数 学 年 刊
22A:6(2001),707-714.

关于 D. Burke 和 E. Michael 的一个定理***

林 寿* 燕鹏飞**

提 要

本文借助 Burke-Michael 条件引入两种集族性质，分析了它们与 $cs*$ 网和 $wcs*$ 网的关系，肯定地回答了 1996 年刘川和 Y. Tanaka 在 Topology Proceedings 上提出的下述问题：若具有 σ 点有限 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω，那么 X 是否是 gf 可数空间？

关键词 点可数覆盖， $cs*$ 网， $wcs*$ 网， S_ω, gf 可数空间
MR (2000) 主题分类 54E99, 54D55
中图法分类 O189.1 **文献标识码** A
文章编号 1000-8314(2001)06-0707-08

拓扑空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为点可数的，如果 X 的每一点至多属于 $\mathcal{P}$ 中可数个元. 具有点可数基的空间是重要的广义度量空间类 [1,2]. 它的一种推广形式是如下的 Burke-Michael 条件 [3]: X 有点可数覆盖 $\mathcal{P}$, 使得如果对于 X 的任一开集 U 及 $x \in U$, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{F}$ 有

$$x \in (\cup\mathcal{F})^0 \subset \cup\mathcal{F} \subset U \quad 且 \quad x \in \cap\mathcal{F},$$

其优点之一在于放宽了点可数覆盖中的元素是空间中开集的要求，因为这种要求在大多数性质即使是较好的映射下仍是不保持的．但映射的方法已被认为是处理空间关系的基本工具． 1969 年 Filippov[4] 通过极其复杂的构造证明了“可数双商 s 映射保持具有点可数基的空间”. 1972 年 Burke 和 Michael[5] 却以另一种方式较容易地证明了“可数双商 s 映射保持具有点可数基的空间”. 其精彩与重要之处在于 Burke 和 Michael 借助上述的点可数覆盖性质获得了点可数基空间的一个等价刻画，利用点可数基空间在可数双商 s 映射下的象空间具有这种的点可数覆盖性质得到了 Filippov 定理的优美的证明，笔者所见到的近年来出版的几本拓扑学著作中关于 Filippov 定理的证明无一不是引述 Burke 和 Michael 的方法. 这种用确定的点可数覆盖来刻画广义度量空间类，进而研究它们拓扑性质的方法已成为近年来点集拓扑学的活跃方向之一，无论是在传统经典的课题还是在一些交叉新颖的研究方向上，如度量化问题、 CW 复形的广义度量条件、拓扑群的因子分解和函数空间拓扑等方面，均可找到适当的应用.

本文 2000 年 6 月 12 日收到， 2000 年 11 月 3 日收到修改稿.
*福建师范大学数学系，福州 350007. **E-mail:** linshou@public.ndptt.fj.cn
**安徽大学数学系，合肥 230039.
***国家自然科学基金 (No. 19971048) 和福建省自然科学基金 (No. F00010) 资助的项目.

虽然 Burke-Michael 条件放低了对空间中点可数覆盖中元素开集条件的要求，但在讨论映射定理时，若缺少了空间中适当的弱第一可数条件，要达到 Burke-Michael 条件中有限并的开邻域性质也是有困难的．如刘川与 Y. Tanaka[6] 提出问题：若具有 σ 点有限 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω, 那么 X 是否是 gf 可数空间？我们注意到 Burke-Michael 条件中的集族性质与刘川和 Tanaka 问题中的集族性质 "k 网" 都蕴含了 "$wcs*$ 网" 这一集族性质．本文旨在继续这方面的探索，试图利用更一般的 "序列邻域" 来代替 Burke-Michael 条件中的 "开邻域" 条件，获得了这种新条件与近年来备受关注的 $wcs*$ 网之间的精确联系，同时借助 Nogura 和 Shibakov[7] 的局部正则化技巧减弱了空间对正则分离性的要求，将过去所获得的在点可数覆盖方向上关于弱基，cs 网，k 网和 $cs*$ 网等的一些重要结果统一到 $wcs*$ 网上，得到了刘川和 Tanaka 问题的一个正面回答.

先引进几个概念与记号．本文所论空间都是满足 T_2 分离性公理的拓扑空间，τ 表示空间 X 的拓扑，N 表示自然数集，对于集合 X 的子集族 $\mathcal{P}$, 记 $\mathcal{P}^{<\omega} = \{\mathcal{F} \subset \mathcal{P} : \mathcal{F}$ 是有限的 $\}$, 未定义的术语可参考文献 [8].

定义 1[9] 设 X 是一个空间.

(1) 对于 $P \subset X$, 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 称 $\{x_n\}$ 是终于 P 的，如果存在 $m \in N$, 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\} \subset P$; P 称为 X 中的点 x 的序列邻域，若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 是终于 P 的；P 称为 X 的序列开集，若 P 是 P 中每一点的序列邻域.

(2) X 称为序列空间, 若 X 的每一序列开集是 X 的开集；X 称为 k 空间, 若 $A \subset X$, 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K \cap A$ 是 K 的闭子集，则 A 是 X 的闭子集.

每一拓扑空间 (X, τ) 可重新定义一拓扑 $\sigma_\tau : O \in \sigma_\tau$ 当且仅当 O 是 (X, τ) 的序列开集．空间 (X, σ_τ) 称为空间 (X, τ) 的序列闭包拓扑空间，简记为 σX[10]. 显然，σX 是序列空间，X 和 σX 有相同的收敛序列．对于空间 X 的子集族 $\mathcal{F}$, 令 $\mathrm{int}_s(\mathcal{F}) = \{x : \cup\mathcal{F}$ 是点 x 在 X 中的序列邻域 $\}$. 对于 $A \subset X$, X 的子集族 $\mathcal{F}$ 称为 A 的序列邻域，如果 $A \subset \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})$, 即 $\cup\mathcal{F}$ 是 A 中每一点在 X 中的序列邻域．$\mathcal{F}$ 称为 A 的极小序列邻域，若 $\mathcal{F}$ 是 A 的序列邻域，且对于每一 $F \in \mathcal{F}$,

$$A \not\subset \mathrm{int}_s(\cup(\mathcal{F} \backslash \{F\})).$$

下面两个定义引出了与 Burke-Michael 条件相关的几个集族性质，其中条件 (A) 和 (B) 是在文 [11] 中定义的.

定义 2[8,11] 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网，若对于 X 中的每个紧子集 K 及 X 中包含 K 的开集 V, 存在 $\mathcal{P}' \in \mathcal{P}^{<\omega}$, 使得 $K \subset \cup\mathcal{P}' \subset V$.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网，若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得序列 $\{x_n\}$ 是终于 P 的且 $P \subset V$.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 $cs*$ 网，若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得序列 $\{x_n\}$ 的某子序列是终于 P 的且 $P \subset V$.

(4) $\mathcal{P}$ 是 X 的 $wcs*$ 网，如果 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列且 $x \in U \in \tau$, 则存在

$P \in \mathcal{P}$ 和 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$, 使得

$$\{x_{n_i} : i \in N\} \subset P \subset U.$$

(5) 称 $\mathcal{P}$ 具有 (A), 如果 $x \in U \in \tau$, 则存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$, 使得

$$x \in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F}) \subset \cup\mathcal{F} \subset U.$$

(6) 称 $\mathcal{P}$ 具有 (B), 如果 $x \in U \in \tau$, 则存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$, 使得

$$x \in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F}) \subset \cup\mathcal{F} \subset U, \quad 且 \ x \in \cap\mathcal{F}.$$

定义 3[12]　设空间 X 的子集族 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 满足：对于 $x \in X, \mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网，即 $\mathcal{P}_x \subset (\mathcal{P})_x$ 且若 $x \in G \in \tau$, 存在 $P \in \mathcal{P}_x$, 使得 $P \subset G$; 并且如果 $U, V \in \mathcal{P}_x$, 那么存在 $W \in \mathcal{P}_x$, 使得 $W \subset U \cap V$.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列邻域网，若每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的弱基，若 $G \subset X$, 使得对于 $x \in G$ 存在 $P \in \mathcal{P}_x$, 有 $P \subset G$, 那么 G 是 X 的开集.

上述 $\mathcal{P}_x$ 分别称为 x 在 X 中的序列邻域网 (简记为 sn 网), 弱基 (或弱邻域基). 若空间 X 的每一点都有可数的 sn 网 (弱基), 则称 X 是 snf 可数 (gf 可数) 空间.

对于空间 X 及点 $x \in X$. 称 X 的子集 F 是空间 X(在点 x) 的扇，如果

$$F = \{x\} \cup \{x_{nm} : n, m \in N\},$$

其中对于每一 $n \in N$, 序列 $\{x_{nm}\}$ 收敛于点 x 且 x 及 x_{nm} 的各项是两两互不相同. 设 F 是 X 的扇， F 的子集 D 称为 F 的对角，如果 D 是 F 的收敛序列且 D 与无限多个关于 n 的序列 $\{x_{nm}\}$ 相交. 空间 X 称为 α_4 空间 [13,14], 如果对于 $x \in X$, X 的每一在 x 的扇有对角收敛于 x.

$S_\omega(S_{\omega_1})$ 是把可数 (ω_1) 个非平凡的收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间. S_ω 是没有对角的扇. 易验证，对于空间 X 的覆盖，

$$\begin{array}{ccccccc}
\text{弱基} & \Rightarrow & sn\text{网} & \Rightarrow & (B) & \Rightarrow & (A) \\
 & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & & cs\text{网} & \Rightarrow & cs*\text{网} & \Rightarrow & wcs*\text{网} & \Leftarrow & k\text{网}.
\end{array}$$

它们之间的一些不蕴含关系在注 1 和例 1 中说明，而 X 是第一可数空间 $\Rightarrow X$ 是 gf 可数空间 $\Rightarrow X$ 是 snf 可数空间 $\Rightarrow X$ 是 α_4 空间 $\Leftrightarrow \sigma X$ 是 α_4 空间 $\Rightarrow \sigma X$ 不含有闭子空间同胚于 $S_\omega \Rightarrow X$ 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

本文的第一部分将说明上述覆盖的进一步关系, 先引用一个与著名的 Miščenko 引理 [15] 类似的有趣结果.

引理 1[11]　如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数覆盖，那么 X 的每一子集仅有至多可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的极小有限的序列邻域.

下述定理说明了作为 Burke-Michael 条件一般化的条件 (A) 与条件 (B), $cs*$ 网，$wcs*$ 网之间的精确关系.

定理 1　对于空间 X, 考虑下述条件:

(1) X 有点可数覆盖满足 (B).

(2) X 是具有点可数 $cs*$ 网的 α_4 空间.

(3) X 是具有点可数 $wcs*$ 网的 α_4 空间.

(4) X 有点可数覆盖满足 (A).

那么 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). 若更设 X 是正则空间，那么 (4) $\Rightarrow$ (1).

证 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (4) 设空间 X 是 α_4 空间，且 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数的 $wcs*$ 网. 若 $\mathcal{P}$ 不具有 (A), 则对于某一 $x \in U \in \tau$ 不存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$, 使得 $x \in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F}) \subset \cup\mathcal{F} \subset U$. 对于 U 的每一可数子集 C, 让

$$\mathcal{P}(C) = \{P \in \mathcal{P} : P \cap C \neq \emptyset, P \subset U\} = \{P_i(C) : i \in N\}, \quad C_0 = \{x\},$$

那么 $P_1(C_0)$ 不是 x 在 X 中的序列邻域，存在 $U \backslash P_1(C_0)$ 中收敛于点 x 的序列 $\{x_{1n}\}$. 让 $C_1 = \{x_{1n} : n \in N\}$, 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的 $wcs*$ 网，存在 $n_1 \in N$ 和 C_1 的无限子集 C_1', 使得

$$C_1' \subset \cup\{P_i(C_j) : 1 \leq i \leq n_1,\ 0 \leq j \leq 1\}.$$

不失一般性，可以设 $C_1' = C_1$, 那么 $\cup\{P_i(C_j) :\ 1 \leq i \leq n_1,\ 0 \leq j \leq 1\}$ 不是 x 在 X 中的序列邻域. 继续上述的过程, 对于每一 $m \in N$, 可以归纳地选取 $C_m = \{x_{nm} : n \in N\} \subset U$ 和递增的序列 $\{n_m\}$, 使得序列 $\{x_{nm}\}_n$ 收敛于 x 且

$$C_m \subset \cup\{P_i(C_j) :\ 1 \leq i \leq n_m,\ 1 \leq j \leq m\} \backslash \cup \{P_i(C_j) : 1 \leq i \leq n_{m-1},\ 0 \leq j \leq m-1\}.$$

这说明每一 $P \in \mathcal{P}$ 仅与有限个 C_m 相交. 让 $S = \{x\} \cup (\cup\{C_m : m \in N\})$, 则 S 是 X 在 x 的扇. 因为 X 是 α_4 空间， S 有对角收敛于 x, 从而存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得 $P \subset U$ 且 P 与无限个 C_m 相交，矛盾. 故 $\mathcal{P}$ 有 (A), 所以 X 有点可数覆盖满足 (A).

(2) $\Rightarrow$ (1) 设空间 X 是具有点可数 $cs*$ 网的 α_4 空间. 让 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 $cs*$ 网. 对于每一 $x \in U \in \tau$, 置 $\mathcal{R}_x = \{\cup\mathcal{P}_x' : \mathcal{P}_x' \in (\mathcal{P})_x^{<\omega}$ 且 $\cup\mathcal{P}_x'$ 是 x 在 X 中的序列邻域 $\}$. 则 $\mathcal{R}_x$ 是可数的. 如果 $\mathcal{R}_x$ 不是 x 在 X 中的网，那么存在 X 的开子集 G, 使得 $x \in G$ 且对于每一 $F \in \mathcal{R}_x$ 有 $F \not\subset G$. 记

$$\{P \in (\mathcal{P})_x : P \subset G\} = \{P_i : i \in N\},\ F_n = \cup\{P_i : i \leq n\}, n \in N.$$

则每一 F_n 不是 x 在 X 中的序列邻域. 因为 $(\mathcal{P})_x$ 是 x 在 X 中的 $cs*$ 网，对于每一 $i \in N$, 存在 X 中收敛于 x 的序列 T_i 和 $n_i \in N$, 使得 $T_i \subset P_{n_{i+1}} \backslash F_{n_i}$ 且 $n_{i+1} > n_i$. 置 $T = \{x\} \cup (\cup\{T_i : i \in N\})$. 那么 T 是 x 在 X 的扇. 因为 X 是 α_4 空间， T 有对角 $\{x_k\}$ 收敛于 x, 于是存在 $i \in N$, 使得 P_i 含有 $\{x_k\}$ 的子序列 $\{x_{k_m}\}$, 从而存在 $m, j \in N$, 使得 $j \geq i$ 且 $x_{k_m} \in T_j$, 因此， $x_{k_m} \in P_i \cap (X \backslash F_{n_j}) = \emptyset$, 矛盾. 故 $\mathcal{R}_x$ 中元的有限交的全体是 x 在 X 中的可数 sn 网. 从而，存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$, 使得

$$x \in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F}) \subset \cup\mathcal{F} \subset U, \quad \text{且} \quad x \in \cap\mathcal{F}.$$

因此， $\mathcal{P}$ 满足条件 (B).

(4) $\Rightarrow$ (1) 设 X 是正则空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的满足 (A) 的点可数覆盖. 对于每一 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$, 置 $M(\mathcal{F}) = \{x \in X : \mathcal{F}$ 是 $\{x\}$ 的极小序列邻域 $\}$. 对于每一 $P \in \mathcal{P}$. 让

$$P' = P \cup (\cup\{M(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}, P \in \mathcal{F}\}).$$

那么 $P' \subset \mathrm{cl}(P)$. 事实上，对于每一 $x \in M(\mathcal{F})$ 和 $P \in \mathcal{F}$ 有 $x \in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})$, 而 $x \notin \mathrm{int}_s(\cup(\mathcal{F} \backslash \{P\}))$, 于是存在 P 中收敛于点 x 的序列，因此 $x \in \mathrm{cl}(P)$, 所以 $P' \subset \mathrm{cl}(P)$. 让 $\mathcal{P}' = \{P' : P \in \mathcal{P}\}$. 对于每一 $x \in X$, 置 $\mathcal{A}_x = \cup\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega} : x \in M(\mathcal{F})\}$, 由引理 1, 仅对至多可数个 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$ 有 $x \in M(\mathcal{F})$, 所以 $\mathcal{A}_x$ 是可数的. 因为 $x \in P'$ 当且仅当 $x \in P$, 或

$x \in M(\mathcal{F})$ 且 $P \in \mathcal{F}$, 于是 $P \in \mathcal{A}_x$, 故 $\mathcal{P}'$ 是点可数的. 对于每一 $x \in W \in \tau$, 由于 X 的正则性, 存在 $U \in \tau$, 使得 $x \in U \subset \mathrm{cl}(U) \subset W$. 选取 $\mathcal{F}_0 \in \mathcal{P}^{<\omega}$, 使得

$$x \in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F}_0) \subset \cup\mathcal{F}_0 \subset U.$$

不妨设 $x \in M(\mathcal{F}_0)$, 让 $\mathcal{F}_0' = \{P' : P \in \mathcal{F}_0\}$, 那么对于每一 $P' \in \mathcal{F}_0'$ 有 $x \in P'$. 另一方面,

$$x \in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F}_0') \subset \cup\mathcal{F}_0' \subset \mathrm{cl}(\cup\mathcal{F}_0') \subset \mathrm{cl}(U) \subset W.$$

所以 $\mathcal{P}'$ 满足 (B).

(4) $\Rightarrow$ (3) 设空间 (X,τ) 有点可数覆盖 $\mathcal{P}$ 满足 (A), 显然, (A) 蕴含 $wcs*$ 网. 对于任一 $x_0 \in X$, 在 X 上作新拓扑 τ^* 如下: 对于 $x \neq x_0$, $\{x\} \in \tau^*$, 点 x_0 的邻域基取为原拓扑 τ 在 X 中的邻域基, 那么 τ^* 是正则空间. 让 $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{\{x\} : x \in X\}$, 则 $\mathcal{P}^*$ 在空间 (X,τ^*) 是点可数覆盖且满足 (A). 事实上, 设 $x \in U \in \tau^*$, 若 $x \neq x_0$, 则

$$\{x\} \in \mathcal{P}^* \quad \text{且} \quad x \in \mathrm{int}_{\tau^*}(\{x\}) = \{x\} \subset U.$$

若 $x = x_0$, 则存在 $\mathcal{P}' \in \mathcal{P}^{<\omega}$, 使得 $x \in \mathrm{int}_\tau(\cup\mathcal{P}') \subset \cup\mathcal{P}' \subset U$. 因为 $\cup\mathcal{P}'$ 是 x 在 (X,τ) 中的序列邻域, 于是 $\cup\mathcal{P}'$ 是 (X,τ^*) 的序列开集, 所以

$$x \in \mathrm{int}_{\tau^*}(\cup\mathcal{P}') = \cup\mathcal{P}' \subset U,$$

故 $\mathcal{P}^*$ 有性质 (A). 由 (4) $\Rightarrow$ (1) 知, (X,τ^*) 具有点可数覆盖满足 (B), 所以 (X,τ^*) 是 snf 可数空间, 故 (X,τ) 在 x_0 是 snf 可数空间. 因此, (X,τ) 是 α_4 空间.

文 [11] 是在正则空间的假设条件下证明定理 1 的各条件是相互等价的, 在此彻底了解了它们之间的关系, 后面的注 1 将说明定理 1 中的正则性是必不可少的. 本文的第二部分利用定理 1 解决刘川和 Tanaka 的问题. 由定义 3, 易验证

引理 2 若 $\mathcal{P}$ 是序列空间 X 的 sn 网, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基.

定理 2 设空间 X 具有点可数 $wcs*$ 网, 那么如果 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω, 则 σX 是 gf 可数空间.

证 让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 $wcs*$ 网. 设 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

首先, 证明 X 是 α_4 空间. 若 X 不是 α_4 空间, 则存在 X 中的点 x 及 X 中在 x 的扇 F, 使得 F 没有对角收敛于 x. 置

$$\begin{aligned} F &= \{x\} \cup \{x_{nm} : n, m \in N\}, \\ \mathcal{R} &= \{P \in \mathcal{P} : P \cap \{x_{nm} : n,m \in N\} \neq \emptyset, \quad x \notin \mathrm{cl}(P)\} \\ &= \{P_k : k \in N\}. \end{aligned}$$

对于每一 $n \in N$ 存在 $m_n \in N$, 使得

$$\{x_{nm} : m \geq m_n\} \subset X \setminus \bigcup_{k \leq n} \mathrm{cl}(P_k).$$

取 $T = \{x\} \cup \{x_{nm} : n \in N, m \geq m_n\}$. 则 T 是 x 在 X 中的扇且没有对角收敛于 x. 如果存在 T 中的序列 $\{x_{n_i m_i}\}$ 收敛于 $x' \neq x$. 不妨设 $n_{i+1} > n_i$, 那么存在 $P \in \mathcal{R}$, 使得 $P \cap \{x_{n_i m_i} : i \in N\}$ 是无限的, 这与 m_n 的选取及 T 的构造相矛盾. 因此 σT 是 σX 的闭子空间且同胚于 S_ω, 矛盾, 故 X 是 α_4 空间.

其次, 证明 X 是 snf 可数空间. 对于任一 $x_0 \in X$, 在 X 上作新拓扑 τ^* 如下: 对于 $x \neq x_0, \{x\} \in \tau^*$, 点 x_0 的邻域基取为原拓扑 τ 在 X 中的邻域基, 那么 τ^* 是正则空间且

具有点可数的 $wcs*$ 网 $\mathcal{P}\cup\{\{x\}:x\in X\}$. τ^* 是 α_4 空间. 设 $x\in X$ 且 F 是 τ^* 在 x 的扇，那么 $x=x_0$. 由于 τ 与 τ^* 在点 x_0 有相同的收敛序列，于是 F 在 τ^* 中有对角收敛于 x, 故 τ^* 是 α_4 空间. 由定理 1, τ^* 具有点可数覆盖满足条件 (B), 于是 τ^* 在点 x_0 具有可数的 sn 网，从而 τ 在点 x_0 也具有可数的 sn 网，故 X 是 snf 可数空间.

最后，证明 σX 是 gf 可数空间. 对于每一 $x\in X$, 设 $\{R_n\}$ 是 X 在点 x 的递减的 sn 网. 显然，每一 R_n 是 σX 在 x 的序列邻域. 若 G 是 X 中点 x 的序列邻域，如果每一 $R_n\not\subset G$, 则存在序列 $\{r_n\}$, 使得每一 $r_n\in R_n\backslash G$, 于是 $\{r_n\}$ 在 X 中收敛于点 x, 从而 $\{r_n\}$ 是终于 G 的，矛盾. 因此，存在 $n\in N$, 使得 $R_n\subset G$. 这说明 $\{R_n\}$ 是 σX 在 x 的 sn 网. 所以 σX 是 snf 可数的序列空间，由引理 3, σX 是 gf 可数空间.

文 [12] 是在 k 网的条件下证明定理 2 的. 利用定理 2, 定理 1 中的 α_4 空间条件可减弱为条件： σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω, 也可加强为条件： σX 是 gf 可数空间.

推论 1 (1) 设 X 是具有点可数 $wcs*$ 网的序列空间，那么 X 是 gf 可数空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(2) 设 X 是具有 σ 点有限 k 网的 k 空间，若 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω, 那么 X 是 gf 可数空间.

(3) 空间 X 具有点可数的 sn 网当且仅当 X 具有点可数 cs 网且 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

证 (1) 来自定理 2. 设 X 是具有 σ 点有限 k 网的 k 空间，于是 X 是具有点可数 k 网的 k 空间, 由文 [16, 推论 3.4] 知， X 是序列空间, 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω, 再由 (1) 知 X 是 gf 可数空间，所以 (2) 成立. 往证 (3) 成立. 设空间 X 具有点可数 cs 网且 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω. 由定理 2, σX 是 gf 可数空间. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数的 cs 网，我们证明 $\mathcal{P}$ 的某子族构成 X 的 sn 网. 对于每一 $x\in X$, 设 $\{V_n:n\in N\}$ 是 x 在 X 中递减的 sn 网. 置 $\mathcal{P}_x=\{P\in\mathcal{P}:$ 存在 $n\in N$, 使得 $V_n\subset P\}$. 那么 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中关于有限交封闭的序列邻域族. 若 $\mathcal{P}_x$ 不是 x 在 X 中的 sn 网，则存在 x 在 X 中的开邻域 G, 使得 $\mathcal{P}_x$ 中的每一元都不含于 G 中. 记

$$\{F\in\mathcal{P}:x\in F\subset G\}=\{F_m:m\in N\},$$

那么每一 $V_n\not\subset F_m$. 取定 $x_{nm}\in V_n\backslash F_m$. 对于 $n\geq m$, 令 $y_k=x_{nm}$, 其中 $k=m+\frac{n(n-1)}{2}$, 则序列 $\{y_k\}$ 收敛于 x, 于是存在 $m,i\in N$, 使得 $\{y_k:k\geq i\}\subset F_m$. 取 $k\geq i$, 使得对于某个 $n\geq m$ 有 $y_k=x_{nm}$, 那么 $x_{nm}\in F_m$, 矛盾. 从而， $\cup\{\mathcal{P}_x:x\in X\}$ 是 X 的点可数的 sn 网. (3) 成立.

文 [17] 是在闭 k 网或 cs 网的情形下证明推论 1(1). 推论 1(2) 肯定地回答了刘川和 Tanaka[6] 的问题，而推论 1(3) 推广了文 [12] 的下述结果：空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_ω.

注 1 Gruenhage, Michael 和 Tanaka[16] 证明了对于空间 X, 下述条件相互等价：

(1) X 有点可数基.

(2) X 有点可数覆盖 $\mathcal{P}$, 使得如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 有

$$x\in(\cup\mathcal{F})^0\subset\cup\mathcal{F}\subset U\ \text{ 且 }\ x\in\cap\mathcal{F}.$$

若更设 X 是正则空间，则它们也等价于

(3) X 是 k 空间且有点可数覆盖 $\mathcal{P}$, 使得如果 $x \in U \in \tau$, 则存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$ 有

$$x \in (\cup\mathcal{F})^0 \subset \cup\mathcal{F} \subset U.$$

然而 X 有点可数覆盖满足 (B)$\not\Rightarrow$ X 有点可数 cs 网. 由文 [8, 例 2.9.27], 存在不具有点可数 cs 网的正则空间 X 是有点可数 k 网的 gf 可数空间. 由定理 1, X 具有点可数覆盖满足 (B).

例 1 (1) X 有点可数 sn 网 $\not\Rightarrow$ X 有点可数 k 网; 例如极大紧化 βN.

(2) X 既有点可数覆盖满足 (A) 又有点可数 k 网 $\not\Rightarrow$ X 有点可数 $cs*$ 网. 由文 [18, 例 4.3], 半圆盘拓扑空间 X 是第一可数的 T_2 空间, 有点可数 k 网, 但是不具有点可数的 $cs*$ 网, 这时 X 具有点可数覆盖满足 (A). 这表明定理 1 、注 1 中空间的正则性是必不可少的.

(3) X 有点可数 cs 网 $\not\Rightarrow$ X 有点可数覆盖满足 (A); 例如空间 S_ω.

(4) X 有点可数 k 网 $\not\Rightarrow$ X 有点可数 $cs*$ 网, 或 X 有点可数覆盖满足 (A); 例如空间 S_{ω_1}.

(5) X 有点可数 cs 网且不含有闭子空间同胚于 S_ω $\not\Rightarrow$ σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω; 例如文 [12, 例 3.19] 中的空间 T.

致谢 本文的一部分内容取自第一作者的博士学位论文 [19], 对于导师周友成教授的关心、帮助及指导表示衷心的感谢.

参　考　文　献

[1] Gruenhage, G., Generalized metric spaces [C], In: Kunen, K., Vaughan, J. E. eds. Handbook of Set-theoretic Topology, Amsterdam, North-Holland, 1984, 423–501.

[2] Gruenhage, G., Generalized metric spaces and metrizability [C], In: Hušek M, van Mill J eds. Recent Progress in General Topology, Amsterdam, North-Holland, 1992, 239–274.

[3] Burke, D. K. & Michael, E. A., On certain point-countable covers [J], *Pacific J. Math.,* **64**(1976), 79–92.

[4] Filippov, V. V., Quotient spaces and multiplicity of a base [J], *Mat Sb,* **80**(1969), 521–532 (*Math. USSR Sb,***9**(1969), 487–496)(in Russian).

[5] Burke, D. K. & Michael, E., On a theorem of V. V. Filippov [J], *Isreal J. Math.,* **11**(1972), 394–397.

[6] Liu Chuan & Tanaka, Y., Spaces having compact-finite k-networks, and related matters [J], *Topology Proc.,* **21**(1996), 173–200.

[7] Nogura, T. & Shibakov, A., Sequential order of product spaces [J], *Topology Appl.,* **65**(1995), 271–285.

[8] 林寿, 广义度量空间与映射 [M], 北京，科学出版社，1995.

[9] Franklin, S. P., Spaces in which sequences suffice [J], *Fund. Math.,* **57**(1965), 107–115.

[10] Franklin, S. P., Spaces in which sequences suffice II [J], *Fund. Math.,* **61**(1967), 51–56.

[11] Yan Pengfei & Lin Shou, Point-countable k-networks, $cs*$-networks and α_4-spaces [J], *Topology Proc.,* **24**(1999), 321–330.

[12] Lin Shou, A note on the Arens' space and sequential fan [J], *Topology Appl.,* **81**(1997), 185–196.

[13] Arhangel'skii, A. V., The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces [J], *Soviet Math. Dokl.,* **13**(1972), 265–268.

[14] Nogura, T., The product of $\langle\alpha_i\rangle$-spaces [J], *Topology Appl.,* **21**(1985), 251–259.

[15] Miščenko, A. S., Spaces with a pointwise denumerable bases (in Russian) [J], *Dokl Akad Nauk SSSR,* **145**(1962), 985–988(*Soviet Math. Dokl.,* **3**(1962), 855–858).

[16] Gruenhage, G. & Michael, E. A. Tanaka, Y., Spaces determined by point-countable covers [J], *Pacific J. Math.,* **113**(1984), 303–332.

[17] Liu Chuan & Dai Mumin, g-metrizability and S_ω [J], *Topology Appl.,* **60**(1994), 185–189.

[18] 林寿, 广义度量空间与映射的正则性 [J], 宁德师专学报 (自然科学版), **11:**4(1999), 241–247.

[19] 林寿, 点可数覆盖与序列覆盖映射 [D], 杭州，浙江大学， 2000.

ON A THEOREM OF D. BURKE AND E. MICHAEL

LIN Shou* YAN Pengfei**

*Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China.
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn
**Department of Mathematics, Anhui University, Hefei 230039, China.

Abstract

The authors introduce two properties of families of sets by Burke-Michael condition, analyze the relations among the properties, $cs*$-networks, and $wcs*$-networks, and answer the following question posed in 1996 by C. Liu and Y. Tanaka in Topology Proceedings: Let X be a k-space with a σ-point-finite k-network, if X contains no closed copy of S_ω, then is X a gf-countable space?

Keywords Point-countable covers, $cs*$-networks, $wcs*$-networks, S_ω, gf-countable space

2000 MR Subject Classification 54E99, 54D55

Chinese Library Classification O189.1

Article ID 1000-8314(2001)06-0707-08