第 18 卷　第 1 期　2002 年 3 月
福建师范大学学报 (自然科学版)
Journal of Fujian Teachers University (Natural Science)
Vol. 18　No. 1　Mar. 2002

文章编号: 1000-5277(2002)01-0005-03

ωM 空间的分解定理◦

严　力[1], 林　寿[2]

(1. 温哥华社区学院, 温哥华; 2. 福建师范大学数学系, 福建 福州　350007)

摘要: 称空间 X 满足分解定理, 若 $f: X \to Y$ 是连续、满的闭映射, 则存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z 使得对于每一 $y \in Y \setminus Z$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的(可数) 紧子集. 作者纠正了 T. Ishii 关于 ωM 空间分解定理的错误.

关键词: 分解定理; 闭映射; ωM 空间; ωN 空间

中图分类号: O189. 1　　**文献标识码**: A

度量空间的完备映像是度量空间, 但是度量空间的闭映像未必是度量空间. 1965 年 N. Lašnev[1] 证明了如下度量空间闭映像的有趣性质: 设 X 是度量空间, $f: X \to Y$ 是闭映射, 则存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z, 使得对于每一 $y \in Y \setminus Z$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的(可数) 紧子集. 这种类型的定理被称为值域分解定理或闭映射的分解定理. 1980 年 D. Burke[2] 和 1995 年林寿[3] 总结了满足分解定理的一些广义度量空间类. 1970 年 T. Ishii[4] 证明了 ωM 空间满足分解定理. 笔者在文[3] 的命题 3. 6. 16 中引用了 Ishii 的这一结果. 近来发现 Ishii 的证明有错误. 经查阅文献发现早在 1971 年 J. Nagata[5] 就已指出了 Ishii 证明中的错误, 并为探讨更广泛的广义度量空间的分解定理定义了 QSM 空间和 SSM 空间, 证明了 QSM 空间满足分解定理, 指出在 SSM 空间上分解定理也成立. ωM 空间是 SSM 空间, 所以 ωM 空间上分解定理成立. 由于 J. Nagata 并未给出 ωM 空间上分解定理成立的证明, 本文的目的是给出 ωM 空间分解定理的详细证明, 一方面在于纠正文[3] 命题 3. 6. 16 证明中的失误, 另一方面也希望定理的证明对于寻找新的广义度量空间类的分解定理有所帮助.

本文所论空间均满足 T_1 分离性质, 映射指连续的满函数, 未定义的术语和记号见文[3].

对于空间 X 的覆盖 $\mathcal{P}$, X 的点 x 及子集 A, 记 $\mathrm{st}(A, \mathcal{P}) = \cup\{P \in \mathcal{P}: A \cap P \neq \varnothing\}$, $\mathrm{st}(x, \mathcal{P}) = \cup\{P \in \mathcal{P}: x \in P\}$, 且 $\mathrm{st}^2(x, \mathcal{P}) = \mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathcal{P}), \mathcal{P})$. 空间 X 称为 ωM 空间[4], 若存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得对于 X 中的点 x 及序列 $\{x_n\}$, 若每一 $x_n \in \mathrm{st}^2(x, \mathcal{U}_n)$, 则 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点. 上述覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 称为 X 的 ωM 序列.

度量空间的拟完备映射(即, 每一点的逆映像是可数紧子集的闭映射) 的逆映像称为 M 空间. 可数紧空间和度量空间都是 M 空间, M 空间是 ωM 空间.

定理　设 X 是 ωM 空间, $f: X \to Y$ 是闭映射, 则存在 Y 的 σ 闭离散子空间 Z 使得对于每一 $y \in Y \setminus Z$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的可数紧子集.

证明　设 $\{\mathcal{U}_n\}$ 是空间 X 的 ωM 序列, 不妨设每一 $\mathcal{U}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{U}_n$.

先证明若 $\{x_n: n \in N\}$ 是 X 的闭离散子集, 则 $\{\mathrm{st}(x_n, \mathcal{U}_n): n \in N\}$ 是 X 的局部有限子集族. 否则, 存在 $x \in X$, 对于每一 $n \in N$ 有 $i_n \geq n$ 使得 $\mathrm{st}(x, \mathcal{U}_n) \cap \mathrm{st}(x_{i_n}, \mathcal{U}_{i_n}) \neq \varnothing$, 从而 $x_{i_n} \in \mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathcal{U}_n), \mathcal{U}_{i_n}) \subset \mathrm{st}^2(x, \mathcal{U}_n)$, 于是序列 $\{x_{i_n}\}$ 在 X 中有聚点, 矛盾.

对于每一 $n \in N$, 让 $Y_n = \{y \in Y$: 若 S 是 Y 中由互不相同点组成的序列, 则存在 $x \in f^{-1}(y)$ 和 S

◦ 收稿日期: 2001- 08- 01

◦ 基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (19971048), 福建省自然科学基金资助项目 (F00010)

◦ 作者简介: 严　力 (1949—), 女, 浙江温州人, 硕士

的子序列S'使得$\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)\cap f^{-1}(S')^-=\varnothing$. 令$Z=\bigcup_{n\in N}Y_n$.

若存在Y_n不是Y的闭离散子空间,由于f是闭映射,于是集族$\{f^{-1}(y):y\in Y_n\}$不是X的局部有限集族,所以存在$x\in X$使得每一$\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_i)(i\in N)$与无限个$f^{-1}(y)(y\in Y_n)$相交,从而存在$Y$中由互不相同点组成的序列$\{y_i\}$使得每一$\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_i)\cap f^{-1}(y_i)\neq\varnothing$. 因为$y_i\in Y_n$及$Y_n$的定义,由归纳法知存在子序列$\{y_{i_k}\}$和$x_k\in f^{-1}(y_{i_k})$使得每一$\mathrm{st}(x_k,\mathcal{U}_n)\cap(\cup\{f^{-1}(y_{i_m}):m>k\})^-=\varnothing$. 若$c$是序列$\{x_k\}$的聚点,那么对于每一$k\in N$有$c\in(\cup\{f^{-1}(y_{i_m}):m>k\})^-$且存在$x_{k_0}\in\mathrm{st}(c,\mathcal{U}_n)$,于是$c\in\mathrm{st}(x_{k_0},\mathcal{U}_n)$,从而$c\notin(\cup\{f^{-1}(y_{i_m}):m>k\})^-$,矛盾. 因此,$\{x_k:k\in N\}$是$X$的离散子集,而$f$是闭映射,所以$\{y_{i_k}:k\in N\}$是$Y$的离散子集. 设$c_k\in\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_k)\cap f^{-1}(y_{i_k})$,那么$\{c_k:k\in N\}$是$X$的离散子集,且$c_k\in\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_k)\subset\mathrm{st}^2(x,\mathcal{U}_k)$,这与$\{\mathcal{U}_n\}$是空间$X$的$\omega M$序列相矛盾. 故每一$Y_n$是$Y$的闭离散子空间.

现证明对于每一$y\in Y\setminus Z$, $f^{-1}(y)$是X的可数紧子集. 若不然,则存在$f^{-1}(y)$的闭离散子集$\{x_n:n\in N\}$,对于每一$n\in N$,由于$y\notin Y_n$,存在Y中由互不相同点组成的序列$S_n=\{y_i^n\}_i$使得若$x\in f^{-1}(y)$且S_n'是S_n的子序列,则$\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)\cap f^{-1}(S_n')^-\neq\varnothing$. 于是存在自然数$j_n$使得当$j\geq j_n$时有$\mathrm{st}(x_n,\mathcal{U}_n)\cap f^{-1}(y_j^n)\neq\varnothing$且$\mathrm{st}(x_1,\mathcal{U}_n)\cap f^{-1}(y_{j_n}^n)\neq\varnothing$. 不妨设$\{y_{j_n}^n\}$是由互不相同点组成的序列且每一$j_n<j_{n+1}$. 让$a_n\in\mathrm{st}(x_n,\mathcal{U}_n)\cap f^{-1}(y_{j_n}^n)$, $b_n\in\mathrm{st}(x_1,\mathcal{U}_n)\cap f^{-1}(y_{j_n}^n)$. 由于$\{x_n:n\in N\}$是离散的,所以$\{\mathrm{st}(x_n,\mathcal{U}_n):n\in N\}$是局部有限的,从而$\{a_n:n\in N\}$是局部有限的,因此$\{f^{-1}(y_{j_n}^n):n\in N\}$是离散的,于是$\{b_n:n\in N\}$是离散的. 这与$\{\mathcal{U}_n\}$是空间$X$的$\omega M$序列相矛盾. 故$f^{-1}(y)$是$X$的可数紧子集.

下面回忆两个与ωM空间相关的广义度量空间类. 空间X称为$\omega\Delta$空间[6],若存在X的开覆盖序列$\{\mathcal{U}_n\}$使得对于X中的点x及序列$\{x_n\}$,若每一$x_n\in\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)$,则$\{x_n\}$在$X$中有聚点. 空间$(X,\tau)$称为$\omega N$空间[7],若存在函数$g:N\times X\to\tau$满足: (1) 每一$x\in g(n,x)$; (2) 对于$X$中的点$x$及序列$\{x_n\}$,若每一$g(n,x)\cap g(n,x_n)\neq\varnothing$,则$\{x_n\}$在$X$中有聚点.

ωM空间是ωN空间和$\omega\Delta$空间. ωN空间和$\omega\Delta$空间是否满足分解定理?

例 存在ωN空间不满足分解定理.

引用文[8]的例3.1. 设I是单位闭区间$[0,1]$,取$X=I\times I$,让$X_0=I\times\{0\}$, $X_1=I\times(0,1]$. 集合X赋予如下拓扑: X_1中的点是X的孤立点,对于$s\in I$, $(s,0)\in X$的邻域基元形如$V\times I\setminus(\{s\}\times(0,1])$,其中$V$是$s$在$I$中的欧氏邻域. 易验证,$X$是正则空间. 令$f$是从$X$到第一个坐标空间$I$的投影映射,其中$I$赋予欧氏拓扑,则$f$是闭映射,并且对于每一$s\in I$, $f^{-1}(s)$不是X的可数紧子集. 由于I不是σ闭离散集合,所以空间X所具有的性质均不满足分解定理.

X是ωN空间. 对于每一$x=(s,t)\in X$,定义$g:N\times X\to\tau$如下:

$$g(n,x)=\begin{cases}\{x\}, & t>0,\\ ((s-1/n,s+1/n)\cap I)\times I\setminus(\{s\}\times(0,1]), & t=0,\end{cases}$$

这时$\{g(n,x):n\in N\}$是x在X中的邻域基. 对于X中的点x及序列$\{x_n\}$,若每一$g(n,x)\cap g(n,x_n)\neq\varnothing$,如果$x\in X_0$,当有无限个$x_n\in X_1$时,这些$x_n\in g(n,x)$,于是这些$x_n$构成的序列收敛于$x$; 当有无限个$x_n\in X_0$时,在$X_0$中这些$x_n$与$x$的距离小于$2/n$,于是这些$x_n$构成的序列收敛于$x$. 如果$x\in X_1$,当有无限个$x_n\in X_1$时,这些$x_n=x$,于是这些$x_n$构成的序列收敛于$x$; 当有无限个$x_n\in X_0$时,$x=(s,t)\in g(n,x_n)$,于是在$X_0$中这些$x_n$与$(s,0)$的距离小于$1/n$,于是这些$x_n$构成的序列收敛于$(s,0)$. 综上所述,序列$\{x_n\}$在$X$中有聚点,所以$X$是$\omega N$空间.

问题 $\omega\Delta$空间是否满足分解定理?

参考文献:

[1] Lašnev N. Continuous decompositions and closed mappings of metric spaces[J]. Dokl Akad Nauk SSSR, 1965, 165: 756-758.

[2] Burke D. Closed mappings [A]. Surveys in General Topology [C]. New York: Academic Press, 1980. 1- 32.
[3] 林寿. 广义度量空间与映射 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
[4] Ishii T. On ωM-spaces I, II [J]. Proc Japan Acad, 1970, 46: 5- 15.
[5] Nagata J. On closed mappings of generalized metric spaces [J]. Proc Japan Acad, 1971, 47: 181- 184.
[6] Borges C R. On metrizability of topological spaces [J]. Canad J Math., 1968, 20: 795- 804.
[7] Hodel R. Spaces defined by sequences of open covers which guarantee that certain sequences has cluster points [J]. Duke Math. J., 1972, 39: 253- 263.
[8] Chaber J. Generalizations of Lašnev's theorem [J]. Fund Math., 1983, 119: 85- 91.

A Decomposition Theorem on ωM-spaces

YAN Li[1], **LIN Shou**[2]
(1. *Vancouver Community College, Vancouver, Canada*;
2. *Department of Mathematics, Fujian Teachers University, Fuzhou* 350007, *China*)

Abstract: A space X is called satisfying a decomposition theorem, if $f: X \to Y$ is a continuous, onto and closed mapping, then there is a σ-closed discrete subspace Z of Y such that $f^{-1}(y)$ is a (countably) compact subset of X for each $y \in Y \setminus Z$. A gap is corrected about the decomposition theorem of ωM-spaces obtained by T. Ishii

Key words: decomposition theorem; closed mapping; ωM-space; ωN-space

(责任编辑　林　敏)