$，并且 $R(\varphi)=(R(B)\setminus F)\cup(R(B)\cap F)\cup(K\cap(U\{Q_\alpha:\alpha\in B\}))$。若 B 是 A^* 的有限子集，那么 $R(B)\setminus F$(不是 K 的闭子集，从而它是一个无限集。取 $Z_1\in R(\varphi)\setminus F$，置

$A_1=\{\alpha\in A^*:Z_1\in Q_\alpha\}$，那么 A_1 是 A^* 的非空有限子集。取 $Z_2\in R(A_1)\setminus F$，置 $A_2=\{\alpha\in A^*\setminus A_1:Z_2\in Q_\alpha\}$，那么 A_2 是 A^* 的非空有限子集，$A_1\cap A_2=\varphi$ 并且 $Z_1\neq Z_2$. 依数学归纳法可构造 A^* 中两两互不相交的非空有限子集列 $\{A_n\}$ 和 K 中两两互不相同的点列 $\{Z_n\}$ 使 $Z_n\in\cap\{Q_\alpha:\alpha\in An\}(n\in N)\}$，对于 $n\in N$ 取定 $\alpha_n\in A_n$ 那么 $Z_n\in Q_{\alpha n}\subset P_{\alpha n}$，因为 $\{P_{\alpha n}:n\in N\}$ 是 $WHCP$ 集族，所以 $\{Z_n:n\in N\}$ 是紧子集 K 的无限闭离散子空间，矛盾。因此，P 是 HCP 集族。

在上述性质的证明中若将 P_α 的非空闭子集 Q_α 换为 P_α 的单点集 $\{q_\alpha\}$，则得到下述性质的证明。

性质 2.4 K—空间中的 $CWHCP$ 集族是 $WHCP$ 集族。

性质 2.5[5] Fréchet 空间中的 $CWHCP$ 集族是 HCP 集族。

3 k—网

本节所讨论空间均指满足正则分离性公理的拓扑空间。

定义 3.1 X 的子集族 P 称为 X 的 k—网，如果对于 X 的紧子集 k 和开子集 $U\supset K$，存在 P 的有限子族 P' 使 $K\subset UP'\subset U$.

本节讨论各种具有 δ—弱形式的遗传闭包保持 k—网的空间之间的关系。

由性质 2.1 得

定理 3.2 X 具有 $\delta-HCP$ $k-$网当且仅当 X 具有 δ-HCP 闭 $k-$网。

由性质 2.3 得

定理 3.3 若 $K-$空间 X 具有 $\delta-CWHCP$ 闭 $K-$网，则 X 具有 $\delta-HCP$ $K-$网。

由性质 2.4 得

定理 3.4 若 K-空间 X 具有 δ-$CWHCP$ $K-$网，那么 X 具有 δ-$WHCP$ K-网.

由性质 2.5 得

定理 3.5 若 Fréchet 空间 X 具有 $\delta-CWHCP$ $K-$网，那么 X 具有 $\delta-HCP$ $K-$网。

定理 3.6 若 X 具有 $\delta-CWHCP$ $K-$网，那么 X 具有 δ-点有限 K-网。

证 设 P 是空间 X 的 δ-$CWHCP$ K-网，记 $P=\bigcup\{P_n:n\in N\}$. 其中每一 P_n 是 X 的 $CWHCP$ 集族。由于有限个 $CWHCP$ 集族的并仍是 $CWHCP$ 集族，不妨设 $P_n\subset P_{n+1}$，对于 $n\in N$，置

$F_n=\{x\in X:P_n$ 在点 X 不是点有限的$\}$，

$P_n^*=\{P\backslash F_n:P\in P_n\}\bigcup\{\{x\}:x\in F_n\}$，则 P_n^* 是 X 的点有限集族。下面证明

$U\{P_n^*:n\in N\}$ 是 X 的 $K-$网，对于 X 的紧子集 K 和开子集 $U\supset K$，存在 $n\in N$ 和 P_n 的有限子族 P' 使 $K\subset UP'\subset U$. 置

$P^*=\{P\backslash F_n:P\in P'\}\bigcup\{\{x\}:x\in F_n\cap K\}$. 由引理 2.2，$P^*$ 是 P_n^* 的有限子族且 $K\subset UP^*\subset U$. 故 X 具有 δ-点有限 K-网.

例 3.7 δ-点有限 K-网$\nRightarrow\delta$-$CWHCPK$-网（即存在具有 δ-点有限 K-网的空间，它不具有 δ-$CWHCP$ K-网。下同）

Michael 直线[6]具有上述性质。

例 3.8 δ-CPK-网$\nRightarrow\delta$-点有限 K-网。

任何满足第一可数性公理的不可度量化的 M_1-空间[7]具有例 3.8 的性质。

例 3.9 K，δ-$WHCPK$-网$\nRightarrow\delta$-$CWHCP$ 闭 K-网.

对于 $\alpha<\omega_1$，让 I_α 是具有通常欧氏拓扑的单位区间 I，置 $X=\bigoplus\{I_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，记 A 是 X 的 ω_1 个零点的集合。让 $I\omega_1=X/A$，则 $I\omega_1\times I$ 是一个具有 δ-$WHCP$ K-网的 K-空间[8]，它不是具有 δ-HCP K-网[4]。由定理 3.3 知 $I\omega_1\times I$ 不具有 δ-$CWHCP$ 闭 K-网.

例 3.10 δ-$CHCP$ 闭 K-网$\nRightarrow\delta$-CP K-网.

构造 设 R 是实数集. 让

$X=R\bigcup(U\{R_n:n\in N\})$，其中 $R_n=R\times\{n\}$. 我们采用如下记号：对于 $x\in R,n\in N$，

$N(x,n)$ 表示 R_n 在具有通常欧氏拓扑下点 (x,n) 的邻域；

$A(x,n)$ 表示 $Rn\backslash\{(x,n)\}$ 的可数子集；

$F(x,n)$ 表示 $\{x\}\bigcup\{(x,m):m\geqslant n\}$.

以如下方式赋于 X 上的拓扑：$X\backslash R$ 中的点是 X 的孤立点；对于 $x\in R$，点 x 的邻域基中的元形如

$\{x\}\bigcup(U\{N(x,n\backslash A(x,n):n\geqslant m\})$.

显然，X 是 T_1 空间且存在由既开且闭集组成的基，于是 X 是正则空间。

X 具有 δ-$CHCP$ 闭 K-网. 置

$H_n=\{F(x,n):x\in R\}$，

$H=\{\{x\}:x\in X\}\cup(U\{H_n:n\in N\})$.

若 K 是 X 的紧子集，那么 $R\cap K$ 是有限集，并且存在 X 的有限子集 H 使

$K\subset H\cup\{U\{F(x,1):x\in R\cap K\}\}$.

因而 H 是 X 的 K—网。对于 $n\in N$，由 X 所赋予的拓扑，每一 H_n 是 X 的 $CHCP$ 闭集族。又由于 X 自身是一个 δ-离散空间，所以 H 是 X 的 δ-$CHCP$ 闭 K-网.

X 不具有 δ-CP K-网。

若不然，可以设 X 具有 δ-CP 闭 K-网 $U\{P_n:n\in N\}$，其中 $P_n\subset P_{n+1}$ 且 P_n 关于有限并封闭。对于 $x\in R$，置

$$V_x=\{x\}\cup(X\backslash R).$$

因为 V_x 是 X 的开子集且紧子集 $F(x,1)\subset V_x$，所以存在 $m(x)\in N$ 及 $P(x,m(x))\in P_{m(x)}$ 使

$$F_{(x,1)}\subset P_{(x,m(x))}\subset V_x.$$

对于 $K\in N$，置

$S_K=\{x\in R:m(x)=K\}$，那么 $R=U\{S_K:K\in N\}$，因而存在 $K\in N$ 使 S_K 是 R 的不可数子集，因为 S_K 作为实直线 R 具有通常拓扑下的子空间是遗传性的 LindeLöf 空间，于是存在点 $P\in S_K$ 使 P 点在 R 的具有通常拓扑下的每个邻域含有 S_K 中不可数个点[9]. 这时

$p\bar{\in}\cup\{P(x,K):X\in S_K\backslash\{p\}\}$，但是$\overline{p\in\cup\{P(x,K):x\in S_K\backslash\{P\}\}}$.

事实上，对于点 P 在 X 中的邻域

$W=\{p\}\cup(\cup\{N(p,n)\backslash A(p,n):n\geqslant m\})$，记 $N(p,n)=M(p)\times\{m\}$，

$A(p,m)=B(p)\times\{m\}$，

其中 $M(p)$是点 p 在 R 的具有通常拓扑下的邻域，$B(p)$是 $R\backslash\{p\}$的可数子集，由点 p 的取法知存在 $q\in M(p)\cap S_k\backslash B(p)\cup\{p\}$，这时

$(q,m)\in P(q,k)\cap(N(p,m)\backslash A(p,m))$，所以 $W\cap P(q,k)\neq\varphi$，故

$\overline{p\in\cup\{P(x,k):x\in S_K\backslash\{p\}\}}$.

因而 P_K 不是 X 的 CP 集族，因此，X 不具有 δ-CP K-网。

猜测 3.11　δ-$WHCP$ 闭 K-网$\nRightarrow$点　G_δ-性质。

猜测 3.12　δ-$CHCP$ K-网$\nRightarrow$点 G_δ—性质。

参 考 文 献

1 Okuyama A. On a generalization of Σ—spaces. Pacific J Math, 1972; 42(2): 485—495

2 Burke D, Engelking R, Lutzer D. Hereditarily closurepreserving colections and metrization. Proc AMS. 1975; 51(2): 483—488

3 Foyed L. A Characterization of closed images of metric spales, Proc AMS, 1985; 95(3): 487—490

4 Lin Shou(林寿). On a problem of K. Tamano. Q and A in Gen Top, 1988; 6(1): 99—102

5 Kanatani Y, Sasaki N, Nagata J. New Characterization of some generalized metric spaces. Math Japonica, 1985; 30(5): 805—820

6 Michael E. The product of a normal space and a metric space need not be normal. Bull AMS, 1963; 69:

375—376

7 Ceder J. Some generalizations of metric space. Pacific J Math, 1961; 11: 105—125

8 林寿. Lašner 空间的可数积. 宁德师专学报(自然科学版), 1988; (2): 8—10

9 凯莱 J L 著. 吴从炘, 吴让泉译, 一般拓扑学. 北京: 科学出版社, 1982

ON HEREDITARILY CLOSURE-PRESERVING COLLECTIONS

Lin Shou

Abstract In this paper, the properties of hereditarily closure—preserving collections of a variety of weak forms are discussed, and relationships among the spaces with δ—weak form hereditarily closure-preserving k-networks are investigated.

Key words Herditarily closure preserving collection Weakly hereditarily closure Preserving collection K—3space K—network.

山西师大学报(自然科学版)
第4卷 第1期 1990年

Journal of ShanXi Teacher's University
Natural Science Edition VoL. 4. No. 1 1990

关于积分中值定理中“中间点”的进一步估计

李少琪 贾计荣
(山西师大数学系) (太原市教院数学科)

摘要 本文讨论了当 $f(t)\in C^{n-1}[a,b]$, $f^{(i)}(a)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(a)$存在, $f^{(n)}(a)g(a)\neq 0$, $g(t)\in C[a,b]$且在 a,b 上保持同一符号时,第一积分中值定理中的中间点的渐近状态。

关键词 $f(t)\in C^{(n-1)}[a,b]$ $f^{(i)}(a)=0(i=1,2,3,\cdots,n-1)$ $f^{(n)}(a)$存在 $f^{(n)}(a)g(a)\neq 0$

积分第一中值定理可以叙述为:

若 $f(t)\in C[a,b]$, $g(t)\in C[a,b]$且在$[a,b]$上不变号,则对任何 $x\in[a,b]$,存在 $\xi\in(a,x)$,使得

$$\int_a^x f(t)g(t)dt=f(\xi)\int_a^x g(t)dt$$

这里的 ξ 是依赖于 x 的,研究当 x 变化时 ξ 的渐近状态 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}$ 是有趣的。

如果在积分第一中值定理中再设 $f'(a)$存在,并且 $f'(a)g(a)\neq 0$,可以有 $\lim\limits_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}$。[1]

本文试图在 $f(t)$有高阶导数的情形下讨论 ξ 的渐近状态,并指出若条件 $f^{(n)}(a)g(a)\neq 0$ 的条件不具备时,ξ 的渐近状态可以有另外的估计式。

定理 设 $f(t)\in C^{n-1}[a,b]$, $f^{(n)}(a)$存在, $g(t)\in C[a,b]$,且 $g(t)$在$[a,b]$上不变号, $f^{(i)}(a)=0(i=1,2,\cdots,n-1)$, $f^{(n)}(a)g(a)\neq 0$,则对积分中值定理中的 ξ 有

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{(1+n)^{\frac{1}{n}}}.$$

证明:设 $\varphi(x)=\dfrac{\int_a^x f(t)g(t)dt-f(a)\int_a^x g(t)dt}{(x-a)^{1+n}}$

首先,由定理的假设可以用 n 次 L'Hospital 法则

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)}{(1+n)(x-a)^n}$$

$$=g(a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(1+n)(x-a)^n}=g(a)\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{(1+n)n(x-a)^{n-1}}$$

$$=g(a)\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(1+n)n\cdots 2(x-a)}=\frac{1}{(1+n)!}g(a)f^{(n)}(a) \tag{1}$$

另一方面,由积分第一中值定理可用 $f(\xi)\int_a^x g(t)dt$ 代替 $\int_a^x f(t)g(t)dt$,其中 ξ 为(a,x)中