

90年代的广义度量空间理论

林寿

(福建师范大学数学系, 福州, 福建, 350007, 中国)

摘要 广义度量空间理论是一般拓扑学研究的重要课题. 本文综述了 90 年代广义度量空间理论的成就, 分析了它的主要研究课题, 所取得的重要结果及国内学者在该方向的贡献.

关键词 广义度量空间; 度量空间; 映射; 积空间; 网
MR(2000) 主题分类 54E35; 54E20; 54C10; 54B10

1 广义度量空间理论

拓扑学的中心课题是确定和研究拓扑不变量. Arhangel'skii^[1]指出: 一般拓扑学致力于拓扑空间及连续性的研究, 有三个主要的“内在”任务, 一是不同拓扑空间类的比较, 二是确定类的研究, 三是为上述目的及应用的需要定义出新的概念和空间类. 实现任务一的联结空间的映射的方法特别地重要, 该方法直接建立不同空间类之间的联系, 任务二主要涉及空间类关于运算的性质, 而覆盖的方法对完成上述任务起重要的作用.

由此可见, 映射与覆盖的方法是一般拓扑学中通用的重要工具, 通过对度量化问题、空间与映射的相互分类原则和积空间的仿紧性等一般拓扑学的重要课题的研究, 导致了广义度量空间理论的建立^[2]. 什么是广义度量空间? 粗略地说, 它们是这样的一些空间类^[3], 它继承了度量空间所具有的较好的运算性质, 且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类, 如是否关于完备映射或闭映射保持? 是否关于子空间或闭子空间遗传? 是否关于有限积或可数积封闭? 是否具有一定的可和性? 是否具有某种的覆盖性质? 从60年代起广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向, 所涉及的与公理集合论、数理逻辑、组合数学、泛函分析、拓扑群、动力系统分支相互交融而形成的大量问题已列入专著《Open Problems in Topology》^[4]. 过去的 40 年间在不同时期内所取得的广义度量空间理论的成就已先后总结在一些重要的论著中, 如文献 [2, 3, 5-8]. 许多知名学者不断提出大量有挑战性的问题, 汇同一些长期未解决的经典问题成为广义度量空间理论进一步向前发展的源泉.

2 广义度量空间理论的新进展

什么是 90 年代广义度量空间理论的主要研究课题? 我们不妨来看一看 1990 年以来国际上出版的几部拓扑学论著, 及最近两次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集关于广义度量空间理论方面的论题.

1990 年由 van Mill 和 Reed^[4] 主编的《Open Problems in Topology》, 在所列举的 1100 个问题中属于广义度量空间方面的问题大致有:

(1.1) 度量化问题与正规 Moore 空间问题 (问题 36 至 41, 79 至 84, 98, 298 至 315, 348, 376, 1049, 1056).

收稿日期: 2000-06-12.

国家自然科学基金资助项目 (No. 19971048) 和福建省自然科学基金资助项目 (No. F00010).

(1.2) 点可数基空间及相关问题 (问题 120, 313, 320, 322, 366, 375 至 380).

(1.3) M_i 空间问题 (问题 321).

(1.4) cosmic 空间问题 (问题 199).

(1.5) MOBI 类问题 (问题 362 至 372).

(1.6) 紧覆盖映射问题 (问题 392 至 394).

(1.7) 单调正规空间问题 (问题 381).

1992 年在 Hušek 和 van Mill^[9] 主编的《Recent Progress in General Topology》(第 7 次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集) 中由 Gruenhage^[7] 撰写的“Generalized metric spaces and metrization”总结了 1984 年以来在广义度量空间与度量化方面的重要成果, 主要论题有:

(2.1) 对称度量空间.

(2.2) 点可数基空间.

(2.3) 单调正规空间与 M_i 空间.

(2.4) Moore 空间、可展空间与严格 p 空间.

(2.5) MOBI 类.

(2.6) Lašnev 空间、cosmic 空间与 k 网.

(2.7) Tychonoff 积与 Σ 积的正规性.

1997 年 Arhangel'skii^[10] 在纪念 Alexandroff 诞辰 100 周年的报告“Some recent advances and open problems in general topology”中论述了在过去的 5-7 年来作者感兴趣的度量化、映射理论和函数空间理论方面的成果与问题, 所涉及的广义度量空间方面的课题有:

(3.1) 点可数基空间与度量化.

(3.2) 具有 G_δ 对角线的空间与可展空间.

(3.3) cosmic 空间与 \aleph_0 空间.

(3.4) 一对一映射与次可度量空间.

(3.5) 紧覆盖映射与诱导完备映射.

1997 年在 Aull 和 Lowen^[11] 主编的《Handbook of the History of General Topology, V1》中由 Nagata^[12] 撰写的“The flowering of general topology in Japan”和 Nagata^[13] 近来撰写的“Recent progress of general topology in Japan”中自 90 年代以来日本在广义度量空间方面的主要工作涉及

(4.1) 度量空间的分解空间及其度量化.

(4.2) Lašnev 空间与 k 网理论.

(4.3) 具有广义度量因子 Σ 积的正规性.

(4.4) 广义度量空间的万有 (universal) 空间.

1998 年由 Hušek^[14] 编辑的第 8 次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集中所发表的 25 篇特邀报告中有 6 篇是广义度量空间方面的内容, 主要工作涉及

(5.1) 确定度量空间的闭映象与几乎开映象.

(5.2) 单调正规空间.

(5.3) 具有广义度量因子有限积的正规性.

在《莫斯科大学数学力学通报》1999 年第 3 期上发表的纪念 Urysohn 诞辰 100 周年的论文集中发表的 11 篇报告中有 3 篇是广义度量空间方面的内容, 主要工作涉及

(6.1) 度量化问题.

(6.2) 度量空间与映射.

(6.3) 弱第一可数性.

从以上所列的课题可见, 度量化问题依然是一般拓扑学的核心问题, 广义度量空间研究的主要对象是具有点可数基的空间、Moore 空间、 M_i 空间、单调正规空间、cosmic 空间、Lašnev 空间和 MOBI 类等, 主要工具是点可数覆盖、展开列、基、网、 k 网、紧覆盖映射和紧映射等. 下面列举一些重要的结果, 限于篇幅在此仅能按作者的认识列举出部分的结果, 有进一步兴趣的读者可参考文后的相关文献.

2.1 关于度量化问题

定理 2.1.1 (1) (ZF) 第二可数的正则空间是可度量化空间 [15].

(2) (ZF+DC)Stone 定理不成立: 存在非仿紧的度量空间 [16].

定理 2.1.2 (1) (ZFC) 存在不具有拟 G_δ 对角线的遗传仿紧完正规 (perfectly normal) 的 Q 集空间 [17].

(2) (ZFC) 存在非仿紧的正规可遮空间 [18].

定理 2.1.3 具有一致 (G) 和点 G_δ 性质的空间是具有 σ 离散网的半层空间 [19,20].

定理 2.1.4 存在具有 σ 离散 π 基的 Moore 空间不能稠密地嵌入任何具有 Baire 性质的 Moore 空间 [21].

其中, 定理 2.1.1 回答了 Läuchli^[22] 提出的问题, 定理 2.1.2 回答了文 [4] 的问题 57 和问题 119, 定理 2.1.3 推广了从 50 年代至 90 年代的一大批度量化定理, 定理 2.1.4 回答了文 [4] 的问题 303 及 Reed^[23] 提出的问题.

2.2 关于紧覆盖映射及映射的相关论题

定理 2.2.1 可分度量空间到可数度量空间的紧覆盖映射是诱导完备映射 [24].

定理 2.2.2 存在三商, 紧, 可数紧覆盖映射 $f: X \rightarrow Y$ 使得 X 是紧的度量空间, Y 是度量空间, 但是 f 不是紧覆盖映射 [25].

定理 2.2.3 对于 $w(X) = \kappa$, X 是解析 (analytic) 度量空间当且仅当 X 是 Baire 空间 κ^ω 的闭子空间的几乎开 s 映象 [26].

定理 2.2.4 Moore 空间的第一可数的 φ 扩张是可展空间 [27].

定理 2.2.5 存在 Lindelöf 的正则空间 X 使得闭映射 $f: X \rightarrow Y$ 不是诱导不可约映射 [28].

其中, 定理 2.2.1 回答了文 [4] 的问题 393, 定理 2.2.2 回答了文 [4] 的问题 392, 定理 2.2.4 深化了关于 Lašnev 空间的系列结果, 定理 2.2.5 回答了 Ponomarev 的问题 (见文 [29] 第 162 页). 关于紧覆盖映射的一些相关结果见文 [30].

2.3 关于积空间

定理 2.3.1 存在遗传正规, σ 相对离散, 基数 c 的 Dowker 空间 [31].

定理 2.3.2 设 Σ 是半层空间的 Σ 积. 若 Σ 的每一有限子积是仿紧空间, 那么 Σ 是正规空间当且仅当它是可数仿紧空间 [32].

定理 2.3.3 (CH)Lašnev 空间 S_{ω_2} 的 Σ 积不是正规空间 [33].

定理 2.3.4 (MA+¬CH) 存在正规, 可分, 局部紧的 Moore 空间 X 使得 X^2 不是正规空间 [34,35].

其中, 定理 2.3.3 回答了 Kodama 的问题, 定理 2.3.4 回答了文 [4] 的问题 299 和问题 300.

2.4 关于单调正规空间

定理 2.4.1 存在非 K_0 的循环 (cyclic) 单调正规空间 [36].

定理 2.4.2 完备映射未必保持弹性 (elastic) 空间 [37].

其中, 定理 2.4.1 回答了文 [4] 的问题 381, 定理 2.4.2 回答了 Tamano 和 Vaughan^[38] 提出的问题.

2.5 关于基、 k 网和网

定理 2.5.1 存在完全正则的具一致基的空间不具有点可数闭 k 网^[39].

定理 2.5.2 空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有由可分子集组成的点可数 k 网的 Fréchet 空间^[40].

定理 2.5.3 (CH) 存在 cosmic 空间 X 使得 $\dim(X) = 1$ 且 $\text{ind}(X) = \text{Ind}(X) = 2^{\aleph_0}$.

定理 2.5.4 存在连通的 cosmic 空间 X 使得 X 不是连通的^[41].

其中, 定理 2.5.1 回答了 Gruenhage, Michael 和 Tanaka^[42] 提出的问题, 定理 2.5.3 回答了 Arhangel'skii^[5] 提出的问题.

3 广义度量空间理论在中国

本节介绍国内学者关于广义度量空间理论的贡献. 国内较早并长期从事广义度量空间理论研究的学者当属高国土教授和高智民教授. 在 70 年代末至 80 年代, 我国学者就已在广义度量空间理论中作出不少值得称赞的成果^[43,44]. 进入 90 年代, 我国学者每年在广义度量空间理论方面都有不少优秀的成果涌现, 这首先得益于国家自然科学基金加大对基础研究的投入力度, 其次得益于国内学者与日本、美国、加拿大、新西兰、芬兰等国学者的较为广泛的合作. 据不完全统计, 自 1990 年以来四川大学、山东大学、西北大学、首都师范大学、苏州大学、广西大学、宁德师范高等专科学校等校至少主持过 15 项与广义度量空间理论相关的国家自然科学基金资助项目的研究工作, 国家自然科学基金还资助了 1993 年的苏州国际一般拓扑学学术会议、1997 年的金华国际拓扑学学术会议、1998 年的北京国际一般拓扑学学术会议以及部分学者的“国际合作与交流项目”、“资助出国参加国际学术会议项目”. 这也从另一个角度说明了国内关于广义度量空间理论的研究成果是极为丰富和具有相当的影响力的.

下面简略报告国内学者 90 年代在广义度量空间理论方面一些具有一定影响和较多引用的工作. 1990–1992 年恽自求^[45–47] 获得了 \aleph 空间的系列结果, 如他与 Junnila 证明了 \aleph 空间等价于不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1} 的具有 σ 遗传闭包保持 k 网的空间. 1990–1993 年滕辉^[48–51] 系统地探讨了广义度量空间的 Σ 积和 σ 积, 解决了 Chiba, Nagami 和 Yajima 提出的几个问题, 如证明了半层空间族的 Σ 积是集态次正规空间. 1992 年王尚志与 Milner^[52] 建立了广义序空间的嵌入定理与度量化定理并解决了 Lutzer^[53] 提出的困难问题, 被国际拓扑学界称为是度量化方面最有趣的结果之一. 1992 年钟宁^[54] 在困难的 M_3 空间上取得了一些进展, 如她获得了具有 M_3 因子的乘积空间的正规性定理. 1993 年王延庚和王成堂^[55] 研究了判断 B_r 空间的一般性方法. 1993–1996 年刘川与戴牧民^[56–59] 在遗传闭包保持集族、弱基及度量空间的紧覆盖 s 映象方面进行了大量的工作, 尤其是证明了 g 可度量空间等价于不含有闭子空间同胚于 S_ω 的具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 k 空间. 1994 年杨乐成^[60] 建立了 Σ 积正规性的等价条件, 证明了仿紧 σ 空间的 Σ 积是正规空间当且仅当它是可数仿紧空间. 1995 年林寿出版了著作《广义度量空间与映射》^[8]. 1996 年高印珠^[20] 在 Collins-Reed-Roscoe-Rudin 度量化定理上取得了很精致的结果: 具有一致 (G) 和点 G_δ 性质的空间是具有 σ 离散网的半层空间. 1996–1998 年刘川与 Tanaka^[61–64] 在星可数 k 网及相关的紧可数 k 网、 δ 点有限 k 网、局部可分度量空间的映象等方面完成了一系列系统的工作, 如证明了空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当它是具有星可数 k 网的 Fréchet 空间. 1997 年冯秀凤与 Tamano^[65] 证明了可数多个 Lašnev 空间积的可数扇密度子空间是可度量空间, 解决了 Arhangel'skii^[66] 提出的问题. 1996–2000 年林寿与戴牧民、刘川、燕鹏飞^[67–80] 在点可数覆盖及相关的序列覆盖映射,

紧覆盖映射, 局部可分度量空间的映象, 乘积空间的 k 空间性质等方面也做了较系统的工作, 如证明了度量空间的商 s 映象是具有点可数基的空间当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_w . 1999 年师维学^[81]构造了不可度量化紧线性序空间使其每一子空间具有 σ 极小基, 否定了 Bennett 和 Lutzer 于 1977 年在 Topology Proceedings 上提出的经典问题. 1999 年陈怀鹏^[82]构造了一个度量空间的商紧映象使它不是度量空间的紧覆盖的商 s 映象, 否定地回答了文 [4] 的问题 394.

此外, 恽自求^[45]和高智民^[83]关于广义度量空间的 g 函数刻画, 周浩旋^[84,85]关于度量空间的拓扑完备化和单调正规空间的工作, 杨忠强^[86]关于超紧空间的工作, 陈怀鹏^[87]关于乘积空间的 k 空间性质, 王延庚^[88]关于局部紧空间的函数空间的工作, 侯吉成^[89]关于超空间的特征和 tightness 的工作, 曹继岭^[90]关于拟一致结构和拟可度量空间的工作, 周金元^[91]关于伪径向 (pseudoradial) 空间的工作, 江守礼和王树泉^[92]关于 $S(n)$ - θ 闭空间的工作, 彭良雪^[93]关于 σ 遗传闭包保持 k 网空间的工作等都是国内关于广义度量空间理论及相关课题的较好工作, 限于篇幅, 我们不在此一叙述.

致谢 本文的一部分内容取自作者的博士学位论文^[78], 在此向导师周友成教授的关心、帮助及指导表示衷心的感谢.

参考文献

- 1 Arhangel'skii A V, Pontryagin L S. General Topology I. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, V 17. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
- 2 Burke D K, Lutzer D J. Recent advances in the theory of generalized metric spaces. In: Topology: Proc. Memphis State Univ. Topology Conference, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. New York: Marcel Dekker Inc, 1976. 1-70.
- 3 Gruenhage G. Generalized metric spaces. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984. 423-501.
- 4 van Mill J, Reed G M. Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990.
- 5 Arhangel'skii A V. Mappings and spaces (in Russian). *Uspechi Mat. Nauk*, 1966, 21(4): 133-184(= *Russian Math. Surveys*, 21(4): 115-162).
- 6 Morita K, Nagata J. Topics in General Topology. Amsterdam: North-Holland, 1989.
- 7 Gruenhage G. Generalized metric spaces and metrizable. In: Hušek M, van Mill J eds. Recent Progress in General Topology. Amsterdam: North-Holland, 1992. 239-274.
- 8 林寿. 广义度量空间与映射. 北京: 科学出版社, 1995.
- 9 Hušek M, van Mill J. Recent Progress in General Topology. Amsterdam: North-Holland, 1992.
- 10 Arhangel'skii A V. Some recent advances and open problems in general topology. *Russian Math. Surveys*, 1997, 52(5): 929-953.
- 11 Aull C E, Lowen R. Handbook of the History of General Topology, V1. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.
- 12 Nagata J. The flowering of general topology in Japan. In: Aull C E, Lowen R eds. Handbook of the History of General Topology, V1. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997, 181-241.
- 13 Nagata J. Recent progress of general topology in Japan. *Topology Appl.*, 1997, 76: 175-187.
- 14 Hušek M ed. Topology and its Applications, V85. Amsterdam: Elsevier Science B V, 1998.
- 15 Good C, Tree I J. Continuing horrors of topology without choice. *Topology Appl.*, 1995, 63: 79-90.
- 16 Good C, Tree I J, Watson W S. On Stone's theorem and the axiom of choice. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, 126: 1211-1218.
- 17 Balogh Z T. There is a paracompact Q-set space in ZFC. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, 126(6): 1827-1833.
- 18 Balogh Z T. A normal screenable nonparacompact space in ZFC. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, 126(6): 1835-1844.
- 19 Moody P J. Concerning the Collins, Reed, Roscoe, Rudin metrization theorem. *Bull. London Math. Soc.*, 1993, 25(5): 476-480.
- 20 Gao Yinzhu(高印珠). A note concerning the Collins, Reed, Roscoe, Rudin metrization theorem. *Topology Appl.*, 1996, 74: 73-82.
- 21 Fearnley D L. A Moore space with a σ -discrete π -base which cannot be densely embedded in any Moore space with the Baire property. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1999, 127(10): 3095-3100.
- 22 Läuchli H. Auswahlaxiom in der algebra. *Comment Math. Helv.*, 1963, 37: 1-18.

- 23 Reed G M. On completeness conditions in Moore spaces. In: Lecture notes in Math., No 378. Berlin: Springer-Verlag, 1974. 368-384.
- 24 Just W, Wicke H. Some conditions under which tri-quotient or compact-covering maps are inductively perfect. *Topology Appl.*, 1994, 55: 289-305.
- 25 Debs G, Raymond J S. Compact covering and game determinacy. *Topology Appl.*, 1996, 68: 153-185.
- 26 Hansell R W. Nonseparable analytic metric spaces. *Topology Appl.*, 1998, 85: 143-152.
- 27 Mizokami T. On φ -extensions of developable spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, 119(1): 331-336.
- 28 Gruenhage G. Irreducible restrictions of closed mappings. *Topology Appl.*, 1998, 85: 127-135.
- 29 van Douwen E K. The Integers and Topology. In: Kunen K, Vaughan J E eds. Handbook of Set-theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984. 111-167.
- 30 林寿. 关于三商映射. *数学进展*, 1998, 27(2): 97-102.
- 31 Balogh Z T. A small Dowker space in ZFC. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996, 124(8): 2555-2559.
- 32 Kemoto N, Yajima Y. Remarks on normality of Σ -products. *Topology Proc.*, 1994, 19: 161-168.
- 33 Eda K, Gruenhage G, Koszmider P, Tamano K. Sequential fans in topology. *Topology Appl.*, 1995, 67: 189-220.
- 34 van Mill J, Reed G M. Open problems in topology. *Topology Appl.*, 1997, 79: 249-254.
- 35 Cook H, Reed G M. On the non-productivity of normality in Moore spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1999, 127(3): 875-880.
- 36 Rudin M E. A cyclic monotonically normal space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1993, 119: 303-306.
- 37 Collins P J. Monotone normality. *Topology Appl.*, 1996, 74: 179-198.
- 38 Tamano H, Vaughan J E. Paracompactness and elastic spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, 28: 299-303.
- 39 Foged L. Point-countable bases and k -networks. *Topology Appl.*, 1996, 69: 101-114.
- 40 Sakai M. On spaces with a star-countable k -network. *Houston J. Math.*, 1997, 23, 45-56.
- 41 Tkachuk V V. When do connected spaces have nice connected preimages. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1998, 126(1): 3437-3446.
- 42 Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers. *Pacific J. Math.*, 1984, 113: 303-332.
- 43 刘应明. 拓扑学. 自然科学年鉴, 1982: 2.1-2.3.
- 44 刘应明, 蒋继光. 点集拓扑学进展. 自然科学年鉴, 1989: 3.20-3.24.
- 45 Yun Ziqiu(恽自求). Characterizations of metrizable, \aleph - and Lašnev spaces in terms of g -functions. *Math. Japonica*, 1990, 35: 253-261.
- 46 Yun Ziqiu(恽自求). A new characterization of \aleph -spaces. *Topology Proc.*, 1991, 16: 253-256.
- 47 Junnila H J K, Yun Ziqiu(恽自求). \aleph -spaces and spaces with a σ -hereditarily closure-preserving k -network. *Topology Appl.*, 1992, 44: 209-215.
- 48 滕辉. 乘积空间的正规性及相关性 [博士学位论文] 成都: 四川大学, 1990.
- 49 滕辉. 强 Σ 空间的 Σ 积. *科学通报*, 1990, 35: 1448-1450.
- 50 Teng Hui(滕辉). On a problem of Y. Yajima. *Topology Appl.*, 1991, 38: 39-43.
- 51 Tamano K, Teng Hui(滕辉). Normality and covering properties of open sets of uncountable products. *Topology Proc.*, 1993, 18: 313-322.
- 52 Milner E, Wang Shangzhi(王尚志). Metrizable generalized order spaces. *Topology Proc.*, 1992, 17: 181-196.
- 53 Lutzer D J. On generalized ordered spaces. *Dissertations Math.*, 1971, 89.
- 54 Zhong Ning(钟宁). Products with an M_3 -factor. *Topology Appl.*, 1992, 45: 131-144.
- 55 王延庚, 王成堂. 判断 B_r 空间的一般性方法. *数学年刊 A 辑*, 1993, 14: 302-305.
- 56 Liu Chuan(刘川). Spaces with a σ -hereditarily closure-preserving k -network. *Topology Proc.*, 1993, 18: 179-188.
- 57 Liu Chuan(刘川), Dai Mumin(戴牧民). g -metrizable and S_w . *Topology Appl.*, 1994, 60: 185-189.
- 58 刘川. σ 遗传闭包保持 k 网的几个注记. *数学进展*, 1995, 24: 558-560.
- 59 刘川, 戴牧民. 度量空间的紧覆盖 s 象. *数学学报*, 1996, 39(1): 41-44.
- 60 Yang Lecheng(杨乐成). Countable paracompactness of Σ -products. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1994, 122(3): 949-956.
- 61 Liu Chuan(刘川), Tanaka Y. Spaces with a star-countable k -network, and related results. *Topology Appl.*, 1996, 74: 25-38.
- 62 Liu Chuan(刘川), Tanaka Y. Spaces having σ -compact-finite k -networks, and related matters. *Topology Proc.*, 1996, 21: 173-200.
- 63 Liu Chuan(刘川), Tanaka Y. Star-countable k -networks, and quotient images of locally separable metric spaces. *Topology Appl.*, 1998, 82: 317-325.
- 64 Liu Chuan(刘川), Tanaka Y. Star-countable k -networks, compact-countable k -networks, and related results. *Houston J. Math.*, 1998, 24(4): 655-670.
- 65 Feng Xiufeng(冯秀凤), Tamano K. Countably fan-tight subspaces of a countable product of Lašnev spaces are metrizable. *Topology Proc.*, 1997, 22: 191-196.

- 66 Arhangel'skii A, Bella A. Countable fan-tightness versus countable tightness. *Comment Math. Univ. Carolinae*, 1996, 37: 565-576.
- 67 林寿. 关于序列覆盖 s 映射. 数学进展, 1996, 25: 548-551.
- 68 林寿. Michael-Nagami 问题的注记. 数学年刊 A 辑, 1996, 17(1): 9-12.
- 69 Lin Shou(林寿), Liu Chuan(刘川). On spaces with point-countable cs -networks. *Topology Appl.*, 1996, 74: 51-60.
- 70 林寿. Lašnev 空间和 T. Miwa 问题. 数学学报, 1997, 40(4): 585-590.
- 71 Lin Shou(林寿). A note on the Arens' space and sequential fan. *Topology Appl.*, 1997, 81: 185-196.
- 72 Lin Shou(林寿), Liu Chuan(刘川), Dai Mumin(戴牧民). Images on locally separable metric spaces. *Acta Math. Sinica (New Series)*, 1997, 13(1): 1-8.
- 73 Liu Chuan(刘川), Lin Shou(林寿). k -spaces property of product spaces. *Acta Math Sinica (New Series)*, 1997, 13(4): 537-544.
- 74 林寿. 序列网与度量空间的序列商映射. 数学学报, 1999, 42(1): 49-54.
- 75 林寿, 燕鹏飞, 刘川. k 网与 Michael 的两个问题. 数学进展, 1999, 28(2): 143-150.
- 76 燕鹏飞, 林寿. 关于度量空间的紧覆盖 s 映射. 数学学报, 1999, 42(2): 241-244.
- 77 Yan Pengfei(燕鹏飞), Lin Shou(林寿). Point-countable k -networks, cs^* -networks and α_4 -spaces. *Topology Proc.*, 1999, 24: 231-240.
- 78 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射 [博士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2000.
- 79 Lin Shou(林寿), Yan Pengfei(燕鹏飞). Sequence-covering maps of metric spaces. *Topology Appl.*, 2001, 109(3): 301-314.
- 80 林寿, 燕鹏飞. 关于序列覆盖紧映射. 数学学报, 2001, 44(1): 175-182.
- 81 Shi Wei-Xue(师维学). A non-metrizable compact linearly ordered topological space, every subspace of which has a σ -minimal base. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1999, 127: 2783-2791.
- 82 Chen Huaipeng(陈怀鹏). Weak neighborhoods and Michael-Nagami's question. *Houston J. Math.*, 1999, 25(2): 297-309.
- 83 Gao Zhimin(高智民). \aleph -spaces and g -metrizable spaces and CF family. *Topology Appl.*, 1998, 82: 153-159.
- 84 Fitzpatrick Jr B, Zhou Haoxuan(周浩旋). More on topological completions of metrizable spaces. *Topology Proc.*, 1994, 19: 97-110.
- 85 Williams S W, Zhou Haoxuan(周浩旋). Order like structure of monotonically normal spaces. *Comment Math. Univ. Carolinae*, 1998, 39: 207-217.
- 86 Yang Zhongqiang(杨忠强). All cluster points of countable sets in supercompact spaces are the limits of nontrivial sequences. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1994, 122(2): 591-596.
- 87 Chen Huaipeng(陈怀鹏). An answer to a conjecture on the countable products of k -spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995, 123(2): 583-587.
- 88 王延庚. 从局部紧空间到 Banach 空间的函数空间. 数学学报(英文版), 1997, 13(3): 333-336.
- 89 Hou J C(侯吉成). Character and tightness of hyperspaces with the Fell topology. *Topology Appl.*, 1998, 84: 199-206.
- 90 Cao Jiling(曹继岭), Künzi H, Reilly I, Romaguera S. Quasi-uniform hyperspaces of compact subsets. *Topology Appl.*, 1998, 87: 117-126.
- 91 Dow A, Zhou Jinyuan(周金元). On subspaces of pseudoradial spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1999, 127(4): 1221-1230.
- 92 Jiang Shouli(江守礼), Reilly I, Wang Shuquan(王树泉). Some properties of $S(n)$ - θ -closed spaces. *Topology Appl.*, 1999, 96(1): 23-29.
- 93 彭良雪. 一般拓扑学中的几个问题 [博士学位论文]. 北京: 首都师范大学, 2000.

The Theory of Generalized Metric Spaces in the 1990's

Lin Shou

(Dept. of Math., Fujian Teachers University, Fuzhou, Fujian, 350007, P. R. China)

Abstract The theory of generalized metric spaces is an important question of general topology. In this paper a short survey on generalized metric spaces in the 1990's is given, which analyses the main task, cites the major results and some contributions of Chinese topologists on this field.

Key words generalized metric spaces; metric spaces; mappings; product spaces; networks