第45卷第6期 数 学 学 报 Vol.45, No.6
2002年11月 ACTA MATHEMATICA SINICA Nov., 2002

文章编号: 0583-1431(2002)06-1157-08 **文献标识码**: **A**

关于序列覆盖 π 映射

林 寿

(福建师范大学数学系 福建 福州 350007)
(E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn)

周友成

(浙江大学数学系 浙江 杭州 310027)

燕鹏飞

(安徽大学数学系 安徽 合肥 230039)

摘 要 本文利用点星网的概念，讨论了度量空间的 π 映象的性质，建立了度量空间的序列商 π 映象和度量空间的序列覆盖 π 映象的内在特征，分别推广了 Kofner J. A. 和 Tanaka Y. 的一些结果.

关键词 序列覆盖映射； π 映射；序列商映射；点星网； cs* 覆盖； cs 覆盖
MR(2000) 主题分类 54E40, 54E99, 54C10, 54D55
中图分类 O189.1

On Sequence-Covering π-Mappings

Shou LIN

(*Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007, *P. R. China*)
(*E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn*)

You Cheng ZHOU

(*Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *P. R. China*)

Peng Fei YAN

(*Department of Mathematics, Anhui University, Hefei* 230039, *P. R. China*)

Abstract In this paper we use the concept of point-star networks, discuss some properties of π-images of metric spaces, establish the characterizations of sequentially quotient π-images and sequence-covering π-images of metric spaces, and generalize some corresponding results of Kofner J. A. and Tanaka Y.

Keywords Sequence-covering mappings; π-mappings; Sequentially quotient mappings; Point-star networks; cs*-covers; cs-covers
MR(2000) Subject Classification 54E40, 54E99, 54C10, 54D55
Chinese Library Classification O189.1

收稿日期： 2000-10-25; 修改日期： 2001-07-04; 接受日期： 2001-07-05
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (19971048); 福建省自然科学基金资助项目 (F00010)

1960 年, Ponomarev [1] 引入了 π 映射. 1971 年, Siwiec [2] 引入了序列覆盖映射. 1969 年, Kofner [3] 证明了度量空间的商 π 映象刻划了弱 Cauchy 空间. 1991 年, Tanaka [4] 证明了度量空间的序列覆盖的商 π 映象刻划了 Cauchy 空间. 近来的研究也表明 π 映射和序列覆盖映射都是刻划广义度量空间的重要工具 [5–8]. 我们曾在文 [8] 中证明了空间 X 是度量空间的序列覆盖紧映象当且仅当 X 是度量空间的 1 序列覆盖的紧映象. 度量空间上的紧映射是 π 映射. 很自然的问题是: 度量空间的序列覆盖 π 映象是否也是某一度量空间的 1 序列覆盖 π 映象? 本文围绕度量空间的序列覆盖 π 映射及相关映射, 讨论广义度量空间的映射性质, 肯定地回答了上述问题. 它由三部分组成, 一是关于度量空间的序列商的 π 映象, 二是关于度量空间的序列覆盖的 π 映象, 三是上述结果的几点应用.

本文中的空间至少是满足 Hausdorff 分离公理的拓扑空间, 映射是指连续的满函数. N 表示自然数集. 空间 X 的拓扑记为 $\tau(X)$ 或 τ; 对于集合 X 中的一列点 x_n $(n \in N)$, 记

$$\langle x_n \rangle = \{x_n : n \in N\};$$

对于 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 和 $x \in X$, 记

$$(\mathcal{P})_x = \{P \in \mathcal{P} : x \in P\}, \quad \mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}) = \cup(\mathcal{P})_x.$$

未定义的术语以文 [8] 为准.

定义 1 设映射 $f : X \to Y$.

(1) f 称为序列覆盖映射 [2], 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列, 那么存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

(2) 设 (X, d) 是度量空间, f 称为 π 映射 [1], 如果对于每一 $y \in U \in \tau(Y)$, 有 $d(f^{-1}(y), X \backslash f^{-1}(U)) > 0$.

$f : X \to Y$ 称为紧映射, 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集. 显然, 定义于度量空间上的紧映射是 π 映射.

为刻划度量空间序列覆盖的 π 映象, 文 [8] 引入规范性术语 "点星网" 是一个恰当的概念.

定义 2 设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in N\}$ 是空间 X 的子集族, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的覆盖. $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的点星网, 若对于每一 $x \in X$, $\langle \mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}_n) \rangle$ 是 x 在 X 中的网. 若 X 的点星网 $\{\mathcal{P}_n\}$, 使得每一 $\mathcal{P}_n$ 具有某性质 C, 则 $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的 C 点星网.

具有开点星网的空间称为可展空间. 显然, $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的点星网当且仅当对于每一 $x \in X$ 和任意取定的 $P_n \in (\mathcal{P}_n)_x$, $\langle P_n \rangle$ 是 x 在 X 中的网.

点星网与 π 映射都是非常一般的概念. 一方面, 对于任一空间 X 和 $n \in N$, 令 $\mathcal{P}_n = \{\{x\} : x \in X\}$, 那么 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点星网. 另一方面, 任一空间都是离散度量空间的 π 映象. 所以, 探讨点星网与度量空间的 π 映象性质, 必须对点星网中的覆盖列及度量空间上的 π 映射附加适当的条件. 回忆两个与收敛序列相关的概念. 设 X 是一个空间且 P 是 X 的子集. 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 称 $\{x_n\}$ 是终于 P 的, 如果存在 $m \in N$, 使得

$$\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P,$$

P 称为 X 中的点 x 的序列邻域 [9], 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 是终于 P 的.

定义 3 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs* 覆盖, 若 S 是 X 中的收敛序列, 则存在 S 的某子序列是终于 $\mathcal{P}$ 中的某元.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 覆盖, 若 X 中的每一收敛序列是终于 $\mathcal{P}$ 中的某元.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 sn 覆盖 [8], 若 $\mathcal{P}$ 中的每一元是 X 中某点的序列邻域且对于任意的 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的序列邻域 $P \in \mathcal{P}$.

术语 cs* 覆盖和 cs 覆盖在文 [4] 中分别称为条件 $(\mathrm{D}')^*$ 和 $(\mathrm{D})^*$, 在文 [5] 中分别称为条件 (c_2) 和 (c_3). 这里定义的术语分别出现在文 [10] 和 [11] 中.

定义 4 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为序列商映射 [12], 若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列, 那么存在 $\{y_n\}$ 的子序列 $\{y_{n_i}\}$ 和 X 中的收敛序列 $\{x_i\}$, 使得每一 $x_i \in f^{-1}(y_{n_i})$.

(2) f 称为伪序列覆盖映射 [5,13], 若 Y 中的任一 (含极限点的) 收敛序列是 X 中某紧子集在 f 下的象.

(3) f 称为 1 序列覆盖映射 [14], 若对于每一 $y \in Y$ 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足条件: 如果 $\{y_n\}$ 是 Y 中收敛于 y 的序列, 那么存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$.

显然, 1 序列覆盖映射是序列覆盖映射, 序列覆盖映射是伪序列覆盖映射和序列商映射, 并且度量空间上的伪序列覆盖映射是序列商映射.

本文的第一部分讨论度量空间的序列商的 π 映象.

设 $\{\mathcal{P}_i\}$ 是空间 X 的点星网. 对于每一 $i \in N$, 记 $\mathcal{P}_i = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda_i\}$, Λ_i 赋予离散拓扑, 令 $M = \{\alpha = (\alpha_i) \in \prod_{i\in N} \Lambda_i : \langle P_{\alpha_i}\rangle$ 构成 X 中某点 x_α 的网$\}$, 则 M 是度量空间, 并且对于每一 $\alpha \in M$, x_α 是唯一确定的, 于是可以定义函数 $f: M \to X$, 使得 $f(\alpha) = x_\alpha$. 我们称 $(f, M, X, \mathcal{P}_i)$ 为 Ponomarev 系.

引理 设 $(f, M, X, \mathcal{P}_i)$ 是 Ponomarev 系, 则存在 M 上的度量 d, 使得 f 是 π 映射.

证明 对于每一 $x \in X$ 和 $i \in N$, 存在 $\alpha_i \in \Lambda_i$, 使得 $x \in \mathcal{P}_{\alpha_i}$. 由于 $\{\mathcal{P}_i\}$ 是 X 的点星网, 所以 $\langle P_{\alpha_i}\rangle$ 是 x 在 X 中的网. 令 $\alpha = (\alpha_i)$, 则 $\alpha \in M$ 且 $f(\alpha) = x$, 故 f 是满函数. 设

$$\alpha = (\alpha_i) \in M, \quad f(\alpha) = x \in U \in \tau(X),$$

则存在 $n \in N$, 使得 $P_{\alpha_n} \subset U$. 令 $V = \{\beta \in M : \beta$ 的第 n 个坐标为 $\alpha_n\}$, 那么 V 是 M 中含 α 的开子集且 $f(V) \subset P_{\alpha_n} \subset U$, 故 f 是连续函数.

对于每一 $k \in N$, 让 $\pi_k : \prod_{i\in N} \Lambda_i \to \Lambda_k$ 是投影映射. 对于每一 $\alpha, \beta \in M$, 定义

$$d(\alpha,\beta) = \begin{cases} 0, & \alpha = \beta, \\ \max\{1/k : \pi_k(\alpha) \neq \pi_k(\beta)\}, & \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

则 d 是 M 上的距离. 由于 M 的拓扑是由离散空间族 $\langle \Lambda_i\rangle$ 的积空间所诱导的子空间拓扑, 于是 d 是 M 上的度量. 对于每一 $x \in U \in \tau(X)$, 存在 $n \in N$, 使得 $\mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}_n) \subset U$. 对于 $\alpha \in f^{-1}(x)$, $\beta \in M$, 若 $d(\alpha,\beta) < 1/n$, 那么当 $i \le n$ 时, 有 $\pi_i(\alpha) = \pi_i(\beta)$. 于是 $x \in P_{\pi_n(\alpha)} = P_{\pi_n(\beta)}$, 从而

$$f(\beta) \in \bigcap_{i\in N} P_{\pi_i(\beta)} \subset P_{\pi_n(\beta)} \subset U.$$

因此

$$d(f^{-1}(x), M\backslash f^{-1}(U)) \geq 1/n,$$

故 f 是 π 映射.

定理 1 空间 X 是度量空间的序列商的 π 映象当且仅当 X 具有 cs* 覆盖的点星网.

证明 设 (M,d) 是度量空间, $f:M\to X$ 是序列商的 π 映射. 对于每一 $n\in N$, 令 $\mathcal{P}_n=\{f(B(z,1/n)):z\in M\}$, 其中 $B(z,1/n)=\{y\in M:d(z,y)<1/n\}$, 那么 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的点星网. 事实上, 对于每一 $x\in U\in\tau(X)$, 存在 $n\in N$, 使得 $d(f^{-1}(x), M\backslash f^{-1}(U))>1/n$. 取定自然数 $m\geq 2n$. 若 $z\in M$, 使得 $x\in f(B(z,1/m))$, 那么

$$f^{-1}(x)\cap B(z,1/m)\neq\emptyset.$$

如果 $B(z,1/m)\not\subset f^{-1}(U)$, 则

$$d(f^{-1}(x), M\backslash f^{-1}(U))<2/m\leq 1/n.$$

矛盾. 因此 $B(z,1/m)\subset f^{-1}(U)$, 从而 $f(B(z,1/m))\subset U$, 所以 $\mathrm{st}\,(x,\mathcal{P}_m)\subset U$, 故 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点星网. 又由于 f 是序列商映射, 显然 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的 cs* 覆盖.

反之, 设 $\{\mathcal{P}_i\}$ 是空间 X 的 cs* 覆盖的点星网. 对于每一 $i\in N$, 记 $\mathcal{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda_i\}$. 让 $(f,M,X,\mathcal{P}_i)$ 为 Ponomarev 系. 由引理, $f:M\to X$ 是 π 映射. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于点 x_0 的序列. 不妨设所有的 $x_n\neq x_0$. 由于 $\mathcal{P}_1$ 是 X 的 cs* 覆盖, 存在 $\{x_n\}$ 的子序列 T_1 和 $\alpha_1\in\Lambda_1$, 使得 T_1 是终于 P_{α_1} 的. 由归纳法, 对于每一 $i\in N$, 可选取序列 T_i 和 $\alpha_i\in\Lambda_i$, 使得 T_{i+1} 是 T_i 的子序列且 T_i 是终于 P_{α_i} 的, 于是 $T_i\subset\bigcap_{k\leq i}P_{\alpha_k}$. 取定 $x_{n_i}\in T_i$ 和 $\beta_i\in f^{-1}(x_{n_i})$, 使得 $n_i<n_{i+1}$ 且当 $k\leq i$ 时, 有 $\pi_k(\beta_i)=\alpha_i$, 从而

$$\lim_{i\to\infty}\pi_k(\beta_i)=\alpha_k.$$

令 $\beta_0=(\alpha_i)$, 那么在 M 中序列 $\{\beta_i\}$ 收敛于 β_0, 故 f 是序列商映射.

关于定理 1, 有下述问题.

问题 1 具有 cs* 覆盖点星网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖的 π 映象？

上述问题的部分回答是附加 s 映射的条件. 设映射 $f:X\to Y$. f 称为 s 映射, 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的可分子集.

定理 2 空间 X 是度量空间的伪序列覆盖的 s,π 映象当且仅当 X 具有可数 cs* 覆盖的点星网.

证明 设 $f:M\to X$ 是伪序列覆盖的 s,π 映射, 其中 (M,d) 是度量空间. 对于每一 $i\in N$, 设 $\mathcal{B}_i$ 是 $\{B(z,1/i):z\in M\}$ 的局部有限开加细, 让 $\mathcal{P}_i=\{f(B):B\in\mathcal{B}_i\}$. 由定理 1 所证, $\{\mathcal{P}_i\}$ 是 X 的点可数 cs* 覆盖的点星网.

反之, 设 $\{\mathcal{P}_i\}$ 是空间 X 的点可数 cs* 覆盖的点星网. 对于每一 $i\in N$, 记 $\mathcal{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda_i\}$. 让 $(f,M,X,\mathcal{P}_i)$ 为 Ponomarev 系, 由引理, $f:M\to X$ 是 π 映射. 对于每一 $x\in X$ 和 $i\in N$, 置 $\Delta_i=\{\alpha\in\Lambda_i:x\in P_\alpha\}$, 那么 $\prod_{i\in N}\Delta_i$ 是 $\prod_{i\in N}\Lambda_i$ 的可分子集. 如果 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Delta_i$,

那么 $\langle P_{\alpha_i}\rangle$ 是 x 在 X 中的网, 所以 $\alpha \in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 故 $\prod_{i\in N}\Delta_i \subset f^{-1}(x)$. 如果 $\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$, 那么 $x\in\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i}$, 于是 $\alpha\in\prod_{i\in N}\Delta_i$, 故 $f^{-1}(x)\subset\prod_{i\in N}\Delta_i$. 因此

$$f^{-1}(x)=\prod_{i\in N}\Delta_i.$$

即 f 是 s 映射. 往证 f 是伪序列覆盖映射.

对于每一 $x\in X$ 及 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 记 $K=\{x\}\cup\{x_n : n\in N\}$. 对于每一 $i\in N$, 由于 $\mathcal{P}_i$ 是 X 的点可数的 cs* 覆盖, 令 $(\mathcal{P}_i)_x=\langle P_m\rangle$. 若对于每一 $k\in N$, 序列 $\{x_n\}$ 是不终于 $\bigcup_{m\le k}P_m$ 的, 则存在子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使得每一 $x_{n_k}\in X\backslash\bigcup_{m\le k}P_m$, 从而有 $\{x_{n_k}\}$ 的子序列 $\{x_{n_{k(j)}}\}$ 和 $m\in N$, 使得 $\langle x_{n_{k(j)}}\rangle\subset P_m$. 矛盾. 因此存在 $k\in N$, 使得 $\{x_n\}$ 是终于 $\bigcup_{m\le k}P_m$ 的. 即存在 $(\mathcal{P}_i)_x$ 的有限子集 $\mathcal{F}_i$, 使得 $\{x_n\}$ 是终于 $\cup\mathcal{F}_i$ 的. 选取 $\mathcal{P}_i$ 的有限子集 $\mathcal{G}_i$, 使得 $K\backslash\cup\mathcal{F}_i\subset\cup\mathcal{G}_i$. 令 $\mathcal{H}_i=\mathcal{F}_i\cup\mathcal{G}_i$, 则存在 Λ_i 的有限子集 Γ_i, 使得 $\mathcal{H}_i=\{P_\alpha : \alpha\in\Gamma_i\}$. 对于每一 $\alpha\in\Gamma_i$, 取

$$K_a=\begin{cases} K\cap P_\alpha, & x\in P_\alpha,\\ (K\backslash\cup\mathcal{F}_i)\cap P_\alpha, & x\notin P_\alpha,\end{cases}$$

则 $\{K_\alpha : \alpha\in\Gamma_i\}$ 为紧子集族, 且 $K=\bigcup_{\alpha\in\Gamma_i}K_\alpha$. 置

$$L=\Big\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i : \bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}\neq\emptyset\Big\},$$

则

(1) L 是紧集 $\prod_{i\in N}\Gamma_i$ 的闭子集, 从而 L 是 $\prod_{i\in N}\Lambda_i$ 中的紧子集. 设 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i\backslash L$, 则 $\bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}=\emptyset$, 从而存在 $i_0\in N$, 使得 $\bigcap_{i\le i_0}K_{\alpha_i}=\emptyset$. 令

$$W=\Big\{(\beta_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i:\ \text{对于}\ i\le i_0,\ \text{有}\ \beta_i=\alpha_i\Big\},$$

则 W 是 $\prod_{i\in N}\Gamma_i$ 中含有点 α 的开子集且 $W\cap L=\emptyset$.

(2) $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$. 设 $\alpha=(\alpha_i)\in L$, 则 $\bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}\neq\emptyset$. 取 $y\in\bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}$, 则 $y\in\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i}$, 故 $\langle P_{\alpha_i}\rangle$ 是 y 在 X 中的网, 所以 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=y\in K$, 从而 $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

(3) $K\subset f(L)$. 对于任一 $y\in K$ 及 $i\in N$, 取 $\alpha_i\in\Gamma_i$, 使得 $y\in K_{\alpha_i}$. 令 $\alpha=(\alpha_i)$, 则 $\alpha\in L$ 且 $f(\alpha)=y$, 因此 $K\subset f(L)$.

综上所述, f 是伪序列覆盖映射.

本文的第二部分讨论度量空间的序列覆盖的 π 映象.

回忆对称度量空间的概念. 对于集合 X, 设 $d: X\times X\to[0,\infty)$. d 称为 X 上的对称距离, 若对于任意的 $x,y\in X$, 有

(1) $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;

(2) $d(x,y)=d(y,x)$.

对于 $x\in X$ 和 $\varepsilon>0$, 置 $B(x,\varepsilon)=\{y\in X : d(x,y)<\varepsilon\}$. 空间 (X,d) 称为对称度量空间, 若 d

是 X 上的对称距离，且 X 的子集 U 是 X 的开子集当且仅当对于每一 $x \in U$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset U$.

空间 X 称为序列空间 [9], 若 X 的子集 U 是 X 的开子集当且仅当对于每一 $x \in U$, U 是 x 的序列邻域. 显然，对称度量空间是序列空间 (见文 [15] 命题 1.6.15).

下述定理肯定地回答了本文开头提出的问题.

定理 3 对于空间 X, 下述条件相互等价：

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖 π 映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖 π 映象.

(3) X 具有 cs 覆盖的点星网.

(4) X 具有 sn 覆盖的点星网.

证明 (1)⇒(2) 是显然的. (2)⇒(3) 类似定理 1 的证明.

(3)⇒(4) 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的 cs 覆盖的点星网，不妨设每一 $\mathcal{P}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}_n$. 对于 X 中互不相同的两点 x, y, 以 $n(x,y)$ 表示，使得 $x \notin \mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}_n)$ 的最小整数 n. 定义 $d: X \times X \to [0, \infty)$, 使得

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 2^{-n(x,y)}, & x \neq y, \end{cases}$$

则 d 是 X 上的对称距离且对于每一 $x \in X$, $n \in N$, 有 $\mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}_n) = B(x, 1/2^n)$. 这时 d 具有性质：对于任一 $x \in X$ 和 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $\delta = \delta(x, \varepsilon)$, 使得当 $d(x,y) < \delta$ 且 $d(x,z) < \delta$ 时，有 $d(y,z) < \varepsilon$. 否则，存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和序列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$, 使得每一 $d(x, y_n) < 1/2^n$, $d(x, z_n) < 1/2^n$ 且 $d(y_n, z_n) \geq \varepsilon_0$. 选取 $k \in N$, 使得 $1/2^k < \varepsilon_0$. 由于 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点星网，所以序列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 都收敛于 x. 又由于 $\mathcal{P}_k$ 是 X 的 cs 覆盖，存在 $m \in N$ 和 $P \in \mathcal{P}_k$, 使得 $\{y_m, z_m\} \subset P$, 于是 $z_m = \mathrm{st}\,(y_m, \mathcal{P}_k)$, 从而 $d(y_m, z_m) < 1/2^k < \varepsilon_0$. 矛盾. 因此，对于任一 $x \in X$ 和 $n \in N$, 可以选取正数 $\delta = \delta(x, n)$, 使得当 $d(x,y) < \delta$ 且 $d(x,z) < \delta$ 时，有 $d(y,z) < 1/n$, 让 $g(x,n) = B(x, \delta(x,n))$. 由于 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs 覆盖，于是 $\mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}_n)$ 是 x 的序列邻域，从而 $g(n,x)$ 也是 x 的序列邻域. 令 $\mathcal{U}_n = \{g(n,x) : x \in X\}$, 则 $\mathcal{U}_n$ 是 X 的 sn 覆盖. 若 $\{\mathcal{U}_n\}$ 不是 X 的点星网，则存在 $x \in G \in \tau(X)$ 和 X 中的序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 使得 $x \in g(n, y_n)$, $x_n \in g(n, y_n) \backslash G$, 那么序列 $\{x_n\}$ 不收敛于 x 且

$$d(y_n, x) < \delta(y_n, n), \quad d(y_n, x_n) < \delta(y_n, n),$$

于是

$$d(x, x_n) < 1/n,$$

从而 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 矛盾. 故 X 具有 sn 覆盖的点星网.

(4)⇒(1) 设 $\{\mathcal{P}_i\}$ 是空间 X 的 sn 覆盖的点星网. 对于每一 $i \in N$, 记 $\mathcal{P}_i = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda_i\}$. 让 $(f, M, X, \mathcal{P}_i)$ 为 Ponomarev 系，由引理，$f: M \to X$ 是 π 映射. 设 $x_0 \in X$. 对于每一 $i \in N$, 选取 $\alpha_i \in \Lambda_i$, 使得 P_{α_i} 是 x_0 的序列邻域，则 $\langle P_{\alpha_i} \rangle$ 是 x_0 在 X 中的网. 令 $\beta = (\alpha_i) \in \prod_{i \in N} \Lambda_i$, 那么 $\beta \in f^{-1}(x_0)$. 让 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x_0 的序列. 对于每一 $i \in N$, $\{x_n\}$ 是终于 P_{α_i} 的. 对于每一 $n \in N$, 如果 $x_n \in P_{\alpha_i}$, 定义 $\alpha_{in} = \alpha$, 如果 $x_n \notin P_{\alpha_i}$, 取定 $\alpha_{in} \in \Lambda_i$, 使得 $x_n \in P_{\alpha_{in}}$. 从而存在 $n_i \in N$, 使得当 $n > n_i$ 时，有 $\alpha_{in} = \alpha_i$, 于是在 Λ_i 中序列 $\{\alpha_{in}\}$ 收敛于 α_i. 对于每

一 $n \in N$, 置

$$\beta_n = (\alpha_{in}) \in \prod_{i \in N} \Lambda_i,$$

那么 $f(\beta_n) = x_n$ 且在 M 中序列 $\{\beta_n\}$ 收敛于 β, 故 f 是 1 序列覆盖映射.

文 [7] 证明了度量空间上的序列覆盖紧映射是 1 序列覆盖映射，关于定理 3, 有下述问题.

问题 2 度量空间上的序列覆盖 π 映射是否是 1 序列覆盖映射？

本文的最后给出几个推论和例子.

定义 5 设 (X, d) 是对称度量空间. X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为 d-Cauchy 序列，若对于每一 $\varepsilon > 0$, 存在 $k \in N$, 使得当 $m, n \geq k$ 时，有 $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. X 称为 Cauchy 空间 [16], 若 X 具有对称度量 d, 使得 X 中的每一收敛序列是 d-Cauchy 序列. X 称为弱 Cauchy 空间 [17], 若 X 具有对称度量 d, 使得 X 中的每一收敛序列有子序列是 d-Cauchy 序列.

易验证，对于对称度量空间 (X, d), 若 $\{x_n\}$ 是 X 的收敛序列，那么，$\{x_n\}$ 有子序列是 d-Cauchy 序列当且仅当对于每一 $\varepsilon > 0$, 存在子序列 $\{x_{n_i}\}$, 使得所有的 $d(x_{n_i}, x_{n_j}) < \varepsilon$.

推论 1[3−5] 对于空间 X, 下述条件相互等价：

(1) X 是度量空间的商 π 映象.

(2) X 是具有 cs* 覆盖的点星网的序列空间.

(3) X 是弱 Cauchy 空间.

证明 (1)⇒(2) 设空间 X 是度量空间的商 π 映象. 由于商映射保持序列空间性质 (见文 [15] 命题 2.3.1), 所以 X 是序列空间. 又由于序列空间上的商映射是序列商映射 (见文 [15] 命题 2.1.6), 由定理 1, X 具有 cs* 覆盖的点星网.

(2)⇒(3) 设 X 是具有 cs* 覆盖的点星网的序列空间，让 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的 cs* 覆盖的点星网，不妨设每一 $\mathcal{P}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}_n$. 由于 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs* 覆盖，于是对于每一 $x \in X$ 和 $n \in N$, $\mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}_n)$ 是 x 的序列邻域. 如定理 3 中的 (3)⇒(4) 的证明，可以定义 X 上的对称距离 d, 使得对于每一 $x \in X$ 和 $n \in N$, 有 $\mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}_n) = B(x, 1/2^n)$, 于是 (X, d) 是对称度量空间. 对于 X 中的任一收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 及 $\varepsilon > 0$, 存在 $k \in N$, 使得 $1/2^k < \varepsilon$, 由于 $\mathcal{P}_k$ 是 X 的 cs* 覆盖，存在子序列 $\{x_{n_i}\}$ 是终于 $\mathcal{P}_k$ 中的某元 P, 从而每一 $d(x_{n_i}, x_{n_j}) < 1/2^k < \varepsilon$, 故 $\{x_n\}$ 有子序列是 d-Cauchy 序列，所以 X 是弱 Cauchy 空间.

(3)⇒(2) 设对称度量空间 (X, d) 是弱 Cauchy 空间. 显然，X 是序列空间. 对于每一 $n \in N$, 置

$$\mathcal{P}_n = \{A \subset X : \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} < 1/n\},$$

则对于每一 $x \in X$, 有 $\mathrm{st}\,(x, \mathcal{P}_n) = B(x, 1/n)$, 从而 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点星网. 对于每一 $n \in N$ 及 X 中任一收敛于 x 的序列 $\{x_k\}$, 存在子序列 $\{x_{k_i}\}$ 是 d-Cauchy 序列且所有的 $d(x, x_{k_i}) < 1/(n+1)$. 于是存在 $m \in N$, 使得当 $i, j \geq m$ 时，有 $d(x_{k_i}, x_{k_j}) < 1/(n+1)$. 令

$$A_n = \{x\} \cup \{x_{k_i} : i \geq m\},$$

那么 $A_n \in \mathcal{P}_n$, 从而 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs* 覆盖.

(2)⇒(1) 设空间 X 是具有 cs* 覆盖的点星网的序列空间, 由定理 1, X 是度量空间的序列商的 π 映象. 由于映满序列空间的序列商映射是商映射 (见文 [15] 命题 2.1.6), 所以 X 是度量空间的商 π 映象.

推论 2 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 π 映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的商 π 映象.

(3) X 是具有 cs 覆盖的点星网的序列空间.

(4) X 是 Cauchy 空间.

证明 由定理 3 的推论 1 知 (1)⇔(2)⇔(3). 类似推论 1 中的 (2)⇔(3) 的证明, 有 (3)⇔(4).

文 [4] 证明了推论 2 中的 (2)⇔(3)⇔(4). 上述几个结果说明了度量空间的确定 π 映象是由具有特定性质的点星网所刻划的, 而这些点星网的空间是一些对称度量空间类, 它们之间有如下的蕴涵关系: 可展空间 ⇒ Cauchy 空间 ⇒ 弱 Cauchy 空间 ⇒ 对称度量空间.

例 (1) 对称度量空间 $\not\Rightarrow$ 弱 Cauchy 空间. 如文 [15] 的例 2.9.8.

(2) 弱 Cauchy 空间 $\not\Rightarrow$ Cauchy 空间. 如文 [4] 的例 2.14(3).

(3) Cauchy 空间 $\not\Rightarrow$ 可展空间. 如文 [15] 的例 1.8.6.

(4) 可展空间 $\not\Rightarrow$ 度量空间的商 s 映象. 如文 [15] 的例 1.8.4.

参 考 文 献

[1] Ponomarev V. I., Axioms of countability and continuous mappings, *Bull. Pol. Acad. Math.*, 1960, **8**: 127–133 (in Russian).
[2] Siwiec F., Sequence-covering and countably Bi-quotient mappings, *General Topology Appl.*, 1971, **1**: 143–154.
[3] Kofner J. A., On a new class of spaces and some problems of symmetrizable theory, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1969, **187**: 270–273 (*Soviet Math. Dokl.*, 1969, **10**: 845–848).
[4] Tanaka Y., Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces, *Math. Japonica*, 1991, **36**: 71–84.
[5] Ikeda Y., Liu C., Tanaka Y., Quotient compact images of metric spaces, and related matters, *Topology Appl.*, 2002, to appear.
[6] Ikeda Y., σ-strong networks, and quotient compact images of metric spaces, *Questions Answers in General Topology*, 1999, **17**: 269–279.
[7] Lin S., Yan P. F., Sequence-covering maps of metric spaces, *Topology Appl.*, 2001, **109**(3): 301–314.
[8] Lin S., Yan P. F., On sequence-covering compact mappings, *Acta Math. Sinica*, 2001, **44**(1): 175–182 (in Chinese).
[9] Franklin S. P., Spaces in which sequences suffice, *Fund. Math.*, 1965, **57**: 107–115.
[10] Lin J. J., Cai W. Y., Notes on sequence-covering s-mappings, *Acta Math. Sinica*, 2000, **43**(4): 757–762 (in Chinese).
[11] Yan P. F., On strong sequence-covering compact mappings, *Northeastern Math. J.*, 1998, **14**(3): 341–344.
[12] Boone J. R., Siwiec F., Sequentially quotient mappings, *Czech. Math. J.*, 1976, **26**: 174–182.
[13] Gruenhage G., Michael E. A., Tanaka Y., Spaces determined by point-coutable covers, *Pacific J. Math.*, 1984, **113**: 303–332.
[14] Lin S., On sequence-covering s-mappings, *Adv. Math. China*, 1996, **25**: 548–551 (in Chinese).
[15] Lin S., Generalized Metric Spaces and Mappings, Beijing: Science Press, 1995 (in Chinese).
[16] Alexandroff P. S., Niemytzki V., The condition of metrizability of topological spaces and the axiom of symmetry, *Mat. Sb.*, 1938, **3**: 663–672 (in Russian).
[17] Arhangel'skii A. V., Behavior of metrizability under factor mappings, *Soviet. Math. Dokl.*, 1965, **6**: 1187–1190.