第48卷第6期 数 学 学 报 Vol.48, No.6
2005年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA Nov., 2005

文章编号: 0583-1431(2005)06-1195-04 **文献标识码: A**

k 半层空间的伪开紧映象

李克典

漳州师范学院数学系 漳州 363000
E-mail: likd56@126.com

林 寿

漳州师范学院数学系 漳州 363000
宁德师范高等专科学校数学系 宁德 352100
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

摘 要 本文得到了 σ 空间的伪开 L 映象是 σ 空间的充分且必要条件, 改进了 1978 年 Chaber 关于 σ 空间的映射定理, 证明了 k 半层空间的伪开紧映象是 σ 空间, 深化了 1971 年 Henry 关于层空间的映射定理, 肯定地回答了 1990 年林寿关于 $\aleph$ 空间映射性质的一个问题, 同时给出几个例子说明这是 σ 空间和 k 半层空间较好的伪开映射定理 [1−19].

关键词 k 半层空间; 伪开映射; 紧映射

MR(2000) 主题分类 54C10, 54D20, 54E18

中图分类 O189.1

On Pseudo-Open and Compact Images of k-Semistratifiable Spaces

Ke Dian LI

Department of Mathematics, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, P. R. China
E-mail: likd56@126.com

Shou LIN

Department of Mathematics, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000, P. R. China
Department of Mathematics, Ningde Teachers College, Ningde 352100, P. R. China
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn

Abstract In this paper a sufficient and necessary condition in which σ-spaces are preserved by pesudo-open and L-mappings is obtained, a mapping theorem on σ-spaces by Chaber in 1978 is improved, it is shown that pseudo-open and compact images of k-semistratifiable spaces are σ-spaces, which generalizes a mapping theorem on stratifiable spaces by Henry in 1971 and affirmatively answers a question on $\aleph$-spaces posed by Shou Lin in 1990. In the final, some examples are given showing the theorems are nice pseudo-open mapping theorems on σ-spaces and k-semistratifiable spaces [1−19].

Keywords k-semistratifiable spaces; Pseudo-open mappings; Compact mappings

MR(2000) Subject Classification 54C10, 54D20, 54E18

Chinese Library Classification O189.1

收稿日期: 2005-01-28; 接受日期: 2005-08-23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271026); 福建省教育厅科研资助项目 (JB04298)

自从 1966 年 Arhangel'skii [1] 提出著名的 MOBI 类问题以来, 拓扑空间的开紧映射性质倍受人们的关注, 然而恰好被开紧映射保持的拓扑性质为数不多 [9]. Arhangel'skii [1] 的论文还讨论了度量空间的伪开紧映象问题. 尽管伪开紧映射是比开紧映射更弱的映射, 但也有一些弱形式的正面结果. 如, 度量空间的伪开紧映象可刻画为具有一致基的空间 [2]; 仿紧空间的伪开紧映象是亚紧空间 [3]; 层空间的伪开紧映象是半层空间 [11]. k 半层空间作为层空间和 $\aleph$ 空间的共同推广有许多重要性质 [15], 尤其表现在其作为由网和 k 网所定义的广义度量空间类的分界类成为一般拓扑学工作者研究的主要对象之一. 如在映射性质方面, 1987 年高智民教授 [8] 证明了闭映射保持 k 半层空间性质, 1997 年林寿 [14] 证明了 k 半层空间的开紧映象是 σ 空间. 闭映射和开映射都是伪开映射. 然而, 下述问题尚未解决.

问题 k 半层空间的伪开紧映象是否是 σ 空间?

本文利用 E. Michael [16] 专门为 σ 空间设计的 σ 局部有限映射, 改进了 Chaber [10] 关于 σ 空间的映射定理, 肯定地回答了上述问题, 同时也获得了 1990 年林寿 [12] 提出的下述问题的肯定回答: $\aleph$ 空间的伪开紧映象是否是 σ 空间? 除非特别说明, 本文所论空间都是满足正则且 T_1 分离性质的拓扑空间, 映射都是连续的满函数, 文中未定义的术语与记号以文 [7, 13] 为准.

定义 1[5, 15] 空间 X 称为半层空间, 如果对于 X 的每一闭集 F, 存在 X 的开集的序列 $\{G(n,F)\}_{n\in N}$, 使得

(1) $F=\bigcap_{n\in N} G(n,F)$;

(2) 若 $F_1\subset F_2$, 则对于每一 $n\in N$, 有 $G(n,F_1)\subset G(n,F_2)$.

若更设

(3) 若 X 的紧子集 $K\cap F=\emptyset$, 存在 $m\in N$, 使得 $K\cap G(m,F)=\emptyset$.

则称 X 是 k 半层空间.

具有 σ 局部有限闭网的空间称为 σ 空间. 易验证, k 半层空间 $\Rightarrow \sigma$ 空间 $\Rightarrow$ 半层空间 $\Rightarrow$ 次仿紧空间 $\Rightarrow$ 次亚紧空间 [13].

定义 2 设映射 $f:X\to Y$.

(1) f 称为伪开映射, 若 $y\in Y$ 且 U 是 X 中含有 $f^{-1}(y)$ 的开集, 则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

(2) f 称为 L(或紧) 映射, 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf(或紧) 子集.

(3) f 称为 σ 局部有限映射 [16], 若对于 X 的每一 σ 局部有限覆盖 $\mathcal{P}$, 存在 $\mathcal{P}$ 的加细 $\mathcal{F}$, 使得 $f(\mathcal{F})$ 是 Y 的 σ 局部有限覆盖.

引理 1 设 $f:X\to Y$ 是伪开 L 映射. 若 Y 是次仿紧空间, 则 f 是 σ 局部有限映射.

证明 证明分两步完成. 先证明, 空间 X 的每一开覆盖 $\mathcal{U}$ 存在加细 $\mathcal{B}$, 使得 $f(\mathcal{B})$ 是空间 Y 的 σ 局部有限集族. 事实上, 对于每个 $y\in Y$, 由于 $f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子集, 存在 $\mathcal{U}$ 的可数子族 $\mathcal{U}_y$ 覆盖 $f^{-1}(y)$. 又由于 f 是伪开映射, 存在 y 的开邻域 V_y, 使得 $y\in V_y\subset f(\cup\mathcal{U}_y)$. 置 $\mathcal{V}=\{V_y:y\in Y\}$, 则 $\mathcal{V}$ 是 Y 的开覆盖. 由于 Y 是次仿紧空间, $\mathcal{V}$ 存在 σ 离散的闭加细 $\mathcal{F}$. 对于每一 $F\in\mathcal{F}$, 存在 $y(F)\in Y$, 使得 $F\subset V_{y(F)}$.

令 $\mathcal{B}=\{f^{-1}(F)\cap U:F\in\mathcal{F},U\in\mathcal{U}_{y(F)}\}$. 显然, $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细. 下面证明 $f(\mathcal{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族. 事实上, 记 $\mathcal{F}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{F}_n$, 其中每一 $\mathcal{F}_n$ 是 Y 的离散集族. 再记 $\mathcal{B}_n=\{f^{-1}(F)\cap U:F\in\mathcal{F}_n,U\in\mathcal{U}_{y(F)}\}$, 则 $\mathcal{B}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{B}_n$ 且 $f(\mathcal{B}_n)=\{F\cap f(U):F\in\mathcal{F}_n,U\in\mathcal{U}_{y(F)}\}$. 由于 $\mathcal{F}_n$ 是 Y 的离散集族, 所以 $f(\mathcal{B}_n)$ 是 Y 的 σ 局部有限集族. 这就表明 $f(\mathcal{B})$ 是 Y 的 σ 局部有限集族.

其次, 证明 f 是 σ 局部有限映射. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 σ 局部有限覆盖. 记 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的局部有限集族. 对于每一 $n\in N$, 存在 X 的开覆盖 $\mathcal{U}_n$, 使得 $\mathcal{U}_n$ 的每一元仅

交 $\mathcal{P}_n$ 的至多有限个元. 由第一步所证, 存在 $\mathcal{U}_n$ 的加细 $\mathcal{B}_n$ 使得 $f(\mathcal{B}_n)$ 是空间 Y 的 σ 局部有限集族. 则 $\bigcup_{n\in N}(\mathcal{P}_n \wedge \mathcal{B}_n)$ 是 $\mathcal{P}$ 的加细且 $\bigcup_{n\in N} f(\mathcal{P}_n \wedge \mathcal{B}_n)$ 是 Y 的 σ 局部有限覆盖, 故 f 是 σ 局部有限映射.

引理 2[16] σ 局部有限映射保持 σ 空间性质.

定理 1 设 $f: X \to Y$ 是伪开 L 映射. 若 X 是 σ 空间, 则 Y 是 σ 空间当且仅当 Y 是次仿紧空间.

证明 显然, σ 空间是次仿紧空间. 如果 Y 是次仿紧空间, 由引理 1 和引理 2, Y 是 σ 空间.

例 1 存在伪开紧映射 $f: X \to Y$ 满足: X 是 T_2 的 σ 空间, Y 是亚紧空间, 但是 Y 不是次仿紧空间.

首先, 引用文 [3, 例 4.2] 给出的非次仿紧的亚紧空间. 让 $Y = \omega_2 \times \omega_2 - \{(0,0)\}$. 对于每一 $\alpha \in \omega_2 - \{0\}$ 定义 $H_\alpha = \omega_2 \times \{\alpha\}$, $V_\alpha = \{\alpha\} \times \omega_2$. 集合 Y 赋予下述拓扑: 对于每一 $\alpha \in \omega_2 - \{0\}$, 点 $(0,\alpha)$ 的每一邻域含有 $(0,\alpha)$ 及 H_α 除去有限子集; 点 $(\alpha,0)$ 的每一邻域含有 $(\alpha,0)$ 及 V_α 除去有限子集; Y 的其余点是孤立点, 则 Y 是非次仿紧的亚紧空间 [3].

其次, 构造 T_2 的 σ 空间 X. 让 $S = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}, X = Y \times S$. 集合 X 赋予下述拓扑: 对于每一 $y \in Y$, 点 $(y,0)$ 在 X 中的邻域基元形如 $\{(y,0)\} \cup (\bigcup_{n\geq m}(W(y,n) \times \{1/n\}))$, 其中 $m \in N$ 且 $W(y,n)$ 是 y 在空间 Y 中的邻域; X 的其余点是孤立点. 则 X 是 T_2 空间. 由于 $Y \times \{0\}$ 和每一 $Y \times \{1/n\}$ 都是 X 的闭离散子空间, 所以 X 是 σ 闭离散子空间, 从而 X 是 σ 空间.

最后, 定义函数 $f: X \to Y$, 使得对于每一 $(y,s) \in X$ 有 $f(y,s) = y$. 易验证, f 是伪开的紧映射. 这时, X 是 T_2 的 σ 空间, Y 是非次仿紧的亚紧空间.

注记 1 关于 σ 空间的映射定理, 1978 年 Chaber [4] 证明了: 设 $f: X \to Y$ 是开紧映射, 若 X 是 σ 空间, 则 Y 是 σ 空间当且仅当 Y 是次亚紧空间. 由于亚紧空间是次亚紧空间 [3], 上面的例子表明, 在 Chaber 的结果中, 不可把开映射减弱为伪开映射. 另一方面, 当考虑象空间 Y 是次仿紧空间时, 下面的例子说明定理 1 是 Chaber 结果的实质推广. 让 Y 是文 [17, 定理 2] 所构造的具有点可数基的非亚紧空间. 由于 Y 具有点可数基, 所以存在度量空间 X 和开 L (因而伪开 L) 映射 $f: X \to Y$ (文 [10, 定理 7.1] 或 [13, 定理 2.7.19]). 又由于度量空间的开紧映象是亚紧空间 (文 [3, 定理 5.12]), 所以 f 不是紧映射. 这些说明, 定理 1 是 σ 空间较好的伪开映射定理.

定理 2 设 $f: X \to Y$ 是伪开紧映射. 若 X 是 k 半层空间, 则 Y 是 σ 空间.

证明 因为半层空间是次仿紧空间, 由定理 1, 只需证明 Y 是半层空间.

因为 X 是 k 半层空间, 对于 X 的每一闭集 F, 存在 X 的开集的序列 $\{G(n,F)\}_{n\in N}$ 满足定义 1 的条件 (1)–(3). 现在, 对于 Y 的每一闭集 H 和 $n \in N$, 定义

$$D(n,H) = \mathrm{int}(f(G(n, f^{-1}(H)))),$$

则 $H \subset D(n,H)$. 于是 $H \subset \bigcap_{n\in N} D(n,H)$. 如果 $y \in Y \setminus H$, 那么 $f^{-1}(y) \cap f^{-1}(H) = \emptyset$. 因为 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集, 存在 $m \in N$ 使得 $f^{-1}(y) \cap G(m, f^{-1}(H)) = \emptyset$, 即 $y \notin f(G(m, f^{-1}(H)))$, 从而 $y \notin D(m,H)$. 因此, $H = \bigcap_{n\in N} D(n,H)$. 显然, 若 Y 的闭集 $H_1 \subset H_2$, 则对于每一 $n \in N$ 有 $D(n,H_1) \subset D(n,H_2)$. 上面论述表明, Y 的开集的序列 $\{D(n,H)\}_{n\in N}$ 满足定义 1 的条件 (1) 和 (2). 故 Y 是半层空间.

注记 2 因为 $\aleph$ 空间是 k 半层空间 ([13, 推论 1.6.10]), 上述定理肯定地回答了 1990 年林寿的文 [12, 问题 4.6] 提出的问题: $\aleph$ 空间的伪开紧映象是否是 σ 空间? 又因为层空间是 k 半层空间 [13], 定理也推广了 1971 年 Henry 的下述结果: 层空间的伪开紧映象是半层空间. 定理 1 和定理 2 也可被认为是自 1977 年 Michael 引入 σ 局部有限映射的概念以来第一个实质性的应用.

例 2 燕鹏飞和江守礼 [19] 证明了第一可数的 k 半层空间在 1 序列覆盖的商紧映射下的象空间是对称度量空间. 下面几个例子说明定理 2 是 k 半层空间较好的伪开映射定理.

(1) 文 [17, 定理 2.8] 表明, 度量空间的商紧映象未必是半层空间, 所以定理 2 中映射 f 的伪开性质不可减弱为商性质.

(2) 对于度量空间 (X,d), 映射 $f:X\to Y$ 称为 π 映射, 若对于每一 $y\in Y$ 及 y 在 Y 中的邻域 U, 有 $d(f^{-1}(y),X\setminus f^{-1}(U))>0$. 显然, 度量空间上的紧映射是 π 映射. 设 Y 是文 [10, 例 9.10] 或文 [13, 例 1.8.2] 给出的非 σ 空间的半度量空间. 因为 Y 是半度量空间, 存在度量空间 X 和伪开 π 映射 $f:X\to Y$ (文 [13, 定理 2.9.11]). 这表明, 在定理 2 中即使原象 X 加强为度量空间, 映射 f 的紧性质也不可减弱为 π 性质.

(3) 设 Y 是文 [6, 例 3.3] 构造的具有点可数基的非 σ 空间. 由于 Y 具有点可数基, 存在度量空间 X 和开 L (因而伪开 L) 映射 $f:X\to Y$ ([10, 定理 7.1] 或 [13, 定理 2.7.19]). 这表明, 定理 2 中映射 f 的紧性质也不可减弱为 L 性质.

(4) 文 [9, 例 3] 表明, 存在 Moore 空间 X 和开紧映射 $f:X\to Y$, 使得 Y 不是 σ 空间. 因为 Moore 空间是 σ 空间 [10], 所以在定理 2 中原象空间 X 是 k 半层空间不可减弱为 σ 空间. 这一例子也说明定理 1 中关于空间 Y 是次仿紧的假设是必不可少的.

(5) 文 [13, 例 3.3.27(4)] 表明, 度量空间的开紧映象未必是 k 半层空间, 所以在定理 2 中即使原象 X 加强为度量空间, 象空间 Y 也未必是 k 半层空间.

参 考 文 献

[1] Arhangel'skii A., Mappings and spaces, *Uspechi Mat. Nauk.*, 1966, **21**(4): 133–184 (in Russian).

[2] Arhangel'skii A., The intersection of topologies, and pesudo-open compact mappings, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1976, **226**: 745–748 (in Russian).

[3] Burke D. K., Covering properties, Handbook of Set-Theoretic Topology, Amsterdam: North-Holland, 1984, 347–422.

[4] Chaber J., Primitive generalizations of σ-spaces, Colloquia Math. Soc. Bolyai, Topology, Budapeat, 1978, 259–268.

[5] Creede G. D., Concerning semi-stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, 1970, **32**(1): 47–54.

[6] Davis S. W., Gruenhage G. and Nyikos P. J., G_δ-sets in symmetrizable and related spaces, *General Topology Appl.*, 1978, **9**: 253–261.

[7] Engelking R., General topology (Revised and completed edition), Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[8] Gao Z. M., $\aleph$-spaces is invarient under perfect mappings, *Questions Answers in General Topology*, 1987, **5**: 271–279.

[9] Gittings R. F., Open mapping theory, Set-theoretic topology, New York: Academic Press, 1977, 141–191.

[10] Gruenhage G., Generalized metric spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology, Amsterdam: North-Holland, 1984, 423–501.

[11] Henry M., Stratifiable spaces semi-stratifiable spaces and their relation through mappings, *Pacific J. Math.*, 1971, **37**(3): 697–700.

[12] Lin S., A survey of the theory of $\aleph$-spaces, *Questions Answers in General Topology*, 1990, **8**: 405–419.

[13] Lin S., Generalized matric spaces and mappings, Beijing: Science Press, 1995 (in Chinese).

[14] Lin S., Mapping theorem on k-semistratfiable spaces, *Tsukuba J. Math.*, 1997, **21**(3): 809–815.

[15] Lutzer D. J., Semimetrizable and stratifiable spaces, *General Topology Appl.*, 1971, **1**(1): 43–48.

[16] Michael E., σ-locally finite maps, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1977, **65**: 159–164.

[17] Reed G. M., On the existence of point countable bases in Moore spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1974, **45**(3): 437–440.

[18] Tanaka Y., Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces, *Math. Japonica*, 1991, **36**(1): 71–84.

[19] Yan P. F. and Jiang S. L., Weak bases and 1-sequence covering mappings, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2003, **46**(6): 1221–1224.