第46卷第6期 数 学 学 报 Vol.46, No.6
2003年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA Nov., 2003

文章编号: 0583-1431(2003)06-1225-08 **文献标识码**: A

单调空间与度量化定理

彭良雪

(北京工业大学应用数理学院 北京 100022)
(E-mail: lxuepeng@263.net.cn)

林 寿

(福建师范大学数学系 福州 350007)
(E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn)

摘 要 本文回答了关于 MCM 空间遗传性的一个问题, 讨论了 k-MCM 空间是 k 半层空间的条件, 得到了一些用 g 函数刻划的度量化定理. 主要结论有: MCM 空间是关于 F_σ 子空间遗传的; 在正规空间类中, q 空间 (ωN 空间, k-MCM 空间) 是关于开 F_σ 子空间遗传的; 如果 X 是具有 G_δ 对角线的正则次中紧 k-MCM 空间, 则 X 是 k 半层空间; X 是可度量化空间的充要条件是存在 X 上的 g 函数满足对 X 中任意不相交的闭集 F 与紧集 C, 都有某个 $n\in\omega$, 使得 $(\bigcup_{x\in F}g(n,x))\cap(\bigcup_{y\in C}g(n,y))=\emptyset$.

关键词 MCM 空间; k-MCM 空间; q 空间
MR(2000) 主题分类 54E20, 54E30
中图分类 O189.1

On Monotone Spaces and Metrization Theorems

Liang Xue PENG

(*College of Applied Science, Beijing University of Technology, Beijing* 100022, *P. R. China*)
(*E-mail: lxuepeng@263.net.cn*)

Shou LIN

(*Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007, *P. R. China*)
(*E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn*)

Abstract In this paper an open problem about the hereditary of MCM-spaces is answered affirmatively, the condition which k-MCM-spaces are k-semistratifiable spaces is discussed, and some metrizable theorems are obtained by g-functions. The main results are that MCM-spaces are hereditary with respect to F_σ-subspaces; q-spaces(ωN-spaces, k-MCM-spaces) are hereditary with respect to open and F_σ-subspaces in normal spaces; a regular submesocompact k-MCM-space with a G_δ-diagonal is k-semistratifiable; and a space X is metrizable if and only if there is a g-function on X such that for any closed set F and compact set C in X, $(\bigcup_{x\in F}g(n,x))\cap(\bigcup_{y\in C}g(n,y))=\emptyset$ for some $n\in\omega$ if $F\cap C=\emptyset$.

Keywords MCM-spaces; k-MCM-spaces; q-spaces

收稿日期: 2001-11-21; 修改日期: 2002-10-23; 接受日期: 2003-03-11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10271026)

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

MR(2000) Subject Classification 54E20, 54E30
Chinese Library Classification O189.1

0 引言

可数仿紧 (可数亚紧) 可以用相交为空集的递减闭集列的开扩张性质来刻画. 在文 [1] 中讨论了开扩张的单调性质, 并引入了单调可数仿紧 (MCP) 空间与单调可数亚紧 (MCM) 空间. 每个 MCP 空间是可数仿紧空间, 每个 MCM 空间是可数亚紧空间. 在文 [1] 中证明了在正规空间类中 MCP 性质是关于开 F_σ 子空间遗传的, 并提出下述问题: 在正规空间类中 MCM 性质是关于开 F_σ 子空间遗传的吗? 本文证明了 MCM 性质是关于 F_σ 子空间遗传的, 对此问题给出了肯定的回答, 同时还讨论了 q 空间和 ωN 空间的遗传性问题.

MCM 空间等价于重要的广义度量空间 β 空间 [2]. 文 [3] 定义了 β 空间的子类 $k\beta$ 空间, 本文从新命名 $k\beta$ 空间为 k-MCM 空间. 这些空间与熟知的分层空间、 k 半层或半层空间密切相关 [4–7]. 在文 [8] 中证明了具有 G_δ 对角线的正则 MCM 空间与半层空间是等价的. 因为每个 k-MCM 空间是 MCM 空间, 每个 k 半层空间是半层空间, 这便产生了具有 G_δ 对角线的正则 k-MCM 空间是否是 k 半层空间的问题. 本文证明了在次中紧空间类中上述问题的回答是肯定的.

半层与分层空间的原始模型是度量空间. Nagata 空间 (即分层第一可数空间) 有下面的特征: 存在空间 X 上的 g 函数, 对 X 中的任一闭集 F, 如果 $x \notin F$, 则有某个 $n \in \omega$, 使得 $g(n,x) \cap (\bigcup_{y\in F} g(n,y)) = \emptyset$. 在度量空间 (X,d) 中, 如果闭集 F 和紧集 C 不相交, 则有某个 $n \in N$, 使得

$$\left(\bigcup_{x\in F} B_d(x,1/n)\right) \cap \left(\bigcup_{y\in C} B_d(y,1/n)\right) = \emptyset,$$

其中 $B_d(x,1/n) = \{z \in X : d(x,z) < 1/n\}$. 考虑下述条件 $(*)$: 存在空间 X 上的 g 函数, 对 X 中不相交的闭集 F 和紧集 C, 存在某个 $n \in \omega$, 使得

$$\left(\bigcup_{x\in F} g(n,x)\right) \cap \left(\bigcup_{y\in C} g(n,y)\right) = \emptyset.$$

每个度量空间具有性质 $(*)$, 每个具有性质 $(*)$ 的空间是 Nagata 空间. 本文的最后一部分将证明具有性质 $(*)$ 的空间与度量空间是等价的, 从而就得到了拓扑空间可度量化的某些充要条件.

为叙述的方便起见, 引入一些约定和记号: 本文中所论空间都是满足 T_2 分离性质的拓扑空间. N 表示正整数集, $\omega = N \cup \{0\}$. 如果 $\mathcal{U}$ 是 X 的覆盖, 令 $st(x,\mathcal{U}) = \cup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$, $st^2(x,\mathcal{U}) = \cup\{U \in \mathcal{U} : U \cap st(x,\mathcal{U}) \neq \emptyset\}$. 若 $\{A_n\}_{n\in\omega}$ 和 $\{B_n\}_{n\in\omega}$ 是 X 中两集列, 如果每一 $A_n \subset B_n$, 记为 $(A_n) \preceq (B_n)$. 对于 X 的覆盖 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$, 记 $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ 为 $\{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$. 令 2^X 为空间 X 中的所有非空闭集构成的族. 本文未定义的术语见文 [2, 8].

1 关于 MCM 与 k-MCM 空间

定义 1[1] 如果存在算子 U, 对于空间 X 的任一交为空集的递减闭集列 $\{D_j\}_{j\in\omega}$ 都对应一开集列 $U(\{D_j\}) = \{U(n,\{D_j\})\}_{n\in\omega}$, 满足

(1) 对每一 $n \in \omega$, 有 $D_n \subset U(n,\{D_j\})$;

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(2) $\bigcap_{n\in\omega} U(n,\{D_j\})=\emptyset$;

(3) 如果 $(D_n)\preceq(E_n)$, 则 $U(\{D_j\})\preceq U(\{E_j\})$,

则称 X 为单调可数亚紧 (monotonically countably metacompact) 空间, 简称为 MCM 空间.

如果更设 X 满足:

(2)′ $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U(n,\{D_j\})}=\emptyset$,

则称 X 为单调可数仿紧 (monotonically countably paracompact) 空间, 简称为 MCP 空间.

下面介绍与 MCM 空间的刻画相关的 g 函数方法, 这是研究广义度量空间的重要方法. 设 $(X,\mathcal{T})$ 是拓扑空间, 称函数 $g:\omega\times X\to\mathcal{T}$ 是 X 上的 g 函数, 若每一 $x\in g(n,x)$. 这时可不妨设每一 $g(n+1,x)\subset g(n,x)$. 如不特别说明, 本文均用 g 表示 g 函数.

定义 2[8]　考虑空间 X 上的 g 函数性质:

(β) 若对于每一 $n\in\omega$, 有 $x\in g(n,y_n)$, 则序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点;

(ωN) 若对于每一 $n\in\omega$, 有 $g(n,x)\cap g(n,y_n)\neq\emptyset$, 则序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点;

(q) 若对于每一 $n\in\omega$, 有 $y_n\in g(n,x)$, 则序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点.

如果空间 X 有 g 函数分别满足条件 (β), (ωN) 或 (q), 则称 X 是 β 空间, ωN 空间或 q 空间.

首先讨论 MCM 空间, q 空间和 ωN 空间的遗传性. 文 [1] 提出下述问题: 在正规空间类中, MCM 空间是关于开 F_σ 子空间遗传的吗? 定理 1 将给出此问题正面的回答.

定理 1　如果 X 是 MCM 空间, 则 X 的每个 F_σ 子空间也是 MCM 空间.

证明　在文 [1] 中证明了空间 X 是 MCM 的充要条件是 X 是 β 空间, 于是只需证 X 的每个 F_σ 子空间是 β 空间. 让 g 是 X 上满足定义 2 的条件 (β) 的 g 函数, U 是 X 中的 F_σ 集, 即 $U=\bigcup_{n\in\omega}F_n$, 其中每一 F_n 是 X 的闭集且不妨设 $F_n\subset F_{n+1}$.

令 $F_{-1}=\emptyset$. 定义 $g':\omega\times U\to\mathcal{T}|U$ 如下: 对每个 $n\in\omega$, $x\in U$, 存在唯一的 $m\in\omega$, 使得 $x\in F_m\setminus F_{m-1}$, 令 $g'(n,x)=U\cap g(n,x)\setminus F_{m-1}$, 则 g' 是 U 上的 g 函数.

下面证明 g' 满足定义 2 中的 (β).

设对于每一 $n\in\omega$, 有 $x\in g'(n,y_n)$. 因为 $x\in U$, 存在 $m\in\omega$, 使得 $x\in F_m\setminus F_{m-1}$. 如果 $y\in U\setminus F_m$, 则 $g'(n,y)\cap F_m=\emptyset$, 那么 $x\notin g'(n,y)$. 因此, 每一 $x_n\in F_m$, 而 $x\in g'(n,y_n)\subset g(n,y_n)$, 且 X 是 β 空间, 所以序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点. 由于 F_m 是 X 的闭集, 于是序列 $\{y_n\}$ 的聚点在 $F_m\subset U$ 中, 故 U 是 β 空间, 从而 U 是 MCM 空间.

定理 2　如果 X 是正规的 q 空间, 则 X 的每个开 F_σ 子空间也是 q 空间.

证明　设 O 是空间 X 的开 F_σ 子集. 令 $O=\bigcup_{n\in\omega}E_n$, 其中每一 E_n 是 X 的闭集. 由 X 的正规性, 存在 X 的开集 U_0, 使得 $E_0\subset U_0\subset\overline{U}_0\subset O$. 令 $U_{-1}=\emptyset$. 归纳假设对 $m\in\omega$ 及任一 $i\leq m$, 都有

$$\overline{U}_{i-1}\cup E_i\subset U_i\subset\overline{U}_i\subset O.$$

因为 X 的闭集 $\overline{U}_m\cup E_{m+1}\subset O$, 存在 X 的开集 U_{m+1}, 使得 $\overline{U}_m\cup E_{m+1}\subset U_{m+1}\subset\overline{U}_{m+1}\subset O$. 对于每一 $n\in\omega$, 令 $F_n=\overline{U}_n$, 则有 $E_n\subset U_n\subset F_n\subset F_{n+1}^\circ\subset O$. 因而 $O=\bigcup_{n\in\omega}F_n$ 且每一 F_n 是 X 的闭集.

令 g 是 X 上满足定义 2 的条件 (q) 的 g 函数. 定义 $g':\omega\times O\to\mathcal{T}|O$ 如下: 对任一 $x\in O$, 有一 $n_x\in\omega$, 使得 $x\in F_{n_x}^\circ\setminus F_{n_x-1}^\circ$. 于是令 $g'(n,x)=g(n,x)\cap F_{n_x}^\circ$, 则 g' 是 O 上的 g 函数.

下面证明 g' 满足定义 2 中的条件 (q). 设对于每一 $n\in\omega$, 都有 $y_n\in g'(n,x)$, 则有 $y_n\in F_{n_x}^\circ$. 由于 $g'(n,x)\subset g(n,x)$, 于是序列 $\{y_n\}$ 在 X 中有聚点. 又由于 $y_n\in F_{n_x}$ 且 F_{n_x} 是 X 的闭集,

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

则序列 $\{y_n\}$ 的聚点必在 $F_{n_x} \subset O$ 中. 因此, O 是 q 空间.

引理 1[1] X 是 ωN 空间的充要条件是 X 是 MCP 的 q 空间.

引理 2[1] 如果 X 是正规的 MCP 空间, 则 X 的每个开 F_σ 子空间是 MCP 空间.

从定理 2, 引理 1 和引理 2, 得到下面的定理.

定理 3 如果 X 是正规的 ωN 空间, 则 X 的每个开 F_σ 子空间是 ωN 空间.

定义 3[3] 满足下述条件的空间 X 称为 k-MCM 空间: 存在 X 上的 g 函数, 使得对 X 的任一序列 $\{x_n\}$ 及紧集 C, 若对于每一 $n \in \omega$, 有 $g(n, x_n) \cap C \neq \emptyset$, 则序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点. 文 [3] 中称 k-MCM 空间为 $k\beta$ 空间.

下面讨论 k-MCM 空间的性质, 先通过递减闭集列给出 k-MCM 空间的特征.

定理 4 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是 k-MCM 空间;

(2) 存在算子 U, 对 X 中每一交为空集的递减闭集列 $\{D_j\}_{j\in\omega}$ 都对应开集列 $U(\{D_j\}) = \{U(n, \{D_j\})\}_{n\in\omega}$, 使得下述成立:

(i) 对于每一 $n \in \omega$, 有 $D_n \subset U(n, \{D_j\})$;

(ii) 对于 X 的任一紧集 C, 存在 $m \in \omega$, 使得 $U(m, \{D_j\}) \cap C = \emptyset$;

(iii) 如果 $(D_j) \preceq (E_j)$, 则 $U(\{D_j\}) \preceq U(\{E_j\})$.

证明 (2)$\Rightarrow$(1) 对任一 $x \in X$ 及 $n \in \omega$, 如果 $j \le n$, 定义 $D_j^n(x) = \{x\}$, 否则 $D_j^n(x) = \emptyset$, 则 $\{D_j^n(x)\}_{j\in\omega}$ 是 X 的交为空集的递减闭集列, 令 $g(n, x) = U(n, \{D_j^n(x)\})$, 则 $g: \omega \times X \to \mathcal{T}$ 是 X 上的 g 函数. 让 C 是 X 的紧集, $\{x_n\}$ 是 X 的序列且满足对于每一 $n \in \omega$, 有 $g(n, x_n) \cap C \neq \emptyset$. 假若序列 $\{x_n\}$ 在 X 中没有聚点, 令 $F_j = \{x_n : n \ge j\}$, 则 $\{F_j\}_{j\in\omega}$ 是 X 中交为空集的递减闭集列. 由 (ii) 可知, 存在某个 $m \in \omega$, 使得 $U(m, \{F_j\}) \cap C = \emptyset$. 而 $g(m, x_m) = U(m, \{D_j^m(x_m)\}) \subset U(m, \{F_j\})$, 于是 $g(m, x_m) \cap C = \emptyset$. 矛盾. 因此, 序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点.

(1)$\Rightarrow$(2) 设 $\{D_j\}_{j\in\omega}$ 是 X 中交为空集的递减闭集列, 定义 $U(n, \{D_j\}) = \cup\{g(n, x) : x \in D_n\}$, 易验证 $\{U(n, \{D_j\})\}_{n\in\omega}$ 是满足 (2) 的开集列.

由定义 1 与定理 4, 每个 k-MCM 空间是 MCM 空间. 下面讨论 k-MCM 空间的遗传性质. 显然, k-MCM 性质是闭遗传的.

定理 5 如果 X 是正规的 k-MCM 空间, 则 X 的每个开 F_σ 子空间也是 k-MCM 空间.

证明 让 U 是空间 X 的开 F_σ 子空间. 由于 X 是正规空间, 记 $U = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, 其中每一 F_n 是 X 的闭集且 $F_n \subset F_{n+1}^\circ$. 再记 $F_{-1} = \emptyset$. 令 $g: \omega \times X \to \mathcal{T}$ 是满足定义 3 的 g 函数. 定义 $g': \omega \times U \to \mathcal{T}|U$ 如下: 对任一 $x \in X$, 存在唯一的 $m \in \omega$, 使得 $x \in F_m \setminus F_{m-1}$, 令 $g'(n, x) = U \cap g(n, x) \setminus F_{m-1}$, 则 g' 是 U 上的 g 函数. 对 U 中的任一紧集 C, 则有某个 $m \in \omega$, 使得 $C \subset F_m^\circ$. 如果对所有 $n \in \omega$, 都有 $g'(n, x_n) \cap C \neq \emptyset$, 则有 $x_n \in F_m$. 由于 $g'(n, x_n) \subset g(n, x_n)$, 于是 $g(n, x_n) \cap C \neq \emptyset$, 从而序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点 x. 由于 $x_n \in F_m$ 且 F_m 是 X 的闭集, 故 $x \in F_m \subset U$. 因此子空间 U 是 k-MCM 空间.

定义 4[7] 如果空间 X 存在函数 $U: \omega \times 2^X \to \mathcal{T}$ 满足下述条件:

(1) $F = \bigcap_{n\in\omega} U(n, F)$;

(2) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow$ 对于每一 $n \in \omega$, 有 $U(n, F_1) \subset U(n, F_2)$;

(3) 若 K 是 X 的紧集且 $K \cap F = \emptyset$, 则有某个 $m \in \omega$, 使得 $K \cap U(m, F) = \emptyset$,

则称 X 为 k 半层空间 (k-semistratifiable spaces).

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

如果 $\{F_j\}_{j\in\omega}$ 是空间 X 的交为空集的递减闭集列，且 K 是 X 的紧集，则有某个 $j_k\in\omega$，使得 $F_{j_k}\cap K=\emptyset$. 若 X 还是 k 半层空间，让 $U:\omega\times 2^X\to\mathcal{T}$ 为定义 4 中的函数，不妨设当 $i\le j$ 时，有 $U(j,F)\subset U(i,F)$, 则有某个 $m\in\omega$, 使得 $U(m,F_{j_k})\cap K=\emptyset$. 令 $i=\max\{m,j_k\}$, 则 $U(i,F_i)\cap K=\emptyset$. 再令 $U(n,\{F_j\})=U(n,F_n)$, 则 $\{U(n,\{F_i\})\}_{n\in\omega}$ 是满足定义 1 的开集列. 从而 X 是 k-MCM 空间，即每个 k 半层空间是 k-MCM 空间. 由于每个半层空间是 MCM 空间，而半层空间不一定是 k 半层空间 [2]. 因此 MCM 空间不一定是 k-MCM 空间.

下面讨论 k-MCM 空间是 k 半层空间的条件.

定义 5[8] 设 $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ 是空间 X 的开覆盖序列，如果对每一 $x\in X$ 都，有

$$\{x\}=\bigcap_{n\in\omega} st(x,\mathcal{U}_n),$$

则称 $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ 是 X 的 G_δ 对角线序列，称 X 是具有 G_δ 对角线的空间.

定义 6[6] 如果空间 X 的任一开覆盖 $\mathcal{U}$, 都有 X 的开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in N}$, 使得每个 $\mathcal{U}_n$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细且对 X 中的任一紧集 C 都存在某个 $n\in N$, 使得 $|\{V\in\mathcal{U}_n: V\cap C\ne\emptyset\}|<\omega$, 则称 X 是次中紧空间.

定理 6 设 X 是 k-MCM 空间. 如果 X 是具有 G_δ 对角线的正则次中紧空间，则 X 是 k 半层空间.

证明 设 $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in N}$ 是空间 X 的 G_δ 对角线序列且每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{U}_n$. 让 $\mathcal{U}_1'=\mathcal{U}_1$. 由于 X 是正则次中紧空间，因此 $\mathcal{U}_1'$ 有开加细序列 $\{\mathcal{V}_{1i}\}_{i\in N}$ 满足：对 X 的任一紧集 C, 有某个 $j\in N$, 使得 $|\{V\in\mathcal{V}_{1j}: V\cap C\ne\emptyset\}|<\omega$, 且对所有 $i\in N$ 及任一 $V\in\mathcal{V}_{1i}$, 有某个 $U\in\mathcal{U}_1'$, 使得 $\overline{V}\subset U$. 归纳假设对 $m\in N$ 及任一 $i\le m-1$, 已构造了 $\{\mathcal{V}_{ij}\}_{j\in N}$. 令 $\mathcal{U}_m'=(\bigwedge_{i\le m}\mathcal{U}_i)\wedge(\bigwedge_{i+j\le m}\mathcal{V}_{ij})$, 则 $\mathcal{U}_m'$ 有一开加细序列 $\{\mathcal{V}_{mj}\}_{j\in N}$ 满足：对 X 的任一紧集 C, 有某一 $j\in N$, 使得 $|\{V\in\mathcal{V}_{mj}: V\cap C\ne\emptyset\}|<\omega$, 且对任一 $i\in N$ 及任一 $V\in\mathcal{V}_{mi}$, 有某个 $U\in\mathcal{U}_m'$, 使得 $\overline{V}\subset U$. 让 C 是 X 的任一紧集，对于每一 $m,n\in N$, 令 $\mathcal{V}_{mn}(C)=\{V\in\mathcal{V}_{mn}: V\cap C\ne\emptyset\}$.

结论

$$C=\bigcap_{m,n\in N}(\cup\mathcal{V}_{mn}(C))=\bigcap_{m,n\in N}\overline{\cup\mathcal{V}_{mn}(C)}.$$

证明 由于 $\mathcal{U}_1'=\mathcal{U}_1$, 存在 $b_1\in N$, 使得 $|\mathcal{V}_{1b_1}(C)|<\omega$. 令 $a_1=1$, 则 $C\subset\cup\mathcal{V}_{a_1b_1}(C)\subset\overline{\cup\mathcal{V}_{a_1b_1}(C)}$. 令 $a_2=a_1+b_1$, 于是有 $b_2\in N$, 使得 $|\mathcal{V}_{a_2b_2}(C)|<\omega$. 由于 $a_1+b_1<a_2+b_2$, 于是对任一 $V\in\mathcal{V}_{a_2b_2}(C)$, 有 $U\in\mathcal{V}_{a_1b_1}(C)$, 使得 $\overline{V}\subset U$, 从而

$$C\subset\cup\mathcal{V}_{a_2b_2}(C)\subset\overline{\cup\mathcal{V}_{a_2b_2}(C)}\subset\cup\mathcal{V}_{a_1b_1}.$$

令 $a_3=a_2+b_2$. 归纳假定对某一 $n\in N$ 及任一 $m\le n$ 已有 $a_m,b_m\in N$ 满足：$a_m=a_{m-1}+b_{m-1}$, 并且 $C\subset\cup\mathcal{V}_{a_mb_m}(C)\subset\overline{\cup\mathcal{V}_{a_mb_m}(C)}\subset\cup\mathcal{V}_{a_{m-1}b_{m-1}}(C)$. 再令 $a_{n+1}=a_n+b_n$, 则有 $b_{n+1}\in N$, 使得 $|\mathcal{V}_{a_{n+1}b_{n+1}}(C)|<\omega$. 于是 $a_n+b_n<a_{n+1}+b_{n+1}$, 并且对任一 $V\in\mathcal{V}_{a_{n+1}b_{n+1}}(C)$, 有 $U\in\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)$, 使得 $\overline{V}\subset U$. 因此 $C\subset\cup\mathcal{V}_{a_{n+1}b_{n+1}}(C)\subset\overline{\cup\mathcal{V}_{a_{n+1}b_{n+1}}(C)}\subset\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)$, 从而

$$C\subset\bigcap_{n\in N}(\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(C))=\bigcap_{n\in N}\overline{\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)}.$$

如果 $x\in\bigcap_{m,n\in N}\overline{\cup\mathcal{V}_{mn}(C)}$, 则 $x\in\bigcap_{n\in N}(\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(C))$. 对任一 $V\in\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)$, 如果 $x\in V$, 则有 $V_i'\in\mathcal{V}_{a_ib_i}(C)$, 使得 $V_n'=V$ 且 $\overline{V}_i'\subset V_{i-1}'$, 其中 $2\le i\le n$. 因为对于每一 $n\in N$, 有

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$|\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)|<\omega$, 由 König 引理 [9], 存在 $V_n\in\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)$, 使得 $x\in V_{n+1}\subset\overline{V}_{n+1}\subset V_n$, 于是 $(\bigcap_{n\in N}\overline{V_n})\cap C\neq\emptyset$. 令 $y\in(\bigcap_{n\in N}\overline{V_n})\cap C$, 则对任一 $n\in N$, 存在 $U_n\in\mathcal{U}_{a_n}$, 使得 $\overline{V}_n\subset U_n$, 于是 $x\in st(y,\mathcal{U}_{a_n})$, 则

$$x\in\bigcap_{n\in N}st(y,\mathcal{U}_{a_n})=\bigcap_{n\in N}st(y,\mathcal{U}_n)=\{y\},$$

于是 $x=y$, 从而 $x\in C$. 因此 $\bigcap_{n\in N}\overline{\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)}=C$.

简记 $\mathcal{V}_{mn}(\{x\})$ 为 $\mathcal{V}_{mn}(x)$. 让 $g_1:N\times X\to\mathcal{T}$ 是 X 上满足定义 3 的 g 函数. 对于任一 $x\in X$ 及 $n\in N$, 令 $g(n,x)=g_1(n,x)\cap(\bigcap_{i+j=n+1}(\cup\mathcal{V}_{ij}(x)))$, 则 g 是 X 上的 g 函数.

为了书写的简洁起见, 对上述结论证明中得到的 a_n,b_n, 记 $c_n=a_n+b_n$. 对 X 的任一闭集 F 及 $n\in N$, 定义 $V(n,F)=\bigcup_{x\in F}g(n,x)$, 则函数 $V:N\times2^X\to\mathcal{T}$ 满足定义 4 的条件 (1) 和 (2). 设 C 是 X 的紧集, 且 $F\cap C=\emptyset$. 假若对每一 $n\in N$, 有 $V(n,F)\cap C\neq\emptyset$, 则有 $x_n\in F$, 使得 $g(n,x_n)\cap C\neq\emptyset$. 因此 $g(c_n-1,x_{c_n-1})\cap C\neq\emptyset$. 对任一 $m\in N$, 如果 $c_n-1<m<c_{n+1}-1$, 则令 $x_m=x_{c_{n+1}-1}$. 因此 $g(m,x_m)\cap C\neq\emptyset$, 从而序列 $\{x_m\}$ 在 X 中有聚点 x, 则 $x\in F$. 因此 x 是序列 $\{x_{c_n-1}\}_{n\in N}$ 的聚点

$$x_{c_n-1}\in g(c_n-1,x_{c_n-1})\subset\cap\{\cup\mathcal{V}_{ij}(x_{c_n-1}):i+j=c_n\}.$$

由于 $g(c_n-1,x_{c_n-1})\cap C\neq\emptyset$, 所以 $(\cup\mathcal{V}_{ij}(x_{c_n-1}))\cap C\neq\emptyset$, $i+j=c_n$. 因此 $(\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(x_{c_n-1}))\cap C\neq\emptyset$, 于是 $x_{c_n-1}\in\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)$. 这样

$$x_{c_{n+1}-1}\in\cup\mathcal{V}_{a_{n+1}b_{n+1}}(C)\subset\overline{\cup\mathcal{V}_{a_{n+1}b_{n+1}}(C)}\subset\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(C),$$

于是 $x\in\bigcap_{n\in N}\overline{\cup\mathcal{V}_{a_nb_n}(C)}=C$. 这与 $x\in F$ 矛盾. 因而有 $m\in N$, 使得 $V(m,F)\cap C=\emptyset$, 故 X 是 k 半层空间.

2 关于度量化定理

在文 [10] 与 [11] 中讨论了由 g 函数刻画的度量化定理. 文 [11] 中证明了 X 是可度量化空间的充要条件是存在 X 上的 g 函数满足下述条件:

(I) 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 $p\in X$, 且每一 $x_n\in\overline{g(n,y_n)}$, 则序列 $\{y_n\}$ 收敛于 p;

(II) 对任一 $Y\subset X$ 及 $n\in\omega$, 有 $\overline{Y}\subset\bigcup_{y\in Y}\overline{g(n,y)}$.

在文 [10] 中引入了空间 CWBC 映射的概念. 空间 X 的 CWBC 映射是函数 $g:\omega\times X\to\mathcal{P}(X)$($X$ 的幂集) 满足对每一 $x\in X$ 及 $n\in\omega$, 有 $x\in g(n+1,x)\subset g(n,x)$, 且 X 的任一子集 U 是开集的充要条件是对每一 $x\in U$, 有 $n\in\omega$, 使得 $g(n,x)\subset U$.

本节将给出一些新的度量化定理. 如果空间 X 的覆盖序列 $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$ 满足每一 $\mathcal{G}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{G}_n$, 且对任一 $x\in X$, $\{st(x,\mathcal{G}_n)\}_{n\in\omega}$ 是 x 在 X 中的局部弱基 (local weak bases), 则称 $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$ 是 X 的弱展开. 存在弱展开的空间称为弱可展空间 (见文 [12]). 关于弱基的概念可参见文 [2] 中的定义 1.6.11.

引理 3[12] 空间 X 可度量化的充要条件是存在 X 的弱展开 $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$, 使得对于每一 $x\in X$, $\{st^2(x,\mathcal{G}_n)\}_{n\in\omega}$ 是 x 在 X 中的局部弱基.

定理 7 空间 X 可度量化的充要条件是存在 X 上的 CWBC 映射 $g:\omega\times X\to\mathcal{P}(X)$ 满足下述条件:

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(I) 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x, 且每一 $x_n \in \overline{g(n,y_n)}$, 则序列 $\{y_n\}$ 收敛于 x;

(II) 对任一 $A \subset X$ 及 $n \in \omega$, 有 $\overline{A} \subset \bigcup_{x\in A} \overline{g(n,x)}$.

证明 只须证明充分性. 对于每一 $x \in X$ 及 $n \in \omega$, 令

$$h(n,x) = g(n,x) \setminus \overline{\{y : x \notin \overline{g(n,y)}\}}.$$

由于

$$\overline{\{y : x \notin \overline{g(n,y)}\}} \subset \cup\{\overline{g(n,y)} : x \notin \overline{g(n,y)}\},$$

所以 $x \in h(n,x)$. 对于每一 $n \in \omega$, 令 $\mathcal{G}_n = \{h(n,x) : x \in X\}$.

下面证明 $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$ 满足引理 3 的条件.

一方面, 对于每一 $x \in X$, $\{h(n,x)\}_{n\in\omega}$ 是 x 在 X 的局部弱基. 设 X 的子集 U 满足: 任一 $x \in U$, 有某个 $n \in \omega$, 使得 $h(n,x) \subset U$. 由于

$$h(n,x) = g(n,x) \setminus \overline{\{y : x \notin \overline{g(n,y)}\}} = g(n,x) \cap (X \setminus \overline{\{y : x \notin \overline{g(n,y)}\}}),$$

且 $\{g(n,x)\}_{n\in\omega}$ 是 x 在 X 的局部弱基. 因此, 有 $m \in \omega$, 使得 $m > n$ 且

$$g(m,x) \subset g(n,x) \cap (X \setminus \overline{\{y : x \notin \overline{g(n,y)}\}}) = h(n,x),$$

从而 U 是 X 的开集. 另一方面, 若 U 是 X 的开集, 则对任一 $x \in U$, 有某个 $n \in \omega$, 使得 $x \in g(n,x) \subset U$, 而 $h(n,x) \subset g(n,x)$, 于是 $x \in h(n,x) \subset U$. 因此 $\{h(n,x)\}_{n\in\omega}$ 是 x 在 X 中的局部弱基.

若 U 是 X 的开集且 $x \in U$, 则有某个 $m \in \omega$, 使得 $st^2(x,\mathcal{G}_m) \subset U$. 否则, 对所有 $n \in \omega$, 都有 $st^2(x,\mathcal{G}_n) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$, 于是存在 X 中的序列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$, 使得

$$x \in h(n,y_n), \quad h(n,y_n) \cap h(n,z_n) \neq \emptyset$$

且 $h(n,z_n) \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. 令 $w_n \in h(n,z_n) \cap (X \setminus U)$. 由于 $x \in g(n,y_n)$, 所以 $x \in \overline{g(n,y_n)}$, 从而序列 $\{y_n\}$ 收敛于 x. 又由于 $h(n,y_n) \cap h(n,z_n) \neq \emptyset$, 令 $u_n \in h(n,y_n) \cap h(n,z_n)$, 则有 $y_n \in \overline{g(n,u_n)}$, 因而序列 $\{u_n\}$ 收敛于 x. 再由于 $u_n \in h(n,z_n) \subset g(n,z_n)$, 于是 $u_n \in \overline{g(n,z_n)}$, 因此序列 $\{z_n\}$ 收敛于 x. 然而 $w_n \in h(n,z_n)$, 所以 $z_n \in \overline{g(n,w_n)}$, 那么序列 $\{w_n\}$ 收敛于 x, 于是便有 $x \in X \setminus U$, 矛盾. 因此有某个 $m \in \omega$, 使得 $st^2(x,\mathcal{G}_m) \subset U$.

由此, 对于每一 $x \in X$, $\{st(x,\mathcal{G}_n)\}_{n\in\omega}$ 和 $\{st^2(x,\mathcal{G}_n)\}_{n\in\omega}$ 都是 x 在 X 中的局部弱基. 由引理 3, X 是可度量化空间.

定理 8 对于空间 $(X,\mathcal{T})$, 下述条件相互等价:

(1) 存在 X 上的 g 函数满足对 X 中任意不相交的闭集 F 与紧集 C, 都有某个 $n \in \omega$, 使得 $(\bigcup_{x\in F} g(n,x)) \cap (\bigcup_{y\in C} g(n,y)) = \emptyset$.

(2) 存在函数 $U : \omega \times 2^X \to \mathcal{T}$ 满足对任一 $F \in 2^X$, 有下述条件成立:

(i) 对于每一 $n \in \omega$, 有 $F \subset U(n,F)$;

(ii) $F_1 \subset F_2 \Rightarrow$ 对所有的 $n \in \omega$, 有 $U(n,F_1) \subset U(n,F_2)$;

(iii) 若 C 是 X 的紧集且 $C \cap F = \emptyset$, 则有 $m \in \omega$, 使得 $U(m,F) \cap U(m,C) = \emptyset$.

(3) 存在函数 $V : \omega \times \mathcal{T} \to 2^X$ 满足对任一 $O \in \mathcal{T}$, 有下述条件成立:

(i) 对于每一 $n \in \omega$, 有 $F(n,O) \subset O$;

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

(ii) $O_1 \subset O_2 \Rightarrow$ 对所有的 $n \in \omega$, 有 $F(n, O_1) \subset F(n, O_2)$;

(iii) 若 C 是 X 的紧集且 $C \subset O$, 则有 $m \in \omega$, 使得 $F(m, O) \cup F(m, X \setminus C) = X$.

(4) 存在 X 上的 g 函数满足如果每一 $g(n, x_n) \cap g(n, y_n) \neq \emptyset$ 且序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则序列 $\{y_n\}$ 收敛于 x.

(5) X 是可度量化空间.

证明 (1)$\Leftrightarrow$(2) 若 g 是空间 X 上满足 (1) 的 g 函数, 对任意的 $n \in \omega$ 和 $F \in 2^X$, 定义 $U(n, F) = \bigcup_{x \in F} g(n, x)$, 则 $U : \omega \times 2^X \to \mathcal{T}$ 满足 (2). 反之, 若 $U : \omega \times 2^X \to \mathcal{T}$ 满足 (2), 定义 $g : \omega \times X \to \mathcal{T}$, 使得每一 $g(n, x) = U(n, \{x\})$, 则 g 是 X 上的 g 函数且满足 (1).

(2)$\Leftrightarrow$(3) 设函数 $U : \omega \times 2^X \to \mathcal{T}$ 满足 (2), 定义函数 $V : \omega \times \mathcal{T} \to 2^X$, 使得每一 $V(n, O) = X \setminus U(n, X \setminus O)$, 则函数 V 满足 (3). 反之, 设函数 $V : \omega \times \mathcal{T} \to 2^X$ 满足 (3), 定义函数 $U : \omega \times 2^X \to \mathcal{T}$, 使得每一 $U(n, F) = X \setminus V(n, X \setminus F)$, 则函数 U 满足 (2).

(1)$\Rightarrow$(4) 让 X 上的 g 函数满足 (1). 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得每一 $g(n, x_n) \cap g(n, y_n) \neq \emptyset$ 且 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 如果序列 $\{y_n\}$ 不收敛与 x, 则有 x 在 X 中的开邻域 V 和 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{y_{n_k}\}$, 使得每一 $y_{n_k} \in X \setminus V$. 让 $F = X \setminus V$, $C = \{x_n \in V : n \in \omega\} \cup \{x\}$, 则 F, C 分别是 X 的闭集和紧集且 $F \cap C = \emptyset$. 由 (1), 有 $n \in \omega$, 使得

$$\left(\bigcup_{y \in F} g(n, y) \right) \cap \left(\bigcup_{z \in C} g(n, z) \right) = \emptyset.$$

因此, 有 $k \in \omega$, 使得

$$g(n_k, x_{n_k}) \cap g(n_k, y_{n_k}) = \emptyset.$$

矛盾, 故 (4) 成立.

(4)$\Rightarrow$(5) 由 (4), X 是强拟 N 空间与拟 γ 空间 [10]. 这样由文 [10] 中定理 4.4 可知 X 是可度量化的.

(5)$\Rightarrow$(1) 是显然的. 定理证毕.

参 考 文 献

[1] Good C., Knight R., Ian stars, monotone countable paracompactness, *Topology Appl.*, 2000, **101**: 281–298.
[2] Lin S., Generalized metric spaces and mappings, Beijing: Chinese Science Publishers, 1995 (in Chinese).
[3] Wu L. S., About k-semistratifiable spaces, *J. Suzhou Univ.*, 1986, **4**: 47–57.
[4] Borges C. R., On stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, 1966, **17**: 1–16.
[5] Creede G., Concerning semi-stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, 1970, **32**: 47–54.
[6] Lin S., Mapping theorems on k-semistratifiable spaces, *Tsukuba J. Math.*, 1997, **21**(3): 809–815.
[7] Lutzer D. L, Semistratifiable and stratifiable spaces, *General Topology Appl.*, 1971, **1**: 43–48.
[8] Gruenhage G., Generalized metric spaces, In: Kunen K., Vaughan J. E. eds., Handbook of Set-theoretic Topology, North-Holland, 1984, 423–501.
[9] Kunen K., Set theory-an introduction to independence proof, Amsterdam: North-Holland, 1980.
[10] Mohamad A. M., Conditions which imply metrizablity in some generalized metric spaces, *Topology Proc.*, 1999, **24**(spring): 215–231.
[11] Gao Z. M., Yasui Y., Some remarks on g-functions, *Topology Proc.*, 1999, **24**(spring): 165–171.
[12] Martin H. W., Weak base and metrization, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1976, **222**: 338–344.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.