第47卷第1期　　数　学　学　报　　Vol.47, No.1
2004年1月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Jan., 2004

文章编号: 0583-1431(2004)01-0087-04　　**文献标识码**: **A**

序列覆盖的闭映射保持可度量性

燕鹏飞

(南京师范大学数学系　南京　210097)
(安徽大学数学系　合肥　230039)
(E-mail: ypengfei@sina.com)

林　寿

(福建师范大学数学系　福州　350007)

江守礼

(山东大学数学系　济南　250100)

摘　要　设 $f: X \to Y$ 是连续的满映射. f 称为序列覆盖映射, 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列, 则存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$; f 称为 1 序列覆盖映射, 若对于每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$, 使得如果 $\{y_n\}$ 是 Y 中收敛于点 y 的序列, 则有 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$. 本文研究度量空间序列覆盖的闭映射之构造, 否定地回答了 Topology and its Applications 上提出的一个问题.

关键词　度量空间; 闭映射; 序列覆盖映射
MR(2000) 主题分类　54E35, 54E40, 54C10, 54D55
中图分类　O189.1

Metrizability is Preserved by Sequence-Covering and Closed Maps

Peng Fei YAN

(*Department of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing* 210097, *P. R. China*)
(*Department of Mathematics, Anhui University, Hefei* 230039, *P. R. China*)
(*E-mail: ypengfei@sina.com*)

Shou LIN

(*Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007, *P. R. China*)

Shou Li JIANG

(*Department of Mathematics, Shandong University, Jinan* 250100, *P. R. China*)

Abstract　Let $f: X \to Y$ be a continuous and surjective map. f is a sequence-covering map if whenever $\{y_n\}$ is a convergent sequence in Y there is a convergent sequence $\{x_n\}$ in X with each $x_n \in f^{-1}(y_n)$. f is a 1-sequence-covering map if for each $y \in Y$, there is $x \in f^{-1}(y)$ such that whenever $\{y_n\}$ is a sequence converging to y in Y there is a sequence $\{x_n\}$ converging to x in X with each $x_n \in f^{-1}(y_n)$. In this paper the structure

收稿日期:　2001-08-14; 接受日期:　2003-03-13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10171043, 10271026)

of sequence-covering and closed maps of metric spaces is investigated, a problem posed by "Topology and its Applications" is negatively answered.

Keywords Metric spaces; Closed maps; Sequence-covering maps
MR(2000) Subject Classification 54E35, 54E40, 54C10, 54D55
Chinese Library Classification O189.1

本文约定所有空间是满足 T_2 分离性质的拓扑空间，映射是连续的满函数. 度量性质是拓扑学讨论的最基本对象之一. 有不少的映射保持可度量性，如下是著名的 Hanai-Morita-Stone 定理 (见文 [1])

引理 设 X 是可度量空间， $f: X \to Y$ 是闭映射，则下述条件相互等价： (1) Y 是可度量空间； (2) Y 是第一可数空间； (3) 对每一 $y \in Y$, $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集.

由此可知，逆紧映射或既开且闭映射保持可度量性，但是闭映射未必保持可度量性. 本文感兴趣于开映射可减弱到什么程度使得具有这种性质的闭映射保持可度量性. 适当的开映射具有一种所谓的收敛序列 "拉回" 性质，而这种性质早已为人们所重视并发挥了积极的作用. 早在 1935 年 Eilenberg [2] 就证明了下述性质：设 $f: X \to Y$ 是开映射，其中 X 和 Y 都是紧度量空间，那么 f 是开映射当且仅当如果在 Y 中序列 $\{y_n\}$ 收敛于点 y, 则在超空间 2^X 中序列 $\{f^{-1}(y_n)\}$ 收敛于点 $f^{-1}(y)$ (见文 [3] 的定理 13.5). Nadler 的著作 [3] 表明 Eilenberg 的定理被应用于连续统的分解结构. 1971 年 Siwiec [4] 以收敛序列的 "拉回" 引入了序列覆盖映射，叙述了第一可数空间上的开映射是序列覆盖映射. 近来的研究表明, 度量空间上的序列覆盖映射具有开映射的一些良好性质, 对它的探讨已成为人们关注的课题之一. 本文的主要目的是以序列覆盖映射揭示新的度量空间的映射定理, 即序列覆盖的闭映射保持可度量性. 这一结果的重要性至少表现在三个方面，一是推广了既开且闭的映射保持可度量性的经典结果；二是否定地回答了文 [5] 中的问题：具有可数 cs 网络的 Fréchet 空间是否是可分度量空间的序列覆盖的闭映象？三是由此可证明度量空间上的序列覆盖映射具有称之为 1 序列覆盖映射的更强性质.

定义 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为序列覆盖映射 [4], 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列，则存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

(2) f 称为 1 序列覆盖映射 [6], 若对于每一 $y \in Y$ 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足：如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于点 y, 则存在 X 中收敛于点 x 的序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

显然， 1 序列覆盖映射是序列覆盖映射，而度量空间上的开映射是 1 序列覆盖映射 [4]. 提醒读者注意，此处定义的 Siwiec 意义下的序列覆盖映射不同于文 [7] 定义的序列覆盖映射, Gruenhage-Michael-Tanak [7] 意义下的序列覆盖映射定义如下：称 $f: X \to Y$ 是序列覆盖映射若对于 Y 中的每一含极限点的收敛序列 S 存在 X 的紧子集 L, 使得 $f(L) = S$.

在证明序列覆盖的闭映射保持可度量性之前再回忆几个概念和记号. 设 X 是一个空间. 称 X 是 Fréchet 空间，如果 $x \in \overline{P} \subset X$, 则存在 P 中的序列收敛于点 x; 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x 且 $P \subset X$, 称 $\{x_n\}$ 是终于 P 的 (eventually P), 如果存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P$; 称 P 为 X 中的点 x 的序列邻域，若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x, 则 $\{x_n\}$ 是终于 P 的. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族，称 $\mathcal{P}$ 是遗传闭包保持的，若对于每一 $H(P) \subset P$, 有 $\overline{\cup\{H(P) : P \in \mathcal{P}\}} = \cup\{\overline{H(P)} : P \in \mathcal{P}\}$. 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖且 $x \in X$, 记 $(\mathcal{P})_x = \{P \in \mathcal{P} : x \in P\}$, $st(x, \mathcal{P}) = \cup(\mathcal{P})_x$. 本文未定义的术语见文 [1]. 易验证： (1) 若 X 是 Fréchet 空间且 $x \in X$, 则 x 在 X 中的序列邻域是 x 在 X 中的邻域； (2) 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的遗传闭包保持集族且 $f: X \to Y$ 是闭映射，则 $\{f(P) : P \in \mathcal{P}\}$ 是空间 Y 的遗传闭包保持集族.

定理 1 序列覆盖的闭映射保持可度量性.

证明 设 X 是可度量空间， $f: X \to Y$ 是序列覆盖的闭映射. 为证明 Y 是可度量空间,

由引理，只须证明 Y 是第一可数空间. 由于 X 是可度量空间，存在 X 的局部有限的开覆盖列 $\{\mathcal{R}_n\}$ 满足 [1]:

(1.1) 每一 $\mathcal{R}_{n+1}$ 是 $\mathcal{R}_n$ 的星加细, 即对每一 $R \in \mathcal{R}_{n+1}$, 存在 $Q \in \mathcal{R}_n$, 使得 $st(R, \mathcal{R}_{n+1}) \subset Q$.

(1.2) $\{\mathcal{R}_n\}$ 是 X 的展开. 对任一 $t_0 \in Y$, 若 Y 中不存在非平凡的序列收敛于点 t_0, 由于 Y 是 Fréchet 空间，则 t_0 是 Y 的孤立点，从而它是 Y 的第一可数点. 现在设 t_0 是 Y 中的某一非平凡收敛序列的极限点，取定 Y 中由互不相同点组成的序列 $\{t_j\}$ 收敛于 t_0. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $\mathcal{P}_n = \{f(R) : R \in \mathcal{R}_n \text{ 且 } \{t_j\}\text{是终于}f(R)\text{的}\} = \{P_\alpha : \alpha \in \Gamma_n\}$. 由于 f 是闭映射且 $\mathcal{R}_n$ 在 X 中是局部有限的，所以 $\mathcal{P}_n$ 是 Y 的遗传闭包保持集族.

(1.3) $\mathcal{P}_n$ 是有限的. 若 $\mathcal{P}_n$ 是无限的，则存在 $\{t_j\}$ 的子序列 $\{t_{j_k}\}$ 和 $\mathcal{P}_n$ 的无限子族 $\{P_k : k \in \mathbb{N}\}$, 使得每一 $t_{j_k} \in P_k$, 由于 $\{P_k : k \in \mathbb{N}\}$ 是遗传闭包保持的，所以 $\{t_{j_k} : k \in \mathbb{N}\}$ 是 Y 的闭离散子空间，这一矛盾说明 $\mathcal{P}_n$ 是有限的.

(1.4) 存在 $R \in \mathcal{R}_n$, 使得 $f(R)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域且对 $f(R)$ 中任一收敛于 t_0 的序列 K, 存在 R 中的收敛序列 L 有 $f(L) = K$. 对每一 $\alpha \in \Gamma_n$, P_α 或者不是 t_0 的序列邻域，或者是 t_0 的序列邻域. 若 (1.4) 不成立，则存在 Y 中的收敛于 t_0 的序列 K_α, 使得或者 $(K_\alpha \setminus \{t_0\}) \cap P_\alpha = \emptyset$, 或者 $K_\alpha \subset P_\alpha$ 且对 $\mathcal{R}_n$ 中任一使得 $f(R) = P_\alpha$ 的元 R, R 中不存在收敛序列 L_α 满足 $f(L_\alpha) = K_\alpha$. 令 $K_n = (\bigcup_{\alpha \in \Gamma_n} K_\alpha) \cup \{t_j : j \in \mathbb{N}\}$, 由 Γ_n 的有限性知 K_n 是 Y 中收敛于 t_0 的序列. 因为 f 是序列覆盖映射，存在 X 中的收敛序列 L_n, 使得 $f(L_n) = K_n$, 从而存在 $R \in \mathcal{R}_n$, 使得 L_n 是终于 R 的，于是有 $\alpha \in \Gamma_n$, 使得 $f(R) = P_\alpha$, 这时 $(K_\alpha \setminus \{t_0\}) \cap P_\alpha \neq \emptyset$ 且存在 R 中的收敛序列 L 有 $f(L) = K_\alpha$, 这一矛盾说明 (1.4) 成立.

设 $\{f(R_k) : k \in \mathbb{N}\}$ 是如上所获得的 t_0 的序列邻域族，因为 Y 是 Fréchet 空间，每一 $f(R_k)$ 是 t_0 在 Y 中的邻域，而且

(1.5) $\{f(R_k) : k \in \mathbb{N}\}$ 是 t_0 在 Y 中的邻域基. 因为序列 $\{t_j\}$ 是终于每一 $f(R_k)$ 的，由 (1.4), 存在序列 $\{t_j\}$ 的子序列 $\{t_{j_k}\}$, 使得每一 $R_k \cap f^{-1}(t_{j_k}) \neq \emptyset$, 取 $a_k \in R_k \cap f^{-1}(t_{j_k})$, 则由于 f 是闭映射知序列 $\{a_k\}$ 在 X 中有聚点，于是它存在收敛于 X 中某点 a 的子序列 $\{a_{k_i}\}$, 这时 $a \in f^{-1}(t_0)$. 设 V 是 t_0 在 Y 中的邻域，则 $f^{-1}(V)$ 是 a 在 X 中的邻域，由 (1.2), 存在 $m \in \mathbb{N}$, 使得 $st(a, \mathcal{R}_m) \subset f^{-1}(V)$, 因为序列 $\{a_{k_i}\}$ 收敛于 a, 存在自然数 $i > m$ 和 $R' \in \mathcal{R}_{m+1}$, 使得 $a_{k_i} \in st(a, \mathcal{R}_{m+1})$ 且 $R_{k_i} \subset R'$. 设 $a_{k_i} \in R'' \in (\mathcal{R}_{m+1})_a$, 由 (1.1), $R' \cup R'' \subset st(a, \mathcal{R}_m)$, 这说明 $R_{k_i} \subset f^{-1}(V)$, 因此 $t_0 \in f(R_{k_i}) \subset V$, 故 (1.5) 成立.

由此可见， Y 在点 t_0 是第一可数的. 因此 Y 是第一可数空间，故 Y 是可度量空间.

注 2 序列扇 S_ω 具有下述性质： S_ω 不是度量空间； S_ω 是可分度量空间的闭映象； S_ω 是可分度量空间的序列覆盖映象 [8]; S_ω 是具有可数 cs 网络的 Fréchet 空间.

由定理 1, S_ω 不是度量空间的序列覆盖的闭映象，所以文 [5] 提出的下述问题的回答是否定的：具有可数 cs 网络的 Fréchet 空间是否是可分度量空间的序列覆盖的闭映象？

本文的第二部分讨论怎样的序列覆盖映射是 1 序列覆盖映射. 文 [5] 证明了度量空间上的序列覆盖的紧映射是 1 序列覆盖映射. 对于序列覆盖的闭映射有类似的结果.

定理 3 设 $f : X \to Y$ 是序列覆盖的闭映射. 如果 X 是可度量空间，则 f 是 1 序列覆盖映射.

证明 对任一 $t_0 \in Y$, 不妨设 t_0 是 Y 中的某一非平凡收敛序列的极限点，取定 Y 中由互不相同点组成的序列 $\{t_j\}$ 收敛于 t_0. 因为 X 是可度量空间，存在 X 的局部有限的开覆盖列 $\{\mathcal{R}_n\}$ 满足 [1]:

(3.1) 每一 $\mathcal{R}_{n+1}$ 是 $\mathcal{R}_n$ 的星加细.

(3.2) $\{\mathcal{R}_n\}$ 是 X 的展开. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 置 $\mathcal{P}_n = \{f(R) : R \in \mathcal{R}_n\}$. 由定理 1 的 (1.4) 知,

(3.3) 存在 $R \in \mathcal{R}_n$, 使得 $f(R)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域且对 $f(R)$ 中任一收敛于 t_0 的序列 K, 存在 R 中的收敛序列 L 有 $f(L) = K$. 置 $U_n = \{p \in X : \text{对每一}R \in (\mathcal{R}_n)_p, f(R) \text{ 不是 } t_0 \text{ 在}$

Y 中的序列邻域}, 那么

(3.4) 如果 $x \in U_n$, 则 $\cap(\mathcal{R}_{n+1})_x \subset U_{n+1}$. 若不然, 存在点 $p \in \cap(\mathcal{R}_{n+1})_x \setminus U_{n+1}$, 由 U_{n+1} 的定义, 对某一 $R \in (\mathcal{R}_{n+1})_p$, $f(R)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域. 取某一 $R_1 \in (\mathcal{R}_{n+1})_x$, 则 $p \in R \cap R_1$, 于是由 (3.1), 对某一 $R_2 \in \mathcal{R}_n$, 有 $R \cup R_1 \subset R_2$. 因此, $R_2 \in (\mathcal{R}_n)_x$ 且 $f(R_2)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域, 故 $x \notin U_n$. 矛盾.

(3.5) $\partial f^{-1}(t_0) \not\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 否则, $\partial f^{-1}(t_0) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. 由 (3.4), 对每一 $n \in \mathbb{N}$, $U_n \subset \bigcup_{x\in U_n} \cap(\mathcal{R}_{n+1})_x \subset U_{n+1}$. 从引理及定理 1, $\partial f^{-1}(t_0)$ 是 X 的紧子集, 而 $\cap(\mathcal{R}_{n+1})_x$ 是 X 的开子集, 所以对某一 $m \in \mathbb{N}$ 有 $\partial f^{-1}(t_0) \subset U_m$. 由 (3.3), 存在 $R \in \mathcal{R}_m$, 使得 $f(R)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域且存在 $k \in \mathbb{N}$ 和 R 中的收敛序列 L, 有 $f(L) = \{t_j : j \geq k\}$. 设 L 在 X 中收敛于 l, 则 $l \in \partial f^{-1}(t_0) \cap R \subset X \setminus U_m$. 矛盾.

现在, 固定点 $x_0 \in \partial f^{-1}(t_0) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, 则

(3.6) 如果在 Y 中序列 $\{y_i\}$ 收敛于 t_0, 那么对每一 $i \in \mathbb{N}$ 有 $x_i \in f^{-1}(y_i)$, 使得在 X 中序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x_0. 对每一 $n \in \mathbb{N}$, 由 $x_0 \notin U_n$, 存在 $R_n \in (\mathcal{R}_n)_{x_0}$, 使得 $f(R_n)$ 是 t_0 在 Y 中的序列邻域, 那么对某一 $i_n \in \mathbb{N}$ 当 $i \geq i_n$ 时, 有 $y_i \in f(R_n)$, 从而 $R_n \cap f^{-1}(y_i) \neq \emptyset$. 不妨设 $1 < i_n < i_{n+1}$. 对每一 $j \in \mathbb{N}$, 选取

$$x_j \in \begin{cases} f^{-1}(y_j), & \text{若} \quad j < i_1, \\ f^{-1}(y_j) \cap R_n, & \text{若} \quad i_n \leq j < i_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

则 $x_j \in f^{-1}(y_j)$, 由 (3.2) 在 X 中序列 $\{x_j\}$ 收敛于 x_0.

综上所述, f 是 1 序列覆盖映射. 下面举三个例子说明我们的结果是非平凡的.

例 1 可分度量空间上的序列覆盖的伪开映射未必是 1 序列覆盖映射. 由文 [8] 知, 序列扇 S_ω 是可分度量空间的序列覆盖映象, 存在可分度量空间 X 和序列覆盖映射 $f: X \to S_\omega$. 因为 S_ω 是 Fréchet 空间, f 是伪开映射. 又因为 S_ω 不是第一可数空间, 所以 f 不是 1 序列覆盖映射 [6].

例 2 度量空间上的逆紧映射未必是序列覆盖映射. 设 $X = (\{0\} \cup \{1/2n : n \in \mathbb{N}\}) \oplus (\{0\} \cup \{1/2n-1 : n \in \mathbb{N}\})$, $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. X, Y 都赋予实数的子空间拓扑, 让 $f: X \to Y$ 是显然映射, 则 f 是逆紧映射, 但 f 不是序列覆盖映射.

例 3 度量空间上的序列覆盖的闭映射未必是开映射. 设 $X = (\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}) \oplus (\{0\} \cup \{1/2n : n \in \mathbb{N}\})$, $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. X, Y 都赋予实数的子空间拓扑, 让 $f: X \to Y$ 是显然映射, 则 f 是序列覆盖的闭映射, 但它不是开映射.

最后说明, 通过定理 1 的证明可获得度量空间映射的进一步关系. 设映射 $f: X \to Y$, 称 f 是几乎开映射, 若对于每一 $y \in Y$ 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足: 如果 U 是 x 在 X 中的邻域, 则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域. 由定理 1 中 (1.5) 的证明知, 若 $f: X \to Y$ 是序列覆盖的闭映射, 其中 X 是度量空间, 则对于 Y 的每一非孤立点 t_0, 存在 $a \in f^{-1}(t_0)$ 及 a 在 X 中的邻域基 $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得 $\{f(R_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 t_0 在 Y 中的邻域基. 由此, f 是几乎开映射. 即度量空间上的序列覆盖闭映射是几乎开映射.

参 考 文 献

[1] Engelking R., General topology (revised and completed edition), Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[2] Eilenberg S., Surles transformations d'espaces métriques en circonférence, *Fund. Math.*, 1935, **24**: 160–176.

[3] Nadler Jr. S. B., Continuum theory: an introduction, New York: Marcel Dekker Inc., 1992.

[4] Siwiec F., Sequence-covering and countably bi-quotient mappings, *General Topology Appl.*, 1971, **1**: 143–154.

[5] Lin S., Yan P. F., Sequence-covering maps of metric spaces, *Topology Appl.*, 2001, **109**(3): 301–314.

[6] Lin S., On sequence-covering *s*-mappings, *Adv. Math.*, 1996, **25**: 548–551 (in Chinese).

[7] Gruenhage G., Michael E., Tanaka Y., Spaces determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, 1984, **113**(2): 303–332.

[8] Strong P. L., Quotient and pseudo-open images of separable metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1972, **33**: 582–586.