数 学 年 刊
26A:3(2005),345–350.

连通度量空间的映象 **

林 寿*

提 要

拓扑空间 X 称为 s 连通，若 X 不能表示为两个非空的不相交的序列开集之并. 本文纠正了 A. Fedeli 和 A. Le Donne 关于连通度量空间映象的错误论证，证明了 s 连通性可刻画为连通度量空间的连续的序列覆盖映象，从而导出连通的序列空间 (或 Fréchet 空间) 可刻画为连通度量空间的商映象 (或伪开映象)，回答了 V. V. Tkachuk 在 Proc. Amer. Math. Soc. 上提出的问题.

关键词 s 连通性，连通性，道路连通性，序列空间，度量空间，商映射，序列覆盖映射
MR (2000) 主题分类 54D05, 54D55, 54E35, 54B15
中图法分类 O189.1
文献标识码 A
文章编号 1000-8314(2005)03-0345-06

连续映射保持连通性, 若附加度量性, 问题就变得复杂了. 著名的 Hahn-Mazurkiewicz 定理指出 (见 [1]): Hausdorff 连续统是 Peano 连续统当且仅当它是单位闭区间 $\mathbb{I}$ 的连续象. V. V. Tkachuk (见 [2]) 讨论了怎样的连通空间具有好的连通逆映象的问题. 尽管具有可数网的空间可刻画为可分度量空间的连续象，但是具有可数网的连通空间未必可表为可分的连通度量空间的连续象 (见 [2]). 早在 1965 年， S. P. Franklin (见 [3]) 就证明了, 序列空间可刻画为度量空间的商映象， Fréchet 空间可刻画为度量空间的伪开映象. 1998 年， Tkachuk (见 [2]) 提出问题：是否连通的序列空间 (或 Fréchet 空间) 可刻画为连通度量空间的商映象 (或伪开映象)? A. Fedeli 和 A. Le Donne (见 [4]) 通过构造精巧的连通度量，把连通度量空间的连续象精确为序列连通空间，并试图回答 Tkachuk 的问题. 我们发现 Fedeli 和 Le Donne 定义的连通空间上的非负函数并不满足度量公理 (注 1 和注 2), 由此引起我们对于连通度量空间映象及 Tkachuk 问题的兴趣. 本文将称序列连通性为 s 连通性，利用度量化定理，证明 s 连通性可特征为连通度量空间的序列覆盖的连续象 (定理 1), 直接导出连通的序列空间 (或 Fréchet 空间) 可刻画为连通度量空间的商映象 (或伪开映象，推论 1), 肯定地回答了 Tkachuk (见 [2]) 提出的问题. 此外，还讨论了道路连通空间的映射问题，证明了道路连通空间也可刻画为道路连通度量空间的连续的序列覆盖映象 (定理 2).

本文所论映射均是满函数，空间都是满足 T_2 分离性质的拓扑空间. 设 X 是一空间, $P \subset X$. P 称为 X 的序列开集，若 X 中每一极限点属于 P 的收敛序列是终于 P 的. 若 $X \setminus P$ 是 X 的序列开集，则称 P 是 X 的序列闭集. 空间 X 称为序列空间 (见 [3]), 若 X 的每一序列开集是 X 的开集，这等价于 X 的每一序列闭集是 X 的闭集. 有时，要使用空间 X 中非平凡收敛序列的概念. 称 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$ 是非平凡的，如果所有 x_n 是互不相同的且不同于 x. 显然，度量空间是序列空间. 空间 X 称为 s 连

本文 2004 年 1 月 29 日收到， 2004 年 4 月 7 日收到修改稿.
*漳州师范学院数学系，福建 漳州 363000; 福建师范大学数学系，福州 350007.
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn
**国家自然科学基金 (No.10271026) 和福建省自然科学基金 (No.F0310010) 资助的项目.

通，若 X 不能表示为两非空的不相交的序列开集之并．文 [4] 称 s 连通为 "Sequentially Connected"(序列连通)，这易与 "Sequential Connected" (序列连通) 相混淆．显然，连通的序列空间是 s 连通空间，而 s 连通空间是连通空间，反之均不成立 (见 [4])．众所周知，连续映射保持连通性．怎样的映射保持或逆保持 s 连通性？

设映射 $f: X \to Y$, f 称为序列连续，若对于每一 $x \in X$ 及 X 中的序列 $\{x_n\}$，如果 $\{x_n\}$ 收敛于 x，则在 Y 中序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x)$．f 称为序列覆盖映射 (见 [5])，若 $\{y_n\}$ 是 Y 中收敛于 y 的序列，则存在 X 中收敛于 $x \in f^{-1}(y)$ 的序列 $\{x_n\}$，使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$．显然，连续映射是序列连续映射，反之不然．本文未定义的概念可见文 [6]．

引理 1 设 $f: X \to Y$ 是序列连续映射．若 X 是序列空间，则 f 是连续映射．

证 先断言 (#): 仅在序列连续映射的假设下，若 A 是空间 Y 的序列开集，则 $f^{-1}(A)$ 是空间 X 的序列开集．事实上，如果 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于点 $x \in f^{-1}(A)$ 的序列，由于 f 是序列连续映射，在 Y 中序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x) \in A$，于是序列 $\{f(x_n)\}$ 是终于 A 的，即序列 $\{x_n\}$ 是终于 $f^{-1}(A)$ 的，所以 $f^{-1}(A)$ 是空间 X 的序列开集．因而断言 (#) 成立．

现在，对于空间 Y 的开子集 U，由于 f 的序列连续性，则 $f^{-1}(U)$ 是 X 的序列开集，再由 X 的序列性，$f^{-1}(U)$ 是 X 的开子集，故 f 是连续映射．

引理 2 序列连续映射保持 s 连通性．

证 设 $f: X \to Y$ 是序列连续映射，其中 X 是 s 连通空间．如果空间 Y 不是 s 连通的，则 Y 是两非空的不相交的序列开集之并，由引理 1 证明中的断言 (#)，X 也是两非空的不相交的序列开集之并，矛盾．故 Y 是 s 连通空间．

引理 3 设 $f: X \to Y$ 是序列覆盖映射．若 Y 是 s 连通空间且每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的 s 连通子空间，则 X 也是 s 连通空间．

证 若 X 不是 s 连通空间，则存在 X 的不相交的非空序列开集对 A, B，使得 $Z = A \cup B$．由于每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的 s 连通子集，所以或者 $f^{-1}(y) \subset A$，或者 $f^{-1}(y) \subset B$，于是存在 Y 的不相交的非空集对 C, D，使得 $Y = C \cup D$，$A = \bigcup\limits_{y \in C} f^{-1}(y)$ 且 $B = \bigcup\limits_{y \in D} f^{-1}(y)$．即 $A = f^{-1}(C)$，$B = f^{-1}(D)$．设 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 $y \in C$，因为 f 是序列覆盖映射，存在 X 中收敛于某点 $x \in f^{-1}(y)$ 的序列 $\{x_n\}$，使得每一 $f(x_n) = y_n$．则 $x \in A$，于是序列 $\{x_n\}$ 是终于 A 的，从而序列 $\{y_n\}$ 是终于 C 的，故 C 是 Y 的序列开集．同理，D 也是 Y 的序列开集．这与 Y 的 s 连通性相矛盾．因此，X 是 s 连通空间．

定理 1 对于空间 X，下列条件相互等价：

(1) X 是连通度量空间的连续的序列覆盖映象；

(2) X 是连通度量空间的序列连续映象；

(3) X 是 s 连通空间．

证 由引理 2 及相关定义，只需证明 (3) $\Rightarrow$ (1)．设 X 是 s 连通空间．让 $\mathcal{S}$ 是 X 的所有含极限点的收敛序列的集族，则 $\mathcal{S}$ 覆盖 X 且 $\mathcal{S}$ 的每一元是紧度量空间．记拓扑和 $\bigoplus \mathcal{S}$ 为 M，并且赋予 M 由拓扑和导出的度量拓扑 (见 [6])．设 d 是 M 上与此拓扑相容的度量，$q: (M, d) \to X$ 是显然映射．则 q 是连续的序列覆盖映射．

在集合 $(M \times \mathbb{I})^2$ 上定义非负实值函数 ρ 如下：

$$\rho((y_1, t_1), (y_2, t_2)) = \begin{cases} d(y_1, y_2) + t_1 + t_2, & \text{如果} \quad y_1 \neq y_2; \\ |t_2 - t_1|, & \text{如果} \quad y_1 = y_2. \end{cases}$$

易验证 ρ 是 $M \times \mathbb{I}$ 上的度量，并且 M 同胚于 $(M \times \mathbb{I}, d)$ 的子空间 $M \times \{0\}$.

在集 $M\times\mathbb{I}$ 上定义二元关系 $\sim$ 如下： $(y_1,t_1)\sim(y_2,t_2)$ 当且仅当 $q(y_1)=q(y_2)$ 且 $t_1=t_2=1$, 或 $y_1=y_2$ 且 $t_1=t_2$, 则 $\sim$ 是等价关系. 等价类的集合 (商集) 记为 Z, 并且让 $\pi: M\times\mathbb{I}\to Z$ 是典范投影 (Canonical Projection). 对于每一 $y\in M$, $n\in\mathbb{N}$, 令 $B_{yn}=\pi(\{(y,1)\}\cup\{(y',t):q(y')=q(y),\ 1-1/n<t<1\})$. 在集合 Z 上赋予下述拓扑 τ: 对于每一 $(y,t)\in M\times\mathbb{I}$, 若 $t\neq 1$, $\pi(y,t)$ 在 Z 中的邻域形如 (y,t) 在 $M\times\mathbb{I}$ 中的邻域; 若 $t=1,\pi(y,t)$ 在 Z 中的局部基为 $\{B_{yn}:n\in\mathbb{N}\}$, 则 (Z,τ) 是正则的拓扑空间, 并且对于每一 $U\in\tau$, $\pi^{-1}(U)$ 是空间 $(M\times\mathbb{I},\rho)$ 的开集, 从而 π 是连续映射.

(1.1) (Z,τ) 是度量空间.

因为 $(M\times\mathbb{I},\rho)$ 是度量空间, 设 $\mathcal{B}$ 是 $(M\times\mathbb{I},\rho)$ 的 σ 局部有限基. 让 $\mathbb{Q}'$ 是 $\mathbb{I}$ 的子集 $(1/3,1)$ 中的有理数全体所成之集. 置

$$\mathcal{P}_1=\{\pi(B):B\in\mathcal{B},\ B\subset M\times[0,1/2)\};$$

$$\mathcal{P}_2=\{\pi(\{y\}\times(p_1,p_2)):y\in M,\ p_1,\ p_2\in\mathbb{Q}'\};$$

$$\mathcal{P}_3=\{B_{yn}:y\in M,\ n\in\mathbb{N}\};$$

$$\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2\cup\mathcal{P}_3,$$

则每一 $\mathcal{P}_i\ (i=1,2,3)$ 都是空间 (Z,τ) 的 σ 局部有限集族且 $\mathcal{P}$ 是拓扑 τ 的基, 即 (Z,τ) 是具有 σ 局部有限基的正则空间. 由 Nagata-Smirnov 度量化定理 (见 [6]), (Z,τ) 是度量空间.

定义函数 $p:(M\times\mathbb{I},\rho)\to X$, 使得每一 $p(y,t)=q(y)$, 再定义函数 $f:(Z,\tau)\to X$ 满足 $f\circ\pi=p$.

(1.2) f 是连续的序列覆盖映射.

注意到, 如果 E 是 (M,d) 的开集, 则 $\pi(E\times[0,1))$ 是 (Z,τ) 的开集; 如果 $x\in X$, 则 $\pi(q^{-1}(x)\times(0,1])$ 是 (Z,τ) 的开集. 若 A 是空间 X 的开集, 则 $q^{-1}(A)$ 是空间 (M,d) 的开集, 于是 $f^{-1}(A)=\pi(q^{-1}(A)\times[0,1))\cup\big(\bigcup_{x\in A}\pi(q^{-1}(x)\times(0,1])\big)$ 是 (Z,τ) 的开集, 故 f 是连续的. 设 $\{x_n\}$ 是空间 X 中收敛于 x 的非平凡的序列. 由于 q 是序列覆盖映射, 存在 (M,d) 中收敛于点 y 的序列 $\{y_n\}$, 使得 $q(y)=x$ 且每一 $q(y_n)=x_n$, 则在 $(M\times\mathbb{I},\rho)$ 中每一个 $\rho((y_n,0),(y,0))=d(y_n,y)$, 所以序列 $\{(y_n,0)\}$ 收敛于 $(y,0)$, 又由于 π 是连续的, 于是在 (Z,τ) 中序列 $\{\pi(y_n,0)\}$ 收敛于 $\pi(y,0)$. 因为 $f(\pi(y_n,0))=x_n$, 所以 f 是序列覆盖映射.

显然, 每一个 $f^{-1}(x)$ 是空间 (Z,τ) 的 s 连通子集, 由引理 3, (Z,τ) 是 s 连通空间, 从而 (Z,τ) 是连通空间, 故 X 是连通度量空间的连续的序列覆盖映象.

下述推论肯定地回答了 Tkachuk (见 [2]) 的问题.

推论 1 空间 X 是连通度量空间的商映象 (或伪开映象) 当且仅当 X 是连通的序列空间 (或 Fréchet 空间).

证 由于连续映射, 商映射和伪开映射分别保持连通性 (见 [6]), 序列空间性质和 Fréchet 空间性质 (见 [3]), 所以连通度量空间的商映象 (或伪开映象) 是连通的序列空间 (或 Fréchet 空间). 若 X 是连通的序列空间, 由定理 1, 存在连通度量空间 Z 和连续的序列覆盖映射 $f:Z\to X$. 如果 X 的子集 U, 使得 $f^{-1}(U)$ 是 Z 的开集, 因为 f 是序列覆盖映射, 所以 U 是 X 的序列开集, 从而 U 是 X 的开集, 故 f 是商映射. 若进一步设 X 是 Fréchet 空间, 由于映满 Fréchet 空间的商映射是伪开映射 (见 [3]), 所以 f 是伪开映射.

注 1 文 [4, 定理 2.2] 指出：空间 X 是连通度量空间的连续映象当且仅当 X 是 s 连

通空间. 这一结果是本文定理 1 的显然推论. 下面将说明文 [4, 定理 2.2] 证明中所构造的度量是错误的.

文 [4, 定理 2.2] 是通过 $J(\kappa)$ 来进一步构造所需的连通度量空间. 为了便于指出其不当之处, 先简要复述 Fedeli 和 Le Donne 的证明.

设 X 是 s 连通空间, S 是 X 的所有非平凡收敛序列的集族且 $|S|=\kappa$, 不妨设 κ 是无限基数, $(J(\kappa),d)$ 是具有 κ 个刺的刺猬空间 (Hedgehog of Spininess κ) (见 [6]), 则 $(J(\kappa),d)$ 是连通的度量空间. 置 $Z=X\times Y=\bigcup\limits_{x\in X}Y_x$. 其中对于每一 $x\in X$, $Y_x=\{x\}\times J(\kappa)$. 定义 $Z\times Z$ 上的非负函数 ρ 如下:

(a) 如果 $x\in X$, $y_1,y_2\in J(\kappa)$, 则 $\rho((x,y_1),(x,y_2))=d(y_1,y_2)$;

(b) 如果 $u,v\in\mathbb{I}$, $s\in S$, 则 $\rho((x_n,u,s),(x,v,s))=\rho((x,v,s),(x_n,u,s))=2-(u+v)+1/n$. 其中 x 是序列 $s=\{x_n\}$ 的极限点;

(c) 其余的 $z_1,z_2\in Z$, 若 $z_1\neq z_2$, 则 $\rho(z_1,z_2)=1$, 否则 $\rho(z_1,z_2)=0$.

则 ρ 是 Z 上的度量. 然后, 证明 (Z,ρ) 是连通空间并且存在连续映射 $f:(Z,\rho)\to X$.

但是, ρ 不是 Z 上的距离函数. 事实上, 设 $s_1=\{x_{1n}\}$ 和 $s_2=\{x_{2n}\}$ 是空间 X 中两不同的非平凡的收敛序列, x 是序列 s_1 的极限点, 并且置 $z_1=(x,1,s_1)$, $z_2=(x,1,s_2)$, $z_3=(x_{12},1,s_1)$, 则 $\rho(z_1,z_2)=d((1,s_1),(1,s_2))=2>1/2+1=\rho(z_1,z_3)+\rho(z_3,z_2)$. 所以三角不等式不成立. 故 ρ 不是 Z 上的距离函数, 因而文 [4, 定理 2.2] 的证明有漏洞.

注 2 文 [4, 定理 2.1] 指出: 空间 X 是连通度量空间的商映象当且仅当 X 是连通的序列空间, 即本文的推论 1. 文 [4] 并没有发现序列覆盖映射在联系定理 2.1 和定理 2.2 之间的作用, 而是直接证明定理 2.1 的. 下面指出文 [4, 定理 2.1] 证明中所构造的度量也是错误的. 仍有必要复述 Fedeli 和 Le Donne 的证明.

设 X 是连通的序列空间. 存在度量空间 (M,d) 和商映射 $q:(M,d)\to X$. 按本文定理 1 证明的方式, 定义度量空间 $(M\times\mathbb{I},\rho)$, $M\times\mathbb{I}$ 的商集 Z 及典范投影 $\pi:M\times\mathbb{I}\to Z$. 再定义 Z 上的度量 σ 如下:

$$\sigma(\pi(y_1,t_1),\pi(y_2,t_2))=\begin{cases}\rho((y_1,t_1),(y_2,t_2)), & \text{如果 } q(y_1)\neq q(y_2),\\ \min\{\rho((y_1,t_1),(y_2,t_2)),2-(t_1+t_2)\}, & \text{其它情形,}\end{cases}$$

然后, 证明 (Z,σ) 是连通空间并且存在商映射 $f:(Z,\sigma)\to X$.

但是, σ 未必是 Z 上的距离函数. 事实上, 对于具有通常度量的实直线 $(\mathbb{R},d)$ 的子空间 $M=[0,3]$, $X=[0,1]$, 依如下方式定义函数 $q:M\to X$:

$$q(y)=\begin{cases}x/2, & \text{如果 } 0\le x\le 2,\\ 3-x, & \text{如果 } 2<x\le 3,\end{cases}$$

并且取定 M 中的点 $y_1=0$, $y_2=2$, $y_3=3$, 则

(2.1) X 是连通的序列空间且 $q:(M,d)\to X$ 是商映射;

(2.2) 度量空间 (M,d) 中互不相同的 3 个点 y_1,y_2,y_3 满足 $d(y_1,y_2)>d(y_2,y_3)$ 且 $q(y_1)=q(y_3)\neq q(y_2)$.

按 Fedeli 和 Le Donne 的构造,

$\sigma(\pi(y_1,1),\pi(y_2,0))=\rho((y_1,1),(y_2,0))=d(y_1,y_2)+1$;

$\sigma(\pi(y_1,1),\pi(y_3,0))=\min\{\rho((y_1,1),(y_3,0)),2-(1+0)\}=\min\{d(y_1,y_3)+1,1\}=1$;

$\sigma(\pi(y_2,0),\pi(y_3,0))=\rho((y_2,0),(y_3,0))=d(y_2,y_3)$.

若 σ 是 Z 上的度量, 则

$\sigma(\pi(y_1,1),\pi(y_2,0)) \le \sigma(\pi(y_1,1),\pi(y_3,0)) + \sigma(\pi(y_3,0),\pi(y_2,0))$,

即 $d(y_1,y_2) \le d(y_2,y_3)$, 矛盾.

本文的最后部分讨论道路连通度量空间的映象. 显然，道路连通空间是 s 连通的.

引理 4 序列连续映射保持道路连通性.

证 设 $f: X \to Y$ 是序列连续映射，其中 X 是道路连通空间. 对于空间 Y 中的任意两点 y_1, y_2, 存在空间 X 中的两点 x_1, x_2, 使得 $f(x_i) = y_i$ $(i=1,2)$. 因为 X 是道路连通的，存在从 $\mathbb{I}$ 映入 X 内的连续函数 g, 使得 $g(0)=x_1, g(1)=x_2$, 则 $f\circ g$ 是从 $\mathbb{I}$ 映入 Y 内的函数且 $f\circ g(0)=y_1, f\circ g(1)=y_2$. 由于 $\mathbb{I}$ 是序列空间且 $f\circ g$ 是序列连续函数，由引理 1, $f\circ g$ 是连续的. 故 Y 是道路连通空间.

定理 2 对于空间 X, 下列条件相互等价：

(1) X 是道路连通度量空间的连续的序列覆盖映象；

(2) X 是道路连通度量空间的序列连续映象；

(3) X 是道路连通空间.

证 由引理 4, 只需证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 是道路连通空间. 不妨设 X 不是单点集. 让 $\mathcal{S}$ 是 X 的所有含极限点的收敛序列及所有非退化的弧 ($\mathbb{I}$ 的连续象) 组成的集族，则 $\mathcal{S}$ 覆盖 X 且 $\mathcal{S}$ 的每一元是紧度量空间. 仍采用定理 1 证明中的方法和记号，存在度量空间 (Z,τ) 和连续的序列覆盖映射 $f:(Z,\tau)\to X$. 下面证明 (Z,τ) 是道路连通空间. 对于 Z 中不同的两点 z_1, z_2, 记 $z_i=\pi(y_i,t_i)$ $(i=1,2)$. 若 $f(z_1)=f(z_2)$, 则 $\pi((\{y_1\}\times[t_1,1])\cup(\{y_2\}\times[t_2,1]))$ 是 Z 中从 (起点) z_1 到 (终点) z_2 的弧. 若 $f(z_1)\ne f(z_2)$, 因为 X 是道路连通空间，存在 X 中从 $f(z_1)$ 到 $f(z_2)$ 的弧，则存在度量空间 (M,d) 中的弧 C, 使得 C 的起点与终点关于显然映射 $q:(M,d)\to X$ 的象分别是 $f(z_1)$ 和 $f(z_2)$, 从而 $\pi(C\times\{0\})$ 是 Z 中从 $\pi(y_1,0)$ 到 $\pi(y_2,0)$ 的弧，那么 $\pi((\{y_1\}\times[0,t_1])\cup(C\times\{0\})\cup(\{y_2\}\times[0,t_2]))$ 是 Z 中从 z_1 到 z_2 的弧，故 (Z,τ) 是道路连通空间. 因此， X 是道路连通度量空间的连续的序列覆盖映象.

推论 2 空间 X 是道路连通度量空间的商映象 (或伪开映象) 当且仅当 X 是道路连通的序列空间 (或 Fréchet 空间).

例 1 序列连续映射未必保持连通性.

对于实直线空间 $\mathbb{R}$ 的 Stone-Čech 紧化 (即极大紧化) $\beta\mathbb{R}$, 先证明：对于每一 $p\in\beta\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}$, 在 $\beta\mathbb{R}$ 中不存在 $\mathbb{R}$ 中点组成的序列收敛于 p. 事实上，若在 $\beta\mathbb{R}$ 中存在由 $\mathbb{R}$ 中点组成的非平凡的序列收敛于 p, 令 $A=\{x_{2n}:n\in\mathbb{N}\}, B=\{x_{2n-1}:n\in\mathbb{N}\}$, 则 A, B 是 $\mathbb{R}$ 中不相交的两个闭集. 因为 $\mathbb{R}$ 是正规的，所以 $\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(A)\cap\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(B)=\emptyset$ (见 [6, 推论 3.6.4]), 而 p 是序列 $\{x_n\}$ 的极限，所以 $p\in\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(A)\cap\mathrm{cl}_{\beta\mathbb{R}}(B)$, 矛盾.

现在，取定 $p\in\beta\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}$, 并且让 X 是 $\beta\mathbb{R}$ 的子空间 $\mathbb{R}\cup\{p\}$. 因为 $\mathbb{R}$ 是 X 的连通的稠密子集，所以 X 是连通空间. 让 Y 是 $\mathbb{R}$ 的子空间 $\{0,1\}$, 则 Y 不是连通的. 依如下方式定义函数 $f:X\to Y$. $f(p)=0$, 并且如果 $x\in\mathbb{R}$, 则 $f(x)=1$. 下面证明 f 是序列连续映射. 设 $\{x_n\}$ 是空间 X 中收敛于 x 的非平凡的序列，由上段所证，则 $x\in\mathbb{R}$. 因为 $\mathbb{R}$ 是 X 的开子集，所以序列 $\{x_n\}$ 是终于 x 的，因而序列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(x)=1$. 故 f 是序列连续映射. 这表明序列连续映射未必保持连通性.

致谢 例 1 中关于 $\beta\mathbb{R}$ 性质的证明得到杨忠强教授的帮助，特此致谢.

参 考 文 献

[1] Nadler, Jr S. B., Continuum Theory: An Introduction [M], Marcel Dekker Inc., New York, 1992.

[2] Tkachuk, V. V., When do connected spaces have nice connected preimages [J], *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**(1998), 279–287.

[3] Franklin, S. P., Spaces in which sequences suffice [J], *Fund. Math.*, **57**:1(1965), 107–115.

[4] Fedeli, A. & Le Donne, A., On good connected preimages [J], *Topology Appl.*, **125** (2002), 489–496.

[5] Siwiec, F., Sequence-covering and countably bi-quotient mappings [J], *General Topology Appl.*, **1**(1971), 143–154.

[6] Engelking, R., General Topology (Revised and completed edition) [M], Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

THE IMAGES OF CONNECTED METRIC SPACES

LIN Shou*

*Department of Mathematics, Zhangzhou Teachers' College, Zhangzhou 363000, Fujian, China; Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China. **E-mail:** linshou@public.ndptt.fj.cn

Abstract

A space is called s-connected if it cannot be represented as the union of two non-empty disjoint sequentially closed subsets. This paper corrects some mistakes about images of connected metric spaces by A. Fedeli and A. Le Donne, and shows that a space is an s-connected space if and only if it is a continuous and sequence-covering image of a connected metric space, and a space is a connected and sequential space if and only if it is a quotient image of a connected metric space, which answers a question posed by V. V. Tkachuk in Proc. Amer. Math. Soc.

Keywords s-connectedness, Connectedness, Pathwise connectedness, Sequential spaces, Metric spaces, Quotient mappings, Sequence-covering mappings

2000 MR Subject Classification 54D05, 54D55, 54E35, 54B15