第32卷第1期
2003年2月

数 学 进 展
ADVANCES IN MATHEMATICS

Vol.32, No. 1
Feb., 2003

弱基与覆盖性质

林寿

(福建师范大学数学系, 福州, 福建, 350007, 中国)

摘要: 本文证明了具有 σ 闭包保持弱基的正则空间是遗传亚 Lindelöf 空间. 由此获得了 g 可度量空间的一个等价刻画.

关键词: 弱基; 闭包保持集族; g 可度量空间; 亚 Lindelöf 空间

MR(1991) 主题分类: 54E99; 54D20 / **中图分类号**: O189.1

文献标识码: A **文章编号**: 1000-0917(2003)01-0118-03

度量空间具有很好的覆盖性质. 广义度量空间也有一些相应的覆盖性质, 如正则的 σ 空间是次仿紧空间. 1974 年 Siwiec[11] 提出了下述问题.

(S1) g 可度量空间是正规空间吗?

(S2) 正规的 g 可度量空间是仿紧空间吗?

(S3) 可分的 g 可度量空间具有可数弱基吗?

其中, (S3) 可转化为更一般的问题.

(S4) g 可度量空间是亚 Lindelöf 空间吗?

1976 年 Jakovlev[8] 公布了问题 (S2) 和 (S4) 的肯定回答. 1982 年 Foged[3] 讨论了 g 可度量空间的等价条件, 并在文 [4] 中获得了比 g 可度量空间更一般的 k 且 $\aleph$ 空间的覆盖性质, 回答了 Siwiec 的全部问题, 如他证明了

(F1) 存在非正规的 g 可度量空间.

(F2) 在假设 (MA+$\neg$CH) 之下存在非单调正规的具有可数弱基的正则空间.

(F3) 具有 σ 局部有限 k 网的正规的 k 空间是仿紧空间.

(F4) 具有 σ 局部有限 k 网的正则的 k 空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

刘川 [9] 和彭良雪 [10] 分别证明了与上述 (F3) 和 (F4) 相应的结果在具有 σ 遗传闭包保持 k 网的空间上也是成立的. 另一方面, 1992 年高智民 [6] 通过证明具有 σ 闭包保持弱基的正规空间是仿紧空间也给出了问题 (S2) 的一个回答. 受上述工作的启发, 本文将证明具有 σ 闭包保持弱基的正则空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

本文所论空间均指满足 Hausdorff 分离性质的拓扑空间. 先回忆几个相关的概念, 未定义的术语见文 [2] 和 [7].

定义 1(Arhangel'skii[1]) 设空间 X 的子集族 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 满足: 对于每一 $x\in X$,

(1) $x\in\cap\mathcal{P}_x$, 且若 G 是 x 的邻域, 那么存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P\subset G$.

(2) 如果 $U,V\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathcal{P}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$.

$\mathcal{P}$ 称为 X 的弱基, 若 $G\subset X$ 使得对于 $x\in G$ 存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 有 $P\subset G$, 那么 G 是 X 的开子集. 上述 $\mathcal{P}_x$ 称为 x 在 X 中的弱邻域基.

收稿日期: 2001-05-25.

基金项目: 国家自然科学基金 (19971048), 福建省自然科学基金 (F00010) 和福建省高校科技资助项目 (K2001110).

定义 2(Engelking[2]) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的局部有限集族，若对于每一 $x \in X$，存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得 $\{P \in \mathcal{P} : P \cap U \neq \emptyset\}$ 是有限的.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的闭包保持集族，若对于每一 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$，有 $(\cup \mathcal{P}')^- = \cup\{\bar{P} : P \in \mathcal{P}'\}$.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的遗传闭包保持集族，若对于每一 $H(P) \subset P \in \mathcal{P}$，集族 $\{H(P) : P \in \mathcal{P}\}$ 是闭包保持的.

显然，空间 X 的局部有限集族是遗传闭包保持集族，遗传闭包保持集族是闭包保持集族，具有 σ 局部有限弱基的正则空间称为 g 可度量空间.

定理 3 具有 σ 闭包保持弱基的正则空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

证明 设 X 是具有 σ 闭包保持弱基的正则空间. 为证明 X 是遗传亚 Lindelöf 空间，只须证明 X 的任一开子空间是亚 Lindelöf 空间. 由于具有 σ 闭包保持弱基的正则空间性质是开遗传性质，所以又只须证明 X 是亚 Lindelöf 空间. 由于正则性，X 具有 σ 闭包保持闭弱基 $\mathcal{P}$，记 $\mathcal{P} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{P}_x = \bigcup_{n\in N} \mathcal{P}_n$，其中每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的弱邻域基，$\mathcal{P}_n$ 是 X 的闭包保持的闭子集族且 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$.

(1) X 的每一离散的闭子集族有点可数的开扩张.

设 $\mathcal{F}$ 是 X 的离散的闭子集族. 记 $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$，令 $\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{F}$，对于每一 $n \in N, \alpha \in \Lambda$，让

$$P^*_\alpha(n) = \cup\{P \in \mathcal{P}_n : P \cap F_\beta = \emptyset, \beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}\},$$

$$P_\alpha(n) = P^*_\alpha(n)\backslash \cup \{P^*_\beta(n) : \beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}\}.$$

那么对于任一 $\Lambda' \subset \Lambda, \bigcup_{\beta\in\Lambda'} P^*_\beta(n)$ 是 X 的闭子集. 令 $\mathcal{P}(n) = \{P_\alpha(n) : \alpha \in \Lambda\}$ 对于 N 的有限序列 δ，如果 $\mathcal{P}(\delta)$ 已被定义. 设 $\mathcal{P}(\delta) = \{P_\alpha(\delta) : \alpha \in \Lambda\}$，其中 $P_\alpha(\delta) = P^*_\alpha(\delta)\backslash \cup \{P^*_\beta(\delta) : \beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}\}$，且对于任一 $\Lambda' \subset \Lambda, \bigcup_{\gamma\in\Lambda'} P^*_\gamma(\delta)$ 是 X 的闭子集. 对于每一 $n \in N$，按下述方式构造 $\mathcal{P}(\delta n)$：对于每一 $\alpha \in \Lambda$，让

$$P^*_\alpha(\delta n) = \cup\{P \in \mathcal{P}_n : P \cap P^*_\beta(\delta) = \phi, \beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}\},$$

$$P_\alpha(\delta n) = P^*_\alpha(\delta n)\backslash \cup \{P^*_\beta(\delta n) : \beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}\},$$

$$\mathcal{P}(\delta n) = \{P_\alpha(\delta n) : \alpha \in \Lambda\},$$

那么对于任一 $\Lambda' \subset \Lambda, \bigcup_{\gamma\in\Lambda'} P^*_\gamma(\delta n)$ 是 X 的闭子集. 让 $U_\alpha = \cup\{P_\alpha(\delta) : \delta\text{是}N\text{的有限序列}\}$，$\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 我们将证明 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{F}$ 的点可数的开扩张.

对于每一 $\alpha \in \Lambda, F_\alpha = P_\alpha(\emptyset) \subset U_\alpha$. 设 $x \in U_\alpha$，则存在 N 的有限序列 δ 使得 $x \in P_\alpha(\delta)$. 令 $M = \cup\{P^*_\beta(\delta) : \beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}\}$，则 M 是 X 的闭子集且 $x \notin M$，所以存在 $n \in N$ 和 $P_1 \in \mathcal{P}_x \cap \mathcal{P}_n$ 使得 $P_1 \cap M = \emptyset$，从而 $P_1 \subset P^*_\alpha(\delta n)$. 对于每一 $\beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}$，由于 $x \in P_\alpha(\delta) \subset P^*_\alpha(\delta)$，所以，$x \in X\backslash \cup \{P^*_\beta(\delta n) : \beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}\}$，存在 $P_2 \in \mathcal{P}_x$ 使得 $P_2 \subset X\backslash \cup \{P^*_\beta(\delta n) : \beta \in \Lambda\backslash\{\alpha\}\}$，于是 $P_1 \cap P_2 \subset P_\alpha(\delta n) \subset U_\alpha$. 由弱基的定义，$U_\alpha$ 是 X 的开子集.

若 $\mathcal{U}$ 不是点可数的，则存在 $x \in X$ 使得 $|\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\}| > \omega$，于是存在 N 的有限序列 δ 和 Λ 的不可数子集 Λ' 使得当 $\alpha \in \Lambda'$ 时有 $x \in P_\alpha(\delta)$，这与 $\{P_\alpha(\delta) : \alpha \in \Lambda\}$ 是两两互不相交的子集族相矛盾.

(2) X 是亚 Lindelöf 空间.

设 $\mathcal{W}$ 是空间 X 的开覆盖，由于 X 是 σ 空间，于是 X 是次仿紧空间，从而 $\mathcal{W}$ 有加细 $\bigcup_{i\in N}\mathcal{F}_i$，其中每一 $\mathcal{F}_i=\{F_{i\alpha}:\alpha\in\Lambda_i\}$ 是 X 的离散的闭子集族. 对于每一 $i\in N$，由 (1)，存在 X 的点可数的开子集族 $\mathcal{U}_i=\{U_{i\alpha}:\alpha\in\Lambda_i\}$ 使得每一 $F_{i\alpha}\subset U_{i\alpha}$. 对于每一 $i\in N$ 和 $\alpha\in\Lambda_i$，选取 $W_{i\alpha}\in\mathcal{W}$ 使得 $F_{i\alpha}\subset W_{i\alpha}$，那么 $\bigcup_{i\in N}\{W_{i\alpha}\cap U_{i\alpha}:\alpha\in\Lambda_i\}$ 是 $\mathcal{W}$ 的点可数的开加细，所以 X 是亚 Lindelöf 空间.

关于 g 可度量空间，Tanaka[12] 提出是否具有 σ 遗传闭包保持弱基的正则空间是 g 可度量空间？利用定理 3 我们有下述推论.

推论 4 正则空间 X 是 g 可度量空间当且仅当 X 是具有 σ 遗传闭包保持弱基和可数 tightness 的空间.

证明 Tanaka[12] 已证明正则空间 X 是 g 可度量空间当且仅当 X 是亚 Lindelöf 的具有 σ 遗传闭包保持弱基和可数 tightness 的空间，由定理 3 知具有 σ 遗传闭包保持弱基的正则空间是亚 Lindelöf 空间，所以推论成立.

参考文献

[1] Arhangel'skii A V. Mappings and spaces (in Russian) [J]. *Uspechi Mat Nauk,* 1966, 21(4): 133–184 (=*Russian Math. Surveys,* 1966, 21(4): 115–162).

[2] Engelking R. General Topology [M]. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1977.

[3] Foged L. On g-metrizability [J]. *Pacific J. Math.,* 1982, 98: 327–332.

[4] Foged L. Normality in k-and $\aleph$-spaces [J]. *Topology Appl.,* 1986, 22(3): 223–240.

[5] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice [J]. *Fund Math.,* 1965, 57: 107–115.

[6] Gao Zhimin(高智民). Some remarks on the spaces with a σ-closure-preserving weak-base [J]. *Math. Japonica,* 1992, 37(2): 323–328.

[7] Gruenhage G. Generalized metric spaces [C]. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984, 423–501.

[8] Jakovlev N N. On g-metrizable spaces (in Russian) [J]. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR,* 1976, 226(3): 530–532(=*Soviet. Math. Dokl.,* 1976, 17(1): 156–159).

[9] 刘川. σ 遗传闭包保持 k 网的几个注记 [J]. 数学进展, 1995, 24(6): 558–560.

[10] 彭良雪. 一般拓扑学中的几个问题 [博士学位论文] [D]. 北京：首都师范大学, 2000.

[11] Siwiec F. On defining a space by a weak base [J]. *Pacific J. Math.,* 1974, 52(1): 233–245.

[12] Tanaka Y. σ-hereditarily closure-preserving k-networks and g-metrizability [J]. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1991, 112: 283–290.

Weak Base and Covering Property

LIN Shou

(Dept. of Math., Fujian Normal Univ., Fuzhou, Fujian, 350007, P. R. China)

Abstract: In this paper it is showed that every regular space with a σ-colsure-preserving weak base is a hereditarily mata-Lindelöf space. By which, a characterization of g-metrizable spaces is obtained.

Key Words: weak base; closure-preserving family; g-metrizable space; mata-Lindelöf space