第47卷第6期 数 学 学 报 Vol.47, No.6
2004年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA Nov., 2004

文章编号: 0583-1431(2004)06-1149-06 **文献标识码**: **A**

一致覆盖和度量空间的紧映象

葛 英

(苏州大学数学系 苏州 215006)
(E-mail: geying@pub.sz.jsinfo.net)

林 寿

(宁德师范高等专科学校数学系 宁德 352100)
(E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn)

摘 要 本文利用一致覆盖的概念, 讨论了度量空间的序列覆盖紧映象的结构. 主要结果有: (1) 空间 X 是局部可分度量空间的序列覆盖紧映象当且仅当 X 具有由 cosmic 子空间构成的一致 sn 网; (2) 空间 X 是局部可分度量空间的序列覆盖, 商紧映象当且仅当 X 是度量空间的序列覆盖, 商紧映象且是局部 cosmic 空间.

关键词 序列覆盖映射; 一致覆盖; 点星网
MR(2000) 主题分类 54E20, 54E40, 54C10, 54D55
中图分类 O189.1

Uniform Covers and Compact Images of Metric Spaces

Ying GE

(*Department of Mathematics, Suzhou University, Suzhou* 215006*, P. R. China*)
(*E-mail: geying@pub.sz.jsinfo.net*)

Shou LIN

(*Department of Mathematics, Ningde Teachers' College, Ningde* 352100*, P. R. China*)
(*E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn*)

Abstract In this paper the structures of sequence-covering compact images of locally separable metric spaces are investigated by uniform covers, the main results are that (1) a space is a sequence-covering compact image of a locally separable metric space if and only if it has a uniform sn-network consisting of cosmic subspaces; (2) a space is a sequence-covering quotient compact image of a locally separable metric space if and only if it is a locally cosmic space and a sequence-covering quotient compact image of a metric space.

Keywords Sequence-covering mappings; Uniform covers; Point-star networks
MR(2000) Subject Classification 54E20, 54E40, 54C10, 54D55
Chinese Library Classification O189.1

收稿日期: 2003-01-18; 接受日期: 2003-12-01
基金项目: 国家自然科学基金 (10271026); 江苏省教育厅自然科学基金 (02KJB110001); 福建省自然科学基金 (F0310010)

0 引言

寻求度量空间映射象的内部刻画是一般拓扑学的中心问题之一. 自从 Arhangel'skiĭ [1] 的著名文献 "映射与空间" 发表以来, 局部可分度量空间 s 映象的性质引起了国内外拓扑学者的广泛关注, 并获得了一些重要结果 [2–6]. 这就使人们转而感兴趣于局部可分度量空间的紧映象 (见文 [3, 5, 7–9]), 其中一个热点问题是 [7]: 如何给出局部可分度量空间商紧映象的一个 "美妙 " 的内部刻画? 早在 1966 年, Arhangel'skiĭ [1] 曾用具有一致基的空间刻画了度量空间的开紧映象. 而在近几年关于广义度量空间理论的研究中, 由 Alexandroff [10] 引进的一致覆盖起着越来越重要的作用 [7, 11–15]. 特别地, 林寿、燕鹏飞 [15] 得到了下述结果.

引理 1 对于空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是度量空间的序列覆盖紧映象;

(2) X 具有一致 sn 网;

(3) X 具有由点有限 sn 覆盖序列构成的点星网.

引理 2 对于空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是度量空间的序列覆盖, 商紧映象;

(2) X 具有一致弱基;

(3) X 是具有一致 sn 网的序列空间.

上述表明, 在度量空间商紧映象的研究中, 一致覆盖是一个非常合适而且很有用的概念. 关于这方面一个很自然的问题是: 局部可分度量空间的序列覆盖, (商) 紧映象是否等价于 (序列空间且) 具有由 cosmic 子空间构成的一致 sn 网 (见文 [16, 问题 5.1.19])? 本文肯定地回答了这一问题. 作为这个结果的一个应用, 我们证明了空间 X 是局部可分度量空间的序列覆盖, 商紧映象当且仅当 X 是度量空间的序列覆盖商紧映象且 X 是局部 cosmic 空间.

1 一些定义和引理

本文中所有空间都是正则 T_1 的, 映射均指连续满函数. 一些未定义的术语均参见文 [16] 和 [17]. 回忆一些定义.

设映射 $f: X \to Y$. f 称为紧映射, 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是紧的; f 称为序列覆盖映射 [18], 如果任给 Y 中的收敛序列 $\{y_n\}$, 存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$; f 称为 1 序列覆盖映射 [8], 如果对于每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$, 使得任给 Y 中收敛于 y 的序列 $\{y_n\}$, 存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 满足每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$. 已经知道, 定义在度量空间上的序列覆盖, 紧映射是 1 序列覆盖映射 [8].

设 P 是空间 X 的子集, P 称为点 x 在 X 中的序列邻域, 如果任给 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$, $\{x_n\}$ 终于 P, 即存在 $m \in N$, 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P$; P 称为 X 的序列开集, 如果 P 是 P 中每一点在 X 中的序列邻域. X 称为序列空间 [19], 如果 X 中每一序列开集是 X 的开集.

设 $\mathscr{P} = \bigcup_{x \in X} \mathscr{P}_x$ 是空间 X 的覆盖, 满足下述条件 (a) 和 (b): 对于每一 $x \in X$,

(a) $\mathscr{P}_x$ 是点 x 在 X 中的网;

(b) 如果 $U, V \in \mathscr{P}_x$, 存在 $W \in \mathscr{P}_x$, 使得 $W \subset U \cap V$.

$\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基 [1], 如果任给 $G \subset X$, G 是 X 的开集当且仅当对于每一 $x \in G$, 存在 $P \in \mathscr{P}_x$, 使得 $P \subset G$; $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn 网 [8], 如果对于每一 $x \in X$, $\mathscr{P}_x$ 中的每一元是 x 在 X 中的序列邻域.

空间 X 称为 cosmic 空间 [20], 如果 X 具有可数网. 已经知道, 空间 X 是 cosmic 空间当且仅当 X 是可分度量空间的映象 [20].

设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖. $\mathscr{P}$ 称为 X 的 sn 覆盖 [8], 如果 $\mathscr{P}$ 的每一元是 X 中某点的序列邻域, 且对于 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的序列邻域 $P \in \mathscr{P}$; $\mathscr{P}$ 称为 X 的 so 覆盖 [8], 如果 $\mathscr{P}$ 的每一元是 X 的序列开集; $\mathscr{P}$ 称为 X 的一致覆盖 [10], 如果任给 $(\mathscr{P})_x = \{P \in \mathscr{P} : x \in P\}$ 的可数无限子族 $\mathscr{P}'$, $\mathscr{P}'$ 是 x 在 X 中的网; $\mathscr{P}$ 称为一致 sn 网 (一致弱基), 如果 $\mathscr{P}$ 既是 X 的一致覆盖又是 X 的 sn 网 (弱基).

设 $\{\mathscr{P}_n\}$ 是空间 X 的覆盖序列. $\{\mathscr{P}_n\}$ 称为 X 的点星网 [15], 如果对于每一 $x \in X$, $\{\mathrm{st}\,(x, \mathscr{P}_n) : n \in N\}$ 是 x 在 X 中的网. 容易验证, $\{\mathscr{P}_n\}$ 是 X 的点星网当且仅当对于每一 $x \in X$ 以及 $x \in P_n \in \mathscr{P}_n$, $\{P_n : n \in N\}$ 是 x 在 X 中的网.

先给出几个引理.

引理 3 对于空间 X, 下述断言成立.

(1) 如果 $\{\mathscr{P}_n\}$ 是由 X 的点有限 sn 覆盖序列构成的点星网, 则 $\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$是 X 的一致 sn 网;

(2) 如果 $\mathscr{P}$ 是 X 的一致 sn 网, 则存在由 X 的点有限 sn 覆盖序列构成的点星网 $\{\mathscr{P}_n\}$, 使得 $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$.

证明 可参见文 [15, 定理 1] 的证明. 证明从略.

引理 4 设空间 X 具有点有限覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使得每一 X_α 具有可数且点有限覆盖序列 $\{\mathscr{P}_{\alpha,n}\}$. 如果下述条件 (a), (b) 成立, 则 X 是局部可分度量空间的 1 序列覆盖紧映象.

(a) $\{\mathscr{P}_n\}$ 是 X 的点星网, 其中每一 $\mathscr{P}_n = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{P}_{\alpha,n}$;

(b) 对于每一 $x \in X$, 存在 $\alpha \in \Lambda$, 使得对每一 $n \in N$, 存在 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域.

证明 对于每一 $\alpha \in \Lambda$, $n \in \omega$, 置

$$\mathscr{P}_{\alpha,0} = \{X_\alpha\},\quad \mathscr{P}_{\alpha,n} = \{P_\beta : \beta \in A_{\alpha,n}\},\quad n \in N,$$
$$A_n = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_{\alpha,n},\quad \mathscr{P}_n = \bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{P}_{\alpha,n} = \{P_\beta : \beta \in A_n\},$$

则每一 $A_{\alpha,n}$ 是可数的, 且 $\{\mathscr{P}_n\}_{n\in\omega}$ 是 X 的点有限覆盖序列. 不失一般性, 可以假定 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 是两两不交的. 每一 A_n 赋予离散拓扑. 置

$$Z=\left\{b=(\beta_n)\in\prod_{n\in\omega}A_n : \text{存在}\ \alpha\in\Lambda,\ \text{使得每一}\ P_{\beta_n}\in\mathscr{P}_{\alpha,n},\ \text{且}\ \{P_{\beta_n} : n\in\omega\}\ \text{是某个}\ x_b\ \text{在}\ X\ \text{中的网}\right\},$$

则 Z 是度量子空间. 容易验证由 $f(b) = x_b$ 定义的 $f : Z \to X$ 是映射. 我们仅需证明 Z 是局部可分空间以及 f 是 1 序列覆盖的紧映射.

事实 1 Z 是局部可分的.

设 $b = (\beta_n) \in Z$, 则存在 $\alpha \in \Lambda$, 使得 $P_{\beta_0} \in \mathscr{P}_{\alpha,0} = \{X_\alpha\}$. 置 $Z_b = \{c = (\gamma_n) \in Z : \gamma_0 = \beta_0\}$. 显然, $b \in Z_b$ 且 Z_b 是 Z 的开子集. 设 $c = (\gamma_n) \in Z_b$. 对于每一 $n \in \omega$, 因为 $P_{\gamma_0} = P_{\beta_0} = X_\alpha \in \mathscr{P}_{\alpha,0}$, $P_{\gamma_n} \in \mathscr{P}_{\alpha,n} = \{P_\beta : \beta \in A_{\alpha,n}\}$, 所以 $\gamma_n \in A_{\alpha,n}$, 从而 $c \in \prod_{n\in\omega}A_{\alpha,n}$. 这就证明了 $Z_b \subset \prod_{n\in\omega}A_{\alpha,n}$. 注意到每一 $A_{\alpha,n}$ 是可数离散子空间, 因此 Z_b 是可分的, 故 Z 是局部可分的.

事实 2 f 是紧的.

对于每一 $x \in X$, 置 $\Lambda' = \{\alpha \in \Lambda : x \in X_\alpha\}$. 对于每一 $\alpha \in \Lambda'$, 置 $B_{\alpha,n} = \{\beta \in A_{\alpha,n} : x \in P_\beta\}$, 则 $B_{\alpha,n}$ 是有限的, 所以 $K = \bigcup_{\alpha\in\Lambda'}(\prod_{n\in\omega}B_{\alpha,n})$ 是 $\prod_{n\in\omega}A_n$ 的紧子集.

下证 $f^{-1}(x)=K$.

设 $b\in K$, 则存在 $\alpha\in\Lambda'$, 使得 $b=(\beta_n)\in\prod_{n\in\omega}B_{\alpha,n}$. 由 (a) 及 $x\in P_{\beta_n}\in\mathscr{P}_{\alpha,n}$, 那么 $\{P_{\beta_n}:n\in\omega\}$ 是 x 在 X 中的网, 因此 $b\in f^{-1}(x)$. 这样 $K\subset f^{-1}(x)$. 另一方面, 设 $b=(\beta_n)\in f^{-1}(x)$, 则 $f(b)=x$ 且存在 $\alpha\in\Lambda'$, 使得每一 $P_{\beta_n}\in\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 且 $\{P_{\beta_n}:n\in\omega\}$ 是 x 在 X 中的网, 所以每一 $\beta_n\in B_{\alpha,n}$, 因此 $b\in\prod_{n\in\omega}B_{\alpha,n}\subset K$. 这样 $f^{-1}(x)\subset K$.

事实 3 f 是 1 序列覆盖的.

设 $x\in X$. 由 (b), 对每一 $n\in N$, 存在 $\alpha\in\Lambda$, 使得 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 中某个元 P_{α_n} 是 x 在 X 中的序列邻域. 置 $\alpha_0=\alpha$, $z=(\alpha_n)_{n\in\omega}$, 则 $z\in f^{-1}(x)$. 设 $\{x_k\}$ 是 X 中收敛于点 x 的序列, 记 $S=\{x_k:k\in N\}$. 对每一 $n\in N$, 如果 $x_k\in P_{\alpha_n}$, 令 $\beta_{k,n}=\alpha_n$; 否则令 $\beta_{k,n}=\alpha_{k,n}\in A_n$, 其中 $x_k\in P_{\alpha_{k,n}}$. 置 $z_k=(\beta_{k,n})_{n\in\omega}$, 其中每一 $\beta_{k,0}=\alpha$. 由 (a), 显然 $z_k\in f^{-1}(x_k)$.

设 U 是 z 在积空间的子空间 Z 中的基本开邻域, 则存在 $m\in N$, 使得

$$U=\left(\left(\prod_{n\le m}\{\alpha_n\}\right)\times\left(\prod_{n>m}A_n\right)\right)\cap Z.$$

因为对每一 $1\le n\le m$, S 终于 P_{α_n}, 所以存在 $k_0\in N$, 使得当 $k>k_0$ 且 $1\le n\le m$ 时, $x_k\in P_{\alpha_n}$, 所以 $\beta_{k,n}=\alpha_n$. 容易看出当 $k>k_0$ 时, $z_k\in U$, 所以 $\{z_k\}$ 收敛于 z. 这就证明了 f 是 1 序列覆盖映射. 证毕.

引理 5 设 $\mathscr{P}$ 是 cosmic 空间 X 的点可数子集族. 如果 $\mathscr{P}$ 的每一元是 X 中某点的序列邻域, 则 $\mathscr{P}$ 是可数的.

证明 因为 X 是 cosmic 空间, 由文 [8, 推论 2.6], 存在 X 的可数子集 D, 使得对 X 中的每一点, 存在 D 中的序列使得在 X 中这序列收敛于这一点. 由于对于每一 $P\in\mathscr{P}$, 存在 $x\in X$, 使得 P 是 x 在 X 中的序列邻域, 这样存在 D 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 因为 P 是 x 在 X 中的序列邻域, $P\cap D\ne\emptyset$, 所以

$$\mathscr{P}=\{P\in\mathscr{P}:P\cap D\ne\emptyset\},$$

从而 $\mathscr{P}$ 是可数的. 证毕.

2 主要定理

下面是本文的主要定理, 它描述了局部可分度量空间序列覆盖紧映象的内在刻画.

定理 对于空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖紧映象;

(2) X 具有由点有限 sn 覆盖序列构成的点星网, 其中覆盖由 cosmic 子空间组成;

(3) X 具有由 cosmic 子空间组成的一致 sn 网.

证明 由引理 3, (2) $\Leftrightarrow$ (3), 因此我们只需证明 (1) $\Leftrightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (2) 设 $f:Z\to X$ 序列覆盖紧映射, Z 是局部可分度量空间. 对每一 $n\in N$, 设 $\mathscr{B}_n$ 是 Z 的由可分子空间组成的局部有限开覆盖且加细 $\{B(z,1/2n)\}_{z\in Z}$. 置

$$\mathscr{P}_n=\{f(B):B\in\mathscr{B}_n \text{ 且 } f(B) \text{ 是 } X \text{ 中某点 } x \text{ 的序列邻域}\}.$$

因为 f 是紧的, 所以 $\mathscr{P}_n$ 是由 X 的 cosmic 子空间组成的点有限集族. 由文 [8, 定理 4.4], f 是 1 序列覆盖映射, 所以对每一 $x\in X$, 存在 $z\in f^{-1}(x)$, 使得任给收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 存

在 Z 中收敛于 z 的序列 $\{z_n\}$ 满足每一 $z_n \in f^{-1}(x_n)$. 取 $B \in \mathscr{B}_n$, 使得 $z \in B$. 容易验证 $f(B)$ 是 x 在 X 中的序列邻域，即 $f(B) \in \mathscr{P}_n$. 这样 $\mathscr{P}_n$ 是 sn 覆盖. 下证 $\{\mathscr{P}_n\}$ 是 X 的点星网.

设 $x \in U$, U 是 X 的开子集. 因为 f 是紧的，所以存在 $n \in N$, 使得 $B(f^{-1}(x), 1/n) \subset f^{-1}(U)$, 从而

$$\mathrm{st}\,(f^{-1}(x), \mathscr{B}_n) \subset B(f^{-1}(x), 1/n) \subset f^{-1}(U).$$

因此

$$\mathrm{st}\,(x, \mathscr{P}_n) \subset f(\mathrm{st}\,(f^{-1}(x), \mathscr{B}_n)) \subset U.$$

这就证明了 $\{\mathrm{st}\,(x, \mathscr{P}_n)\}_{n\in N}$ 是 x 在 X 中的网，即 $\{\mathscr{P}_n\}$ 是 X 的点星网.

(2) $\Rightarrow$ (1) 设 $\{\mathscr{P}'_n\}$ 是 X 的由点有限 sn 覆盖序列构成的点星网，其中覆盖由 cosmic 子空间组成. 我们仅需证明 X 满足引理 4 的条件. 置 $\mathscr{P}'_1 = \{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 则 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的点有限覆盖. 对每一 $\alpha \in \Lambda$, $n \in N$, 置

$$\mathscr{P}_{\alpha,n} = \{P \cap X_\alpha : P \in \mathscr{P}'_n \text{ 且存在 } x \in X_\alpha, \text{ 使得 } P \text{ 是 } x \text{ 在 } X \text{中的序列邻域}\}.$$

由引理 5, $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 是 X_α 的可数且点有限覆盖. 置 $\mathscr{P}_n = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \mathscr{P}_{\alpha,n}$.

(a) 显然，$\{\mathscr{P}_n\}$ 是 X 的点星网.

(b) 设 $x \in X$. 因为 $\mathscr{P}'_1$ 是 X 的 sn 覆盖，所以存在 $\alpha \in \Lambda$, 使得 X_α 是 x 在 X 中的序列邻域. 对于每一 $n \in N$, 因为 $\mathscr{P}'_n$ 是 X 的 sn 覆盖，存在 $P \in \mathscr{P}'_n$, 使得 P 是 x 在 X 中的序列邻域，则 $\mathscr{P}_{\alpha,n}$ 的元 $P \cap X_\alpha$ 是 x 在 X 中的序列邻域. 证毕.

作为上述定理的一个应用，我们讨论局部可分度量空间的序列覆盖紧映象的分解性和商性.

推论 1 空间 X 是局部可分度量空间的序列覆盖紧映象当且仅当 X 具有由 cosmic 子空间组成的 so 覆盖和一致 sn 网.

证明 如果 X 是局部可分度量空间的序列覆盖紧映象，则由文 [8, 定理 3.4], X 具有由 cosmic 子空间组成的 so 覆盖，又由定理，X 具有一致 sn 网.

相反地，假定空间 X 具有由 cosmic 子空间组成的 so 覆盖和一致 sn 网. 设 $\mathscr{S}$ 是由 X 的 cosmic 子空间组成的 so 覆盖，$\mathscr{P}$ 是 X 的一致 sn 网. 置 $\mathscr{P}' = \{P \in \mathscr{P} : \text{存在 } S \in \mathscr{S}, \text{使得 } P \subset S\}$, 则 $\mathscr{P}'$ 是 X 的网. 事实上，设 $x \in U$, U 是 X 的开子集. 取 $S \in \mathscr{S}$, 使 $x \in S$. 显然，$U \cap S$ 是 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 3, $\mathscr{P} = \bigcup_{n\in N} \mathscr{P}_n$, 其中 $\{\mathscr{P}_n\}$ 是由 X 的点有限 sn 覆盖序列构成的点星网. 对于每一 $n \in N$, 取 $P_n \in \mathscr{P}_n$, 使得 P_n 是 x 在 X 中的序列邻域. 如果对每一 $n \in N$, $P_n \not\subset U \cap S$, 取 $x_n \in P_n \setminus (U \cap S)$, 则由 $\mathscr{P}$ 的一致性，$\{x_n\}$ 收敛于 x. 这与 $U \cap S$ 是 x 在 X 中的序列邻域相矛盾. 所以存在 $m \in N$, 使得 $P_m \subset U \cap S$, 从而 $P_m \in \mathscr{P}'$ 且 $P_m \subset U$. 这就证明了 $\mathscr{P}'$ 是 X 的网. 这样 X 具有由 cosmic 子空间组成的一致 sn 网. 由定理，X 是局部可分度量空间的序列覆盖紧映象. 证毕.

推论 2 对于空间 X, 下述条件等价：

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖，商紧映象；

(2) X 是度量空间的序列覆盖，商紧映象且是局部 cosmic 空间；

(3) X 具有由 cosmic 子空间组成的一致弱基；

(4) X 是序列空间且具有由 cosmic 子空间组成的一致 sn 网.

证明 (1) $\Rightarrow$ (4) 因为商映射保持序列空间 [19], 由定理，局部可分度量空间的序列覆盖，商紧映象是序列空间且具有由 cosmic 子空间组成的一致 sn 网.

(4) ⇒ (3) 因为序列空间中的 sn 网是弱基，所以序列空间中，由 cosmic 子空间组成的一致 sn 网是由 cosmic 子空间组成的一致弱基.

(3) ⇒ (2) 设 X 具有由 cosmic 子空间组成的一致弱基. 由引理 2 及定理， X 是序列空间且是局部可分度量空间的序列覆盖，商紧映象. 由推论 1, X 是局部 cosmic 空间

(2) ⇒ (1) 因为 X 是度量空间的序列覆盖，商紧映象，由引理 2, X 是序列空间且具有一致 sn 网. 注意到局部 cosmic 空间具有由 cosmic 子空间组成的开覆盖. 由推论 1, X 是局部可分度量空间的序列覆盖紧映象. 又因为当象空间是序列空间时，序列覆盖映射是商映射 [18], 所以 X 是局部可分度量空间的序列覆盖，商紧映象. 证毕.

设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的覆盖. $\mathscr{P}$ 称为点正则的 [15], 如果任给 $x \in X$ 及 x 的任一开邻域 U, $\{P \in \mathscr{P} : x \in P \not\subset U\}$ 是有限的. 空间的点正则覆盖等价于一致覆盖 [15]. 能够检验，本文结果中的 "一致覆盖" 能被 "点正则覆盖" 代替. 另一方面， "sn 网" 能被 "cs 网" 代替，这里空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs 网 [15], 如果 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 U 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P \in \mathscr{P}$, 使得 $\{x_n\}$ 终于 $P \subset U$. 再一方面，由引理 5, 具有点可数 sn 网的 cosmic 空间是 $\aleph_0$ 空间，因此定理中的 "cosmic" 能被 "$\aleph_0$ 代替，所以定理给出了文 [16, 问题 5.1.19] 的一个正面回答. 我们可类似定义空间 X 的 "cs 覆盖". 下述 "cs* 覆盖" 是 "cs 覆盖" 的一个推广. 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs* 覆盖 [15], 如果 X 中每一收敛序列存在子序列终于某个 $P \in \mathscr{P}$.

问题 如果序列空间 X 具有由点有限 cs* 覆盖序列构成的点星网，其中覆盖由 cosmic 子空间组成， X 是否是局部可分度量空间的商紧映象？

参 考 文 献

[1] Arhangel'skiĭ A., Mappings and spaces, *Russian Math. Surveys*, 1966, **21**: 115–162.

[2] Ikeda Y., Tanaka Y., Spaces having star-countable k-networks, *Topology Proc.*, 1993, **18**: 107–132.

[3] Lin S., Liu C., Dai M. M., Images on locally separable metric spaces, *Acta Math. Sinica, New Series*, 1997, **13**: 1–8.

[4] Liu C., Tanaka Y., Star-countable k-networks, compact-countable k-networks, and related results, *Houston J. Math.*, 1998, **24**: 655–670.

[5] Tanaka Y., Theory of k-networks II, *Questions Answers General Topology*, 2001, **19**: 27–46.

[6] Tanaka Y., Xia S. X., Certain s-images of locally separable metric spaces, *Questions Answers General Topology*, 1996, **14**: 217–231.

[7] Ikeda Y., Liu C., Tanaka Y., Quotient compact images of metric spaces, and related matters, *Topology Appl.*, 2002, **122**: 237–252.

[8] Lin S., Yan P. F., Sequence-covering maps of metric spaces, *Topology Appl.*, 2001, **109**: 301–314.

[9] Liu C., Tanaka Y., Star-countable k-networks, and quotient images of locally separable metric spaces, *Topology Appl.*, 1998, **82**: 317–325.

[10] Alexandroff P., On the metrization of topological spaces, *Bull. Pol. Acad. Math.*, 1960, **8**: 135–140.

[11] Alleche B., Arhangel'skiĭ A., Calbrix J., Weak developments and metrization, *Topology Appl.*, 2000, **100**: 23–38.

[12] Arhangel'skiĭ A., Just W., Renziczenko E., Szeptycki P., Sharp bases and weakly uniform bases versus point-countable bases, *Topology Appl.*, 2000, **100**: 39–46.

[13] Gruenhage G., Metrizable spaces and generalization, In: M. Hušek, J. van Mill eds, Recent Progress in General Topology II, Amsterdam: North-Holland, 2002.

[14] Sakai K., Tanaka Y., Yajima Y., Regular networks for metrizable spaces and Lešnev spaces, *Bull. Pol. Acad. Math.*, 1998, **46**: 121–133.

[15] Lin S., Yan P. F., On sequence-covering compact mappings, *Acta Math. Sinica*, 2001, **44**: 175–182 (in Chinese).

[16] Lin S., Point-countable covers and sequence-covering mappings, Beijing: Chinese Science Press, 2002 (in Chinese).

[17] Engelking R., General topology, Berlin: Heldermann-Verlag, 1989.

[18] Siwiec F., Sequence-covering and countably bi-quotient mappings, *General Topology Appl.*, 1971, **1**: 143–154.

[19] Franklin S. P., Spaces in which sequences suffice, *Fund. Math.*, 1965, **57**: 107–115.

[20] Michael E., $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, 1966, **15**: 983–1002.