第49卷第1期 数学学报中文版 Vol.49, No.1
2006年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series Jan., 2006

文章编号: 0583-1431(2006)01-0029-10 **文献标识码:** A

$S_\omega \times X$ 的 k 空间性质及相关结果

林 寿

漳州师范学院数学系 漳州 363000
宁德师范高等专科学校数学系 宁德 352100
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

刘 川

俄亥俄大学数学系 俄亥俄 OH43701 美国
E-mail: liuc1@ohio.edu

摘 要 本文讨论了特殊的度量空间 T_ω 和 T_{ω_1} 在探讨具有点可数 k 网的 k 空间类中乘积性质与映射性质方面的作用. 一方面, 通过 T_ω 分析了为解决 1973 年 Michael 提出的 "k 空间的乘积问题" 而引入的三个空间类的相互关系; 另一方面, 利用 T_{ω_1} 研究了局部可分度量空间的闭映象的内在刻画.

关键词 k 空间; k_ω 空间; k 网
MR(2000) 主题分类 54D50, 54B10, 54C10
中图分类 O189.1

k-Space Property of $S_\omega \times X$ and Related Results

Shou LIN

Department of Mathematics, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, *P. R. China*
Department of Mathematics, Ningde Teachers College, Ningde 352100, *P. R. China*
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

Chuan LIU

Department of Mathematics, Ohio University, Zanesville, Ohio, OH 43701, *USA*
E-mail: liuc1@ohio.edu

Abstract In this paper some functions of product and mapping properties of k-spaces with a point-countable k-network are discussed via special metric spaces T_ω and T_{ω_1}. The relationships among the three classes of spaces, which are introduced respectively for solving the "the products of k-spaces question" posed by Michael in 1973, are analysed via T_ω; on the other hand, some internal characterizations of closed images of locally separable metric spaces are studied via T_{ω_1}.

Keywords k-spaces; k_ω-spaces; k-networks
MR(2000) Subject Classification 54D50, 54B10, 54C10
Chinese Library Classification O189.1

收稿日期: 2003-12-10; 接受日期: 2004-10-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271026)

0 引言及记号

1973 年 Michael [1] 提出寻求两 k 空间的充分且必要条件使其乘积空间是 k 空间. 1983 年, Tanaka [2] 进一步提出两度量空间的商 s 映象的乘积空间是 k 空间的充分且必要条件问题. 这类问题简称为 "k 空间的乘积问题" (the products of k-spaces question). 度量空间的商 s 映象是具有点可数 k 网的 k 空间, Tanaka 的问题可归结为一些集论公理和下述问题 [3]: 若 X 是具有点可数 k 网的 k 空间, 寻求空间 X 的性质, 使得 $S_\omega \times X$ 是 k 空间. 不少学者对此进行了研究, 获得了大量的结果. 如 1995 年, Shibakov [3] 提出条件: X 是局部 $\aleph_0$ 空间; 1997 年 Tanaka [4] 提出条件: X 的 σ 紧的 cosmic 闭子空间是 $\aleph_0$ 空间; 2001 年刘川 [5] 提出条件: X 的 cosmic 闭子空间是 $\aleph_0$ 空间.

由此, 引起我们对这些条件相互关系的兴趣. 这些空间类均涉及 1980 年 Gruenhage [6] 定义的特殊的度量空间 T(本文改记为 T_ω). 另一方面, 度量空间的闭映象也是具有点可数 k 网的 k 空间, 而局部紧度量空间的闭映象的内在刻画同样依赖 T_ω(见文 [7]). "局部可分度量空间" 的映射理论较之 "局部紧度量空间" 或 "度量空间" 的映射理论更不易处理. 如局部可分度量空间的闭映象的进一步的内在刻画涉及映象空间子集的某些第二可数性的讨论. 本文第二部分通过一类与 T_ω 相似的特殊度量空间 T_{ω_1}, 给出了局部可分度量空间的闭映象的有趣的内在刻画.

本文所论空间都是满足正则且 T_2 分离性质的拓扑空间, 映射是连续的满函数. 未定义的术语可参考文 [8].

1 局部 k_ω 空间

本节讨论 k 空间的乘积问题. 先回忆几个相关概念. 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖. $\mathscr{P}$ 称为 X 的网 (networks), 若对于 X 中的点 x 及含 x 的开集 U, 存在 $P \in \mathscr{P}$, 使得 $x \in P \subset U$. $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k 网 (k-networks), 若对于 X 中的紧子集 K 及含 K 的开集 U, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限子集 $\mathscr{F}$, 使得 $K \subset \cup\mathscr{F} \subset U$. $\mathscr{P}$ 称为 X 的紧闭包的 k 网 (compact-closure k-networks), 若 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网且 $\mathscr{P}$ 的每一元在 X 中的闭包是 X 的紧子集. 具有可数网的空间称为 cosmic 空间, 具有可数 k 网的空间称为 $\aleph_0$ 空间. 显然, 可分度量空间是 $\aleph_0$ 空间, $\aleph_0$ 空间是 cosmic 空间, cosmic 空间是遗传 Lindelöf 空间和遗传可分空间.

设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的覆盖. 称空间 X 关于 $\mathscr{F}$ 具有弱拓扑 (weak topology), 如果 X 的子集 A 是 X 的闭子集当且仅当对于每一 $F \in \mathscr{F}$, $A \cap F$ 是 F 的闭子集. 空间 X 称为 k 空间 (序列空间: sequential spaces), 若 X 关于其全体紧子集 (紧度量子集) 所成的覆盖具有弱拓扑. 空间 X 称为 k_ω 空间, 若 X 关于某一紧子集组成的可数覆盖具有弱拓扑. 显然, k_ω 空间和序列空间都是 k 空间.

在介绍几个特殊的空间之前先给出一个生成特别类空间的机器. 设 Z 是拓扑空间, $\{Z_n\}_{n<\omega}$ 是互不相交的空间族且每一 Z_n 同胚于 Z, 且 $\infty \notin \bigcup_{n<\omega} Z_n$. 置 $T_Z = \{\infty\} \cup (\bigcup_{n<\omega} Z_n)$. 赋予 T_Z 如下拓扑: 每一 Z_n 是 T_Z 的开子空间, 点 ∞ 在 T_Z 中的邻域基元形如 $T_Z \setminus \bigcup_{n<m} Z_n$, 其中 $m < \omega$. 为叙述的方便起见, 空间 T_Z 称为由 Z 生成的 T 空间. 文 [6] 定义的空间 T 就是由无限可数离散空间生成的 T 空间.

设 α 是一无限基数. 让D是基数为α的离散空间, 由D生成的 T 空间记为 T_α. 显然 T_α 是度量空间. 另一方面, 把 α 个非平凡的收敛序列的拓扑和, 粘合所有极限点得到的商空间记为 S_α.

本文尤其关注两类问题:

(1) $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 的 k 空间性质;

(2) 不含闭子空间同胚于 T_ω 或 T_{ω_1} 的空间.

引理 1.1 设$S_\omega \times X$是 k 空间, 则 X的第一可数闭子空间是局部可数紧的 (见文 [2] 定理 1).

对于空间 X 及其子集 F 与 U, U 称为 F 的序列邻域 (sequential neighborhoods), 若 X 中每一极限点在 F 中的收敛序列是终于 U 的. X 的子集 F 称为 X 的序列开集 (sequentially open sets), 若 F 是其每一单点集的序列邻域. 易验证, X 是序列空间当且仅当 X 的序列开集是 X 的开子集. 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为点可数的 (point-countable), 若 X 的每一点至多属于 $\mathscr{P}$ 中的可数多个元.

引理 1.2 设 X 是具有点可数 k 网的 k 空间, 则 X 的可数紧闭子集是紧可度量空间 [9], 从而 X 是序列空间, 并且下述条件相互等价:

(1) X 具有点可数的紧闭包的 k 网;

(2) X 的第一可数闭子空间是局部紧的 [10];

(3) X 不含闭子空间同胚于 T_ω(见文 [6]);

(4) X 的 $\aleph_0$ 闭子空间是 k_ω 空间 [4].

映射 $f: X \to Y$ 称为逆紧映射 (perfect mappings), 若 f 是闭映射 (closed mappings) 且每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集. 逆紧映射在国内也常称为完备映射.

引理 1.3 设 k 空间 X 具有点可数的紧闭包的 k 网 $\mathscr{P}$, 则下述条件相互等价:

(1) X 不含闭子空间其逆紧映象是 S_{ω_1};

(2) 对于每一 $x \in X$, 存在 $\mathscr{P}$ 的可数子集 $\mathscr{P}_x$, 使得 $\cup\mathscr{P}_x$ 是 x 在 X 中的邻域;

(3) X 是局部 σ 紧空间.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设空间 X 不含闭子空间其逆紧映象是 S_{ω_1}, 则

对于 X 的每一紧子集 K, 存在 $\mathscr{P}$ 的可数子集 $\mathscr{H}_K$, 使得 $\cup\mathscr{H}_K$ 是 K 在 X 中的序列邻域. $(*)$

若不然, 由于 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网, 存在 $\mathscr{P}$ 的有限子集 $\mathscr{F}$ 覆盖 K, 则 $\cup\mathscr{F}$ 不是 K 的序列邻域, 从而存在 $X \setminus \cup\mathscr{F}$ 中的序列 $\{x_{0n}\}$ 收敛于某点 $x_0 \in K$. 为了叙述的简洁起见, 对于 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$, 记 $[x_n] = \{x\} \cup \{x_n : n < \omega\}$. 让 $\mathscr{P}_0 = \{P \in \mathscr{P} : P \cap [x_{0n}] \neq \emptyset\}$, 则 $\mathscr{P}_0$ 是可数的. 于是 $\cup\mathscr{P}_0$ 不是 K 的序列邻域, 存在 $X \setminus \cup\mathscr{P}_0$ 中的序列 $\{x_{1n}\}$ 收敛于某点 $x_1 \in K$. 让 $\mathscr{P}_1 = \{P \in \mathscr{P} : P \cap [x_{1n}] \neq \emptyset\}$. 则 $\mathscr{P}_1$ 是可数的. 于是 $\cup(\mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_1)$ 不是 K 的序列邻域, 存在 $X \setminus \cup(\mathscr{P}_0 \cup \mathscr{P}_1)$ 中的序列 $\{x_{2n}\}$ 收敛于某点 $x_3 \in K$. 按这种方式, 可以得到互不相交的序列集 $\{\{x_{\alpha n}\} : \alpha < \omega_1\}$, 使得

(3.1) 每一序列 $\{x_{\alpha n}\}_{n<\omega}$ 收敛于 $x_\alpha \in K$ 且所有的 $x_{\alpha n} \neq x_\alpha$;

(3.2) $\mathscr{P}$ 的每一元至多与一个序列 $\{x_{\alpha n}\}_{n<\omega}$ 相交.

让 $H = K \cup \{x_{\alpha n} : \alpha < \omega_1, n < \omega\}$. 由 (3.2) 及 $\mathscr{P}$ 是 X 的 k 网, X 的任何紧子集至多与有限多个序列 $\{x_{\alpha n}\}_{n<\omega}$ 相交, 所以 X 的紧子集与 H 之交是 X 的闭子集. 因为 X 是 k 空间, 所以 H 是 X 的闭子集. 同理, 对于每一 $\alpha < \omega_1$ 及序列 $\{x_{\alpha n}\}_{n<\omega}$ 的任何有限子集 F_α, $\bigcup_{\alpha<\omega_1} F_\alpha$ 是 H 的闭子集. 让 $q: H \to H/K$ 是自然商映射, 则 q 是逆紧映射且 H/K 同胚于 S_{ω_1}. 这与假设 (1) 相矛盾, 故 $(*)$ 得证.

对于每一 $x \in X$, 由 $(*)$, 存在 $\mathscr{P}$ 的可数子集 $\mathscr{H}_0$, 使得 $\cup\mathscr{H}_0$ 是 $\{x\}$ 在 X 中的序列邻域. 再由 $(*)$ 及 $\mathscr{P}$ 中元具有紧闭包性质, 存在 $\mathscr{P}$ 的可数子集 $\mathscr{H}_1$, 使得 $\cup\mathscr{H}_1$ 是 $\cup\overline{\mathscr{H}_0}$ 在 X 中的序列邻域 ($\overline{\mathscr{H}_0} = \{\overline{H} : H \in \mathscr{H}_0\}$, 下同). 由此, 可得到 $\mathscr{P}$ 的可数子集的序列 $\{\mathscr{H}_i\}$ 满足每一 $\cup\mathscr{H}_{i+1}$ 是 $\cup\overline{\mathscr{H}_i}$ 的序列邻域. 令 $\mathscr{P}_x = \bigcup_{i<\omega}\mathscr{H}_i$, $U = \cup\mathscr{P}_x$, 则 $\mathscr{P}_x$ 是 $\mathscr{P}$ 的可数子集且 U 是 x 在 X 中的邻域.

事实上, 由引理 1.2, X 是序列空间, 所以只需证明 U 是 X 的序列开集. 设 X 中的序列 $\{z_n\}$ 收敛于 $z \in U$, 则存在 $i < \omega$ 和 $H \in \mathscr{H}_i$, 使得 $z \in H$. 由于 $\cup\mathscr{H}_{i+1}$ 是 $\cup\overline{\mathscr{H}_i}$ 的序列邻域, 于是序列 $\{z_n\}$ 是终于 $\cup\mathscr{H}_{i+1} \subset U$, 故 U 是 X 的序列开集.

(2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的.

下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 是局部 σ 紧空间且存在 X 的闭子空间 F 及逆紧映射 $f : F \to S_{\omega_1}$, 则 F 是 σ 紧空间. 对于每一 $s \in S_{\omega_1}$, 因为 $f^{-1}(s)$ 是 F 的紧子集, 存在 F 的开子集 V, 使得 $f^{-1}(s) \subset V$ 且 $\overline{V}$ 是 F 的 σ 紧子集. 由于 f 是闭映射, $s \in f(V)^\circ \subset \overline{f(V)} \subset f(\overline{V})$, 而 $f(\overline{V})$ 是 S_{ω_1} 的 σ 紧子集, 所以 S_{ω_1} 是局部 σ 紧空间, 矛盾. 证毕.

下面是本节的主要结果.

定理 1.4 设空间 X 具有点可数 k 网且 $S_\omega \times X$ 是 k 空间, 则下述条件相互等价:

(1) X 的 σ 紧的 cosmic 闭子空间是 $\aleph_0$ 空间;

(2) X 的 cosmic 闭子空间是 $\aleph_0$ 空间;

(3) X 的 Lindelöf 闭子空间是 k_ω 空间.

证明 由于 k 空间性质是闭遗传性, 所以 X 及其闭子空间均是 k 空间. 先证明

$$X \text{ 的 Lindelöf 闭子空间是 } \sigma \text{ 紧的 cosmic 子空间.} \tag{▲}$$

设 H 是 X 的 Lindelöf 闭子空间, 由引理 1.1 和引理 1.2, H 具有点可数的紧闭包的 k 网. 因为 H 的每一映象仍是 Lindelöf 空间, 而 S_{ω_1} 不是 Lindelöf 空间, 再由引理 1.3 的 (1) $\Leftrightarrow$ (3), H 是局部 σ 紧空间, 从而 H 是 σ 紧空间. 又由于 X 的紧子集是可度量的 (引理 1.2), 所以 H 也是可数个紧度量子空间之并, 从而 H 是 cosmic 空间.

由 (▲) 及引理 1.2 可知, (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

下面证明 (3) $\Rightarrow$ (2). 设 H 是空间 X 的 cosmic 闭子空间, 则 H 是 Lindelöf 空间, 于是 H 是 k_ω 空间, 从而 H 关于某一紧子集组成的可数覆盖 $\{C_n : n < \omega\}$ 具有弱拓扑. 不妨设每一 $C_n \subset C_{n+1}$. 若 K 是 H 的紧子集, 则存在 $m < \omega$, 使得 $K \subset C_m$. 若不然, 存在 ω 的递增序列 $\{n_i\}$ 及 K 的序列 $\{x_i\}$, 使得 $x_0 \in C_{n_0}$ 且每一 $x_{i+1} \in C_{n_{i+1}} \setminus C_{n_i}$. 让 $D = \{x_i : i < \omega\}$, 则对于每一 $k < \omega$ 有 $D \cap C_k \subset D \cap C_{n_k} = \{x_i : i \le n_k\}$, 于是 D 是紧子集 K 的无限闭离散子集, 矛盾. 对于每一 $n < \omega$, 由于 C_n 是可度量的紧空间, 让 $\mathscr{P}_n$ 是 C_n 的可数基. 易验证, $\bigcup_{n<\omega}\mathscr{P}_n$ 是 H 的可数 k 网, 所以 H 是 $\aleph_0$ 空间. 证毕.

回到本文的意图之一: 讨论 "k 空间的乘积问题" 涉及的三个条件的相互关系. 定义类 $\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ 或 $\mathbf{L}$ 中的空间都是具有点可数 k 网的空间, 与 S_ω 之积空间是 k 空间且依次满足如下条件之一: 局部 $\aleph_0$ 空间, σ 紧的 cosmic 闭子空间是 $\aleph_0$ 空间, 或 cosmic 闭子空间是 $\aleph_0$ 空间. 回忆一些集论公理. 让 ω^ω 是所有从 ω 到 ω 内函数之集合. 对于 $f, g \in \omega^\omega$, 定义 $f \le^* g$, 如果 $\{n < \omega : g(n) < f(n)\}$ 是有限集. BF(ω_2) 是下述断言: 对于 $F \subset \omega^\omega$, 如果 $|F| < \omega_2$, 则存在 $g \in \omega^\omega$, 使得对于所有的 $f \in F$ 有 $f \le^* g$. 让 $\mathbf{b} = \min\{\gamma$: 存在 $\le^*$ 无界族 $A \subset \omega^\omega$, 使得

$|A| = \gamma\}$, 其中 A 称为 "$\leq^*$ 无界的", 如果对于每一 $f \in \omega^\omega$ 存在 $g \in A$, 使得 $f \leq^* g$.

有下述集论结果 [4]:

• $\mathbf{b} \geq \omega_1$;

• $\mathrm{BF}(\omega_2) \Leftrightarrow$ "$\mathbf{b} \geq \omega_2$";

• (CH) $\Rightarrow \neg\mathrm{BF}(\omega_2) \Leftrightarrow$ "$\mathbf{b} = \omega_1$";

• (MA) $\Rightarrow$ "$\mathbf{b} = 2^\omega$";

• $(\mathrm{MA} + \neg\mathrm{CH}) \Rightarrow \mathrm{BF}(\omega_2)$.

因为 Gruenhage [6] 的下述经典结果, 集论与 "k 空间的乘积问题" 有密切的联系.

引理 1.5 $\neg\mathrm{BF}(\omega_2)$ 当且仅当 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间.

至此, 三个空间类 $\mathbf{S}, \mathbf{T}$ 与 $\mathbf{L}$ 之间的相互关系可总结如下.

推论 1.6 $\mathbf{S} \subset \mathbf{L} = \mathbf{T}$, 并且 $\mathbf{S} = \mathbf{L}$ 当且仅当 $\neg BF(\omega_2)$.

证明 易验证, 局部 $\aleph_0$ 的 Lindelöf 空间是 $\aleph_0$ 空间. 由定义及定理 1.4, 显然有 $\mathbf{S} \subset \mathbf{L} = \mathbf{T}$. 设 $\neg\mathrm{BF}(\omega_2)$, 由引理 1.5, $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间. 若 $X \in \mathbf{L}$, 如果存在 X 的闭子空间 H 和逆紧映射 $f: H \to S_{\omega_1}$, 则 $\mathrm{id}_{S_\omega} \times f: S_\omega \times H \to S_\omega \times S_{\omega_1}$ 也是逆紧映射 (见文 [11] 定理 3.7.9), 从而是商映射. 而商映射保持 k 空间性质 (见文 [11] 定理 3.3.22), 所以 $S_\omega \times H$ 不是 k 空间, 这与 $S_\omega \times X$ 是 k 空间相矛盾. 由引理 1.3 的 (1) $\Leftrightarrow$ (3), X 是局部 σ 紧空间, 再由定理 1.4 及其证明中的 ($\blacktriangle$), X 是局部 $\aleph_0$ 空间, 所以 $X \in \mathbf{S}$, 故 $\mathbf{S} = \mathbf{L}$. 另一方面, 设 $\mathrm{BF}(\omega_2)$, 则 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 于是 $S_{\omega_1} \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{S}$, 故 $\mathbf{S} \neq \mathbf{L}$. 证毕.

推论 1.7 $X \in \mathbf{S}$ 当且仅当 X 是具有点可数 k 网的局部 k_ω 空间.

证明 设 X 是具有点可数 k 网的局部 k_ω 空间. 由于两局部 k_ω 空间之积空间是 k 空间 (见文 [8] 命题 3.8.14), 又由于 S_ω 是 k_ω 空间, 所以 $S_\omega \times X$ 是 k 空间, 从而 $X \in \mathbf{S}$. 反之, 设 $X \in \mathbf{S}$, 由定理 1.4, X 是具有点可数 k 网的局部 k_ω 空间. 证毕.

由此可知, 假设 $\neg\mathrm{BF}(\omega_2)$ 之下, 类 $\mathbf{T}$ 或类 $\mathbf{L}$ 都一致于具有点可数 k 网的局部 k_ω 空间. 特别提醒读者注意, 在这些类的确定中集论假设发挥了必不可少的作用. 另一方面, 在讨论 "k 空间的乘积问题" 中, 类 $\mathbf{L}$ 或类 $\mathbf{T}$ 也仅是回答本文开头提出的 Tanaka 问题的真子类. 因为在假设 (CH) 之下, 存在具有点可数闭 k 网的 σ 紧空间 X, 使得 $S_\omega \times X$ 是 k 空间, 但是 X 不是局部 $\aleph_o$ 空间 (见文 [3] 例 3.2).

2 局部 $\aleph_1$ 紧空间

引理 1.2 的各条件是分析乘积空间 $S_\omega \times X$ 的 k 空间性质的基础. 下述 Tanaka [7] 的定理表明这些条件也与局部紧度量空间闭映象的内在特征密不可分.

引理 2.1 空间 X 是局部紧空间的闭映象当且仅当 X 是度量空间的闭映象且 X 的第一可数闭子空间是局部紧的. 证毕.

Velichko [12] 曾提出关于局部可分度量空间映象的一般性问题. 这激发我们讨论局部可分度量空间闭映象的内在刻画. 1997 年 Sakai [13] 获得了下述较好结果.

引理 2.2 空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有点可数可分 k 网的 Fréchet 空间. 证毕.

Velichko 的问题及 Sakai 的定理导出下述问题: 怎样的 "度量空间的闭映象" 恰好刻画了

“局部可分度量空间的闭映象”? 文 [14] 曾证明一个与引理 2.1 平行的结果 (另一表述方式见本文的推论 2.11): 空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是度量空间的闭映象且 X 的第一可数闭子空间是局部可分的. 度量空间的闭映象是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间 (见引理 2.3). 一个更为精确的问题是: 局部可分度量空间的闭映象是否可刻画为第一可数闭子空间是局部可分的, 具有点可数 k 网的 Fréchet 空间? 上述结论与问题中提到的性质 “第一可数闭子空间是局部可分的”, 与上节中讨论的性质 “第一可数闭子空间是局部紧的”, 具有一种内在的联系: 分别涉及特殊度量空间 T_{ω_1} 和 T_ω (见引理 2.8 和引理 1.2). 以此为出发点, 我们获得了局部可分度量空间的闭映象较好的分解结果.

回忆几个相关概念. 设 X 是拓扑空间. X 的子集族 $\mathbf{P}$ 称为紧有限 (compact-finite) (紧可数 (compact-countable)) 的, 若 X 的每一紧子集至多与 $\mathbf{P}$ 中的有限 (可数) 多个元相交. X 称为 Fréchet 空间, 若对于 X 的子集 A 及 $x \in \overline{A}$, 存在 A 中点组成的序列在 X 中收敛于 x. 易验证, 第一可数空间是 Fréchet 空间, 而 Fréchet 空间是序列空间. X 称为 $\aleph_1$ 紧空间, 若 X 的闭离散子空间至多是可数集. X 称为 meta-Lindelöf 空间, 若 X 的每一开覆盖具有点可数的开加细. Lindelöf 空间等价于 $\aleph_1$ 紧的 meta-Lindelöf 空间 (见文 [15] 定理 6.6.22).

引理 2.3 空间 X 是度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有 σ 紧有限 k 网的 Fréchet 空间 (见文 [16] 或见文 [8] 定理 2.5.10). 证毕.

引理 2.4 $\aleph_1$ 紧的 k 空间中的紧有限集族是可数族.

证明 设 $\mathbf{P}$ 是 $\aleph_1$ 紧的 k 空间 X 中的紧有限集族. 若 $\mathbf{P}$ 不是可数的, 由 $\mathbf{P}$ 的点有限性及不可数性, 存在 X 的不可数子集 $A = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 和 $\mathbf{P}$ 的不可数子集 $\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$, 使得每一 $x_\alpha \in P_\alpha$. 因为 X 是 $\aleph_1$ 紧空间, 集 A 不是 X 的闭离散子空间. 又因为 X 是 k 空间, 存在 X 的紧子集 K, 使得 $K \cap A$ 是无限集, 从而 K 与 $\mathbf{P}$ 中无限多个元相交, 矛盾. 证毕.

引理 2.5 点可数 k 网的 Fréchet 空间具有下述性质:

(1) 每一可分子空间是 $\aleph_0$ 空间;

(2) 每一 $\aleph_1$ 紧子空间是 Lindelöf 空间.

证明 (1) 已由文 [9] 定理 5.2 所证. 现在证明 (2) 成立. 由于具有点可数 k 网的 Fréchet 空间的每一子空间是 meta-Lindelöf 空间 (见 [9] 命题 8.6), 而 $\aleph_1$ 紧的 meta-Lindelöf 空间是 Lindelöf 的, 所以 X 的每一 $\aleph_1$ 紧子空间是 Lindelöf 空间. 证毕.

引理 2.6 设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的点可数 k 网. 若 x 在 X 中具有可数局部基, 则对于 x 在 X 中的任一邻域 U, 存在 $\mathbf{P}$ 的有限子集 $\mathbf{F}$, 使得 $x \in (\cup\mathbf{F})^\circ \subset \cup\mathbf{F} \subset U$.

证明 因为 x 在 X 中具有可数局部基, 由文 [17] 定理 1 的 (3) $\Leftrightarrow$ (4), 存在 $\mathbf{P}$ 的有限子集 $\mathbf{F}$, 使得 $\cup\mathbf{F}$ 是 $\{x\}$ 的序列邻域且 $\cup\mathbf{F} \subset U$. 又由于 X 在 x 是第一可数的, $\{x\}$ 在 X 中的序列邻域也是 $\{x\}$ 在 X 中的邻域, 所以 $x \in (\cup\mathbf{F})^\circ \subset \cup\mathbf{F} \subset U$. 证毕.

引理 2.7 设 $f : X \to Y$ 是逆紧映射, Y 是第一可数空间. 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的第一可数子集, 则 X 是第一可数空间.

证明 对于每一 $x \in X$, 记 $y = f(x)$. 设 $\{U_i\}_{i<\omega}$ 是 y 在 Y 中的可数局部基, 且 $\{V_i\}_{i<\omega}$ 是 X 的开子集族, 使得 $\{V_i \cap f^{-1}(y)\}_{i<\omega}$ 是 x 在 $f^{-1}(y)$ 中的可数局部基. 对于每一 $i < \omega$, 让 $F_i(x) = f^{-1}(y) \setminus V_i$, 则 $F_i(x)$ 是 X 的紧子集, 所以存在 X 中不相交的开子集 W_i 和 G_i, 使得 $x \in W_i$ 且 $F_i(x) \subset G_i$, 于是 $f^{-1}(y) \subset V_i \cup G_i$. 由于 f 是闭映射, 存在 $j_i < \omega$, 使得 $f^{-1}(U_{j_i}) \subset V_i \cup G_i$, 从而 $(X \setminus V_i) \cap f^{-1}(U_{j_i}) \subset G_i$. 不妨设每一 $W_i \subset V_i$ 且 $W_{i+1} \subset W_i$. 往证

$\{W_i \cap f^{-1}(U_i)\}_{i<\omega}$ 是 x 在 X 中的可数局部基. 设 X 中的序列 $\{x_i\}$, 使得每一 $x_i \in W_i \cap f^{-1}(U_i)$. 若 a 是序列 $\{x_i\}$ 的一个聚点, 由于 $f(x_i) \in U_i$, 于是在 Y 中序列 $\{f(x_i)\}$ 收敛于 y, 所以 $a \in f^{-1}(y)$. 如果 $a \neq x$, 则存在 $n < \omega$, 使得 $a \in X \setminus V_n$, 于是 $a \in G_n$, 从而有无限个 $i < \omega$, 使得 $x_i \in W_n \cap G_n = \emptyset$, 矛盾. 因而, $a = x$, 即 $\{x_i\}$ 仅能以 x 为惟一的聚点. 若序列 $\{x_i\}$ 不收敛于 x, 那么存在子序列 $\{x_{i_n}\}$ 在 X 中离散, 由于 f 是逆紧映射, 不妨设每一 $x_{i_n} \notin f^{-1}(y)$, 于是 $\{f(x_{i_n})\}_{n<\omega}$ 在 Y 中离散, 与序列 $\{f(x_i)\}_{i<\omega}$ 收敛于 y 相矛盾. 故 X 是第一可数空间, 证毕.

引理 2.8 设空间 X 具有点可数 k 网, 则下述条件相互等价:

(1) X 具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包的 k 网;

(2) X 的第一可数闭子空间是局部 $\aleph_1$ 紧的;

(3) X 不含闭子空间同胚于 T_{ω_1}.

证明 (1) $\Rightarrow$ (3) 若具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包 k 网的空间 X 含有闭子空间同胚于 T_{ω_1}, 则 T_{ω_1} 具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包的 k 网 $\mathbf{P}$. 对于每一 $t \in T_{\omega_1}$, 因为 T_{ω_1} 是第一可数空间, 由引理 2.6, 存在 $\mathbf{P}$ 的有限子集 $\mathbf{F}$, 使得 $t \in (\cup\mathbf{F})^\circ$, 而 $\cup\overline{\mathbf{F}}$ 是 T_{ω_1} 的 $\aleph_1$ 紧子空间, 所以 T_{ω_1} 是局部 $\aleph_1$ 紧空间, 矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (2) 设 F 是空间 X 的第一可数闭子空间. 若 F 不是局部 $\aleph_1$ 紧空间, 则存在 $x \in F$, 使得 x 在 F 中的任一邻域的闭包不是 F 的 $\aleph_1$ 紧子集, 于是存在 x 在 F 中的可数局部基 $\{U_n\}_{n<\omega}$ 和 F 的互不相交的闭离散子集列 $\{D_n\}$ 满足: 每一 $|D_n| = \aleph_1$ 且 $x \notin D_n \subset U_n \setminus \bigcup_{i<n} D_i$. 令 $T = \{x\} \cup (\bigcup_{n<\omega} D_n)$, 则 F 的闭子空间 T 同胚于 T_{ω_1}.

(2) $\Rightarrow$ (1) 不妨设 $\mathbf{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 k 网. 让 $\mathbf{H} = \{P \in \mathbf{P} : \overline{P}$ 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集$\}$. 下面证明 $\mathbf{H}$ 是 X 的 k 网. 对于 X 的紧子集 K, 由 Miščenko 引理 (见文 [15] 引理 7.6.1), 由 $\mathbf{P}$ 的元组成 K 的有限极小覆盖的族至多是可数的, 设其为 $\{\mathbf{P}_i\}$. 对于每一 $n < \omega$, 置 $\mathbf{A}_n = \bigwedge_{i \leq n} \mathbf{P}_i$, $A_n = \cup\mathbf{A}_n$, 则 $\{A_n\}_{n<\omega}$ 是 K 在 X 中递减的网. 如果对于每一 $n < \omega$, $\overline{A_n}$ 不是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集, 那么 $\overline{A_n}$ 含有闭离散子集 D_n, 使得 $|D_n| = \aleph_1$. 定义 $C = K \cup (\bigcup_{n<\omega} D_n)$, 并赋 C 予 X 的子空间拓扑. 则 K 在 C 中的每一邻域不是 $\aleph_1$ 紧的. 由 K 的紧性, C 不是局部 $\aleph_1$ 紧的. 让 $f : C \to C/K$ 是自然商映射. 那么 f 是逆紧映射并且 C/K 是第一可数空间 (事实上, 同胚于 T_{ω_1}), 由引理 2.7, C 是 X 的非局部 $\aleph_1$ 紧的第一可数闭子集, 矛盾. 因此, 某一 $\overline{A_m}$ 是 X 的 $\aleph_1$ 紧子集. 设 $K \subset U$, 其中 U 是 X 的开子集, 则存在 $n \geq m$, 使得 $K \subset A_n \subset U$, 即 $\mathbf{A}_n$ 是 $\mathbf{H}$ 的有限子集且 $K \subset \cup\mathbf{A}_n \subset U$, 于是 $\mathbf{H}$ 是 X 的 k 网. 证毕.

本节的主要结果是下述局部可分度量空间闭映象的分解定理.

定理 2.9 空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 具有如下性质:

(1) 具有点可数 k 网的 Fréchet 空间;

(2) 不含闭子空间同胚于 T_{ω_1};

(3) $\aleph_1$ 紧的闭子空间是可分的.

证明 先设 X 是局部可分度量空间的闭映象. 由引理 2.2 和引理 2.5, X 是具有点可数的 $\aleph_1$ 紧闭包 k 网的 Fréchet 空间, 再由引理 2.8, X 不含闭子空间同胚于 T_{ω_1}. 因为 X 是度量空间的闭映象, 由引理 2.3 和引理 2.4, X 的 $\aleph_1$ 紧子空间是 $\aleph_0$ 空间 (具有可数 k 网), 从而 X 的 $\aleph_1$ 紧的闭子空间是可分的.

反之, 设空间 X 具有所列的性质 (1)–(3). 由引理 2.8, X 具有点可数的可分闭包的 k 网. 再由引理 2.5, X 具有点可数的可分 k 网. 又由引理 2.2, X是局部可分度量空间的闭映象. 证毕.

推论 2.10 设 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间, 则 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 的第一可数闭子空间是局部可分的且 X 的 Lindelöf 闭子空间是可分的.

证明 若 X 是局部可分度量空间的闭映象, 由定理 2.9 和引理 2.8, 则 X 的第一可数闭子空间是局部可分的且 X 的 Lindelöf 闭子空间是可分的. 反之, 设具有点可数 k 网的 Fréchet 空间 X 的第一可数闭子空间是局部可分的且 X 的 Lindelöf 闭子空间是可分的, 由引理 2.5 和 2.8, X 不含闭子空间同胚于 T_{ω_1}. 又由引理 2.5, X 的 $\aleph_1$ 紧的闭子空间是可分的. 再由定理 2.9, X 是局部可分度量空间的闭映象. 证毕.

下述推论给出本节开始提到的分解定理 (即空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是度量空间的闭映象且 X 的第一可数闭子空间是局部可分的) 另一表述方式.

推论 2.11 空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有 σ 紧有限 k 网的 Fréchet 空间, 且 X 的第一可数闭子空间是局部可分的.

证明 必要性来自引理 2.3 和推论 2.10. 由引理 2.4, 在具有 σ 紧有限 k 网的 k 空间中, Lindelöf 闭子空间具有可数 k 网, 从而它是可分的, 所以充分性也来自推论 2.10. 证毕.

本节最后一个结果体现了 k 空间的乘积性质与度量空间的闭映射性质之间的某种统一性. 映射 $f : X \to Y$ 称为 s 映射, 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的可分子空间. 空间 X 的子集族 $\mathbf{P}$ 称为星可数的 (star-countable), 如果 $\mathbf{P}$ 中每一元至多与 $\mathbf{P}$ 中可数多个元相交.

推论 2.12 设 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间. 若 $S_\omega \times X$ 是 k 空间, 则

(1) X 是局部紧度量空间的闭映象;

(2) X 具有星可数 k 网;

(3) X 具有紧可数 k 网;

(4) 下述条件相互等价:

(4.1) X 是局部紧度量空间的闭 s 映象;

(4.2) X 是局部 k_ω 空间;

(4.3) X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

证明 由引理 1.1 和引理 1.2, X 的第一可数闭子空间是局部紧的 (因而, 局部可分的). 又由定理 1.4 证明中的 (▲) 知, X 的 Lindelöf 闭子空间是 cosmic 空间, 再由推论 2.10 知, X 是局部可分度量空间的闭映象. 利用引理 2.1, X 是局部紧度量空间的闭映象. 由引理 2.3 及引理 2.8 中 (2) $\Rightarrow$ (1) 的证明, X 具有紧可数的紧闭包的 k 网, 这 k 网也是 X 的星可数 k 网.

至此, 我们已证明了 (1)–(3).

下面证明 (4) 成立.

(4.1) $\Rightarrow$ (4.2) 设 X 是局部紧度量空间的闭 s 映象, 则 X 是局部可分空间. 由引理 2.5, X 是局部 $\aleph_0$ 空间. 再由引理 1.2, X 是局部 k_ω 空间. 由于 S_{ω_1} 不是局部 k_ω 空间, 所以 (4.2) $\Rightarrow$ (4.3) 成立. 最后, 设 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 由 (1), 存在局部紧度量空间 M 和闭映射 $f : M \to X$, 于是 f 是边界 L 映射 (见文 [8] 引理 2.7.22), 即每一 $f^{-1}(x)$ 的边界 $\partial f^{-1}(x)$ 是 M 的 Lindelöf 子集, 从而 $\partial f^{-1}(x)$ 是 M 的可分子集. 因此, 存在 M 的闭子空间 H, 使得 $f|_H : H \to X$ 是闭 s 映射 (见文 [8] 引理 2.1.19). 证毕.

由于在具有点可数 k 网的 k 空间类中 "k 空间的乘积问题" 尚未完全解决, 本文第一节分析了在已有较好结果的一些子类之间的相互关系. 研究 "k 空间的乘积问题" 的另一些较成功的子类有 [4]: 具有点可数 k 网的 Fréchet 空间, 具有星可数 k 网的 k 空间, 具有紧可数 k 网的 k 空

间等. 推论 2.12 表明: 在与 S_ω 之乘积空间是 k 空间的条件下, "具有紧可数 k 网的 k 空间" 是较弱的空间类.

3 几个例子

本节提供一些例子对于本文获得的部分结果的条件做些说明.

我们注意到引理 1.2 与引理 2.8 结论上的相似性, 第一个例子说明引理 1.2 中 k 空间的条件是重要的.

例 3.1 存在具有点可数闭 k 网的可数紧空间 X 满足下述条件:

(1) 第一可数闭子空间是紧的;

(2) 不具有点可数的紧闭包的 k 网;

(3) 不含闭子空间同胚于 T_ω;

(4) 含有子空间同胚于 T_ω.

以 Z 记文 [11] 例 3.10.19 构造的基数不超过连续统$\mathbf{c}$的可数紧空间且 $\omega \subset Z \subset \beta\omega$. 由于 Stone-Čech 紧化 $\beta\omega$ 的无限闭子集有基数 $2^{\mathbf{c}}$, 所以子空间 Z 的紧子集是有限集. 显然, 由 Z 生成的 T 空间 T_Z 是可数紧空间. 因为 Z 的紧子集是有限集, 所以

$$\left\{\{t\} : t \in \bigcup_{n<\omega} Z_n\right\} \cup \left\{T_Z \setminus \bigcup_{n<m} Z_n : m \in \omega\right\}$$

是 T_Z 的点可数闭 k 网. 设 A 是 T_Z 的第一可数闭子空间. 不妨设 A 是无限集. 对于每一 $n < \omega, A \cap Z_n$ 是 Z_n 的第一可数闭子集, 于是 $A \cap Z_n$ 是有限集 (否则, Z_n 含有非平凡的收敛序列), 从而 $\infty \in A$, 因此. A 是 T_Z 的紧子集. 若 T_Z 具有点可数的紧闭包的 k 网, 因为 ∞ 是 T_Z 的第一可数点, 由引理 2.6, T_Z 在 ∞ 具有紧邻域, 于是 Z 是紧空间, 矛盾. 因为 T_Z 是可数紧空间, 所以闭离散子空间是有限集, 于是 T_Z 不含闭子空间同胚于 T_ω. 由于 Z 含有可数离散子空间 ω, 记 $C = \omega$, 则 T_Z 的子空间 T_C 同胚于 T_ω.

例 3.1 构造空间 T_Z 的方法来自陈怀鹏 [18]. Gruenhage [6] 的空间 T 和陈怀鹏的构造形成了本文生成空间机器的基础. Sakai [19] 以不同方式构造了具有点可数闭 k 网的可数紧空间 X, 使得 X 的第一可数闭子空间是紧的, 但是 X 没有点可数的紧 k 网.

第二个例子说明引理 1.3 中的条件不等价于 "不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}".

例 3.2 存在具有点可数紧 k 网的 k 空间 X, 使得 X 不含闭子空间同胚于 S_ω, 但是 X 含有闭子空间其逆紧映象是 S_{ω_1}.

对于每一 $x \in I$ (单位闭区间), 设 Z_x 同胚于实直线 R 的子空间 $\{0\} \cup \{1/n : 0 < n < \omega\}$. 置 $Z = I \oplus (\bigoplus_{x\in I} Z_x)$, 则 Z 是局部紧的度量空间. 让 X 是将每一 $x \in I$ 与 Z_x 的极限点粘合成一点得到的商空间, 用 f 表示这个商映射, 则 f 是有限到一的紧覆盖映射 (见文 [8] 例 2.9.27). 从而 X 是具有点可数紧 k 网的 k 空间. 将 X 的紧子集 I 粘合成一点得到的商空间记为 Y, 用 g 表示这个商映射, 则 g 是逆紧映射, 并且 Y 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 所以 X 含有闭子空间其逆紧映象是 S_{ω_1}. 若 X 的闭子空间 F 同胚于 S_ω, 设 a 是 F 的非孤立点, 则 $a \in I$. 由于 X 中以 a 为极限的收敛序列是终于紧子集 $I \cup Z_a$ 的, 所以 a 在 F 中的任一闭邻域只能含有有限的闭离散子集. 这与 F 同胚于 S_ω 相矛盾, 故 X 不含闭子空间同胚于 S_ω.

例 3.3 存在具有点可数基的 Lindelöf 空间 X 满足下述条件:

(1) 含有闭子空间同胚于 T_ω;

(2) 含有子空间同胚于 T_{ω_1};

(3) 不含闭子空间同胚于 T_{ω_1}.

让 Z 是单位闭区间 I, B 是 Z 的 Bernstein 子集, 即 B 是 Z 的不可数子集且关于欧氏拓扑的闭子集都是可数集. 集合 Z 赋予下述拓扑 (Michael 直线拓扑): B 中的点是 Z 的孤立点, $Z\setminus B$ 中的点具有通常的欧氏邻域, 则空间 Z 具有点可数基. 由于 B 是 Bernstein 集, Z 是 Lindelöf 空间, 但是 Z 不是可分空间. 下面证明由 Z 生成的 T 空间 T_Z 具有所列性质.

由于点 ∞ 在 T_Z 具有可数局部基, 且每一 Z_n (同胚于 Z) 是具有点可数基的 Lindelöf 空间, 所以 T_Z 也是具有点可数基的 Lindelöf 空间. 因为 Z 不是可数紧空间, 所以 Z 含有可数的闭离散子空间 D, 则 T_Z 的闭子空间 T_D 同胚于 T_ω. 又因为 B 是 Z 的离散子空间, 所以 T_Z 的子空间 T_B 同胚于 T_{ω_1}. 再因为 T_Z 是 Lindelöf 空间, 所以 T_Z 的闭离散子空间是可数的, 于是 T_Z 不含闭子空间同胚于 T_{ω_1}.

例 3.3 也说明定理 2.9 中的条件 (3) “$\aleph_1$ 紧的闭子空间是可分的” 不可省去. 另一方面, 若让 X 是任一非局部可分的度量空间, 由推论 2.10, X 不是局部可分度量空间的闭映象, 这说明定理 2.9 的条件 (2) “不含闭子空间同胚于 T_{ω_1}” 及推论 2.10 中的条件 “第一可数闭子空间是局部可分的” 也不可省去.

问题 3.4 设 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间. 若 X 的第一可数闭子空间是局部可分的, X 是否是局部可分度量空间的闭映象?

参 考 文 献

[1] Michael E., On k-spaces, k_R-spaces and $k(X)$, *Pacific J. Math.*, 1973, **47**(2): 487–498.

[2] Tanaka Y., On the products of k-spaces question, *Questions Answers General Topology.*, 1983, **1**(1): 36–50.

[3] Shibakov A., Sequentiality of products of spaces with point-countable k-networks, *Topology Proc.*, 1995, **20**: 251–270.

[4] Tanaka Y., Products of k-spaces having point-countable k-networks, *Topology Proc.*, 1997, **22**: 305–329.

[5] Liu C., k-networks and mappings, Ph. D. Thesis, Ohio University, 2001.

[6] Gruenhage G., k-spaces and products of closed images of metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, **80**: 478–482.

[7] Tanaka Y., Closed images of locally compact spaces and Fréchet spaces, *Topology Proc.*, 1982, **7**: 279–292.

[8] Lin S., Generalized metric spaces and mappings, Beijing: Chinese Science Press, 1995 (in Chinese).

[9] Gruenhage G., Michael E., Tanaka Y., Spaces determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, 1984, **113**: 303–332.

[10] Liu C., Lin S., k-spaces property of product spaces, *Acta Math. Sinica, New Series*, 1997, **13**(4): 537–544.

[11] Engelking R., General topology (Revised and completed edition), Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[12] Velichko N. V., Quotient spaces of metrizable spaces (in Russian), *Sibirskii Mat. Zhurnal*, 1987, **28**(4): 73–81 (=*Siberian Math. J.*, 1988, (4): 575–581).

[13] Sakai M., On spaces with a star-countable k-network, *Houston J. Math.*, 1997, **23**(1): 45–56.

[14] Lin S., Liu C. and Dai M. M., Images of locally separable metric spaces, *Acta Math. Sinica, New Series*, 1997, **13**(1): 1–8.

[15] Gao G. S., The theory of topological spaces, Beijing: Chinese Science Press, 2000 (in Chinese).

[16] Liu C., Spaces with a σ-compact finite k-network, *Questions Answers General Topology.*, 1992, **10**(1): 81–87.

[17] Lin S., Yan P. F., On a theorem of D. Burke and E. Michael, *Chinese Ann. Math.*, 2001, **22A**(6): 707–714 (in Chinese).

[18] Chen H. P., On s-images of metric spaces, *Topology Proc.*, 1999, **24** (Spring): 95–103.

[19] Sakai M., On spaces with a point-countable compact k-network, *Yokohama Math. J.*, 2000, **48**(1): 13–16.